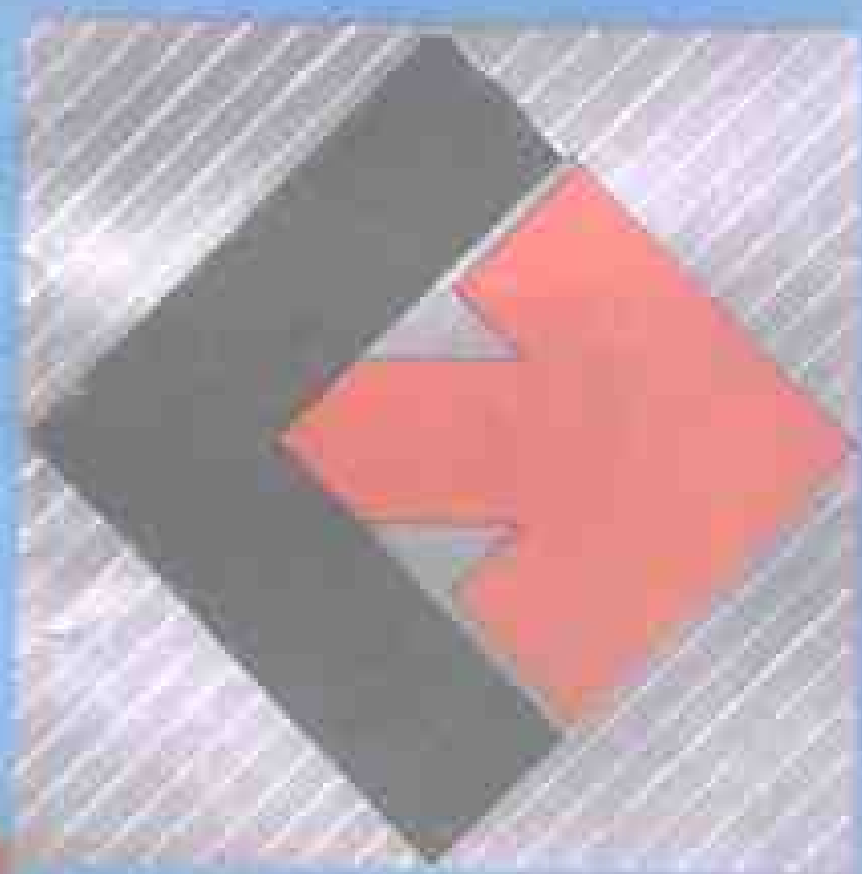


► 高等学校教材

工程系统分析力学

► 主编 陈泰康

► 力学系力学教研室



GONGCHENG XITONG
FENXI LIXUE

工程系统分析力学

黄昭度 钟奉俄

PDF电子书由“零点花园”
网友 MS365 制作



高等教育出版社

内 容 提 要

本书是按照 1987 年“工科分析力学教材研讨会”制定的内容编写的，具有密切联系工程实际、内容全面、论证严谨等特点。内容包括：基本概念，Lagrange 力学的经典问题，Lagrange 力学的专门问题，Hamilton 力学，力学的变分原理，非完整系统动力学。每章后附有习题，书末有答案和索引。本书可作为工科各专业本科生或研究生教材，也适于力学教师、力学工作者及有关工程技术人员作参考书。

(京)112 号

PDF电子书由“零点花园”
网友 MS365 制作

工程系统分析力学

黄昭虞 钟奉俄

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 18.5 字数 440 000

1992 年 10 月第 1 版 1992 年 10 月第 1 次印刷

印数 0001—1036

ISBN 7-04-003881-1/TB·199

定价 6.60 元

序

由 Lagrange 和 Hamilton 创立的、并经 Jacobi, Hertz, Routh, Appell, Чаплыгин 等人发展起来的分析力学已有二百余年的历史。作为离散系统动力学的一般原理和方法, 分析力学长期以来一直是理论物理工作者和天文工作者感兴趣的学科, 工程科学工作者则很少问津, 但这个情况自本世纪 60 年代以来发生了显著变化。由于高新技术的发展, 工程科学不断提出复杂离散系统及离散-连续系统动力学问题, 这些问题对只掌握初等动力学知识的人是难以解决的, 因此分析力学的原理和方法愈来愈广泛和深入地引进到有关工程科学中, 这种情况在航空、航天工程、精密机械和仪表, 机-电控制系统和机器人等不同技术领域表现得尤为明显。分析力学和邻近学科如振动理论、运动稳定性、控制理论以及多刚体动力学的发展有着十分紧密的联系, 这些学科早期的发展都是以分析力学专题的形式出现的, 这在 Lagrange, Routh, Appell 的著作中可以看得很清楚, 以后这些学科虽然独立出来, 但和分析力学之间仍然存在互相提携, 互相促进的紧密关系。此外, 分析力学的原理和方法也愈来愈多地渗透到连续体动力学中去这是因为, 一方面分析力学作为力学的基本原理和方法, 对于连续系统动力学具有普遍意义, 一些基本原理如 Hamilton 原理和 Gauss 原理已经卓有成效地用于研究连续体动力学, 另一方面, 连续体动力学问题的近似求解又往往要采用离散化模型, 这就需要应用分析力学的处理方法。

基于以上原因, 在高等工科院校有关专业的本科生及研究生中开设分析力学课程势在必行。但目前还缺少一本适合工科本科高年级学生和研究生需要的、有一定理论深度、反映这门学科的最

新成就、又密切联系现代工程实际的分析力学教材。本书作者正是本着这种认识编写这本书的。在材料的收集上，充分注意到了各有关工程领域中应用分析力学方法所取得的成就，从而决定本书的内容和体系，凡是对于工程应用有价值的内容就予以保留，否则就予以删除。在理论阐述上，力求作到概念准确，论证严谨，并充分注意到本学科的当代发展状况，尽可能反映新的观点和方法。对于分析力学和相邻学科的交叉与渗透，本书也有所论述，因此本书除传统的分析力学内容外，还包括振动理论，机-电系统动力学，连续体动力学的变分原理等。

本书每章后都附有一定数量的习题，选编习题的原则是：有易有难，巩固理论，联系实际；因此所编习题大多来自工程实际，或有一定工程背景，或是相邻学科所需，实际价值不大的习题很少选用。

本书内容反映了作者多年来在清华大学，西安矿业学院，北方工业大学等院校讲授分析力学的教学经验。本书编写过程中，北京航空航天大学黄克累教授，哈尔滨工业大学谈开孚教授及西安矿业学院薛问西教授审阅过本书手稿，提出了不少宝贵意见，清华大学胡露犀教授校对、订正并誊清了全部手稿，在此一并致以衷心的感谢。

作 者

1991年6月

PDF电子书由“零点花园”
网友 MS365 制作

目 录

第一章 基本概念	1
1.1 约束及其分类.....	2
1.1.1 约束	2
1.1.2 约束的分类	5
1.2 广义坐标.....	17
1.3 准速度与准坐标.....	23
1.4 位形空间与状态空间.....	30
1.4.1 位形空间.....	30
1.4.2 状态空间.....	34
1.5 可能位移、实位移、虚位移.....	37
1.5.1 可能位移.....	37
1.5.2 实位移.....	38
1.5.3 虚位移.....	38
1.5.4 以准坐标变分表示虚位移.....	43
1.5.5 自由度.....	44
1.6 理想约束.....	45
1.6.1 约束力.....	45
1.6.2 几种常见约束及其约束力的虚功.....	46
1.6.3 理想约束.....	49
1.6.4 第一类 Lagrange 方程.....	51
1.7 动能、主动力的虚功及势能.....	52
1.7.1 动能.....	52
1.7.2 主动力的虚功.....	60
1.7.3 势能.....	63
1.8 动力学普遍方程(d'Alembert-Lagrange 原理).....	69
第二章 Lagrange 力学(一)	82
2.1 第二类 Lagrange 方程.....	82
2.1.1 第二类 Lagrange 方程的一般形式.....	82
2.1.2 Lagrange 函数及有势系统的 Lagrange 方程.....	85

2.2	广义势及带电质点在电磁场中的运动	92
2.3	约束力的求法	94
2.4	能量积分	96
2.5	系统总能量的变化,陀螺力和耗散力	101
2.5.1	总机械能的变化	101
2.5.2	陀螺力	102
2.5.3	与非定常约束有关的广义陀螺力	104
2.5.4	扰动微分方程中的广义陀螺力	109
2.5.5	耗散力及耗散函数	113
2.6	循环积分	118
2.7	Noether 定理	124
2.8	Lagrange 方程的降阶	130
2.8.1	Whittaker 方程——利用广义能量积分降阶	131
2.8.2	Legendre 变换	134
2.8.3	Routh 变换与Routh 方程——利用循环积分降阶	136
2.9	保守系统的微振动理论	143
2.9.1	平衡位置的稳定性	143
2.9.2	稳定平衡位置附近的微振动	144
2.9.3	主振型向量的正交性	148
2.9.4	主振型矩阵,主坐标变换	150
2.9.5	系统对外扰力的响应	156
2.10	保守陀螺系统的微振动	157
2.11	几个具体的工程系统动力学问题	164
2.11.1	陀螺摆的动力学问题	164
2.11.2	带有单圆盘的旋转轴的振动问题	169
2.11.3	圆形限制三体问题	175
2.11.4	轨道卫星的姿态运动问题	180
第三章	Lagrange 力学(二)	199
3.1	碰撞问题的 Lagrange 方程	199
3.2	以准坐标表示的运动方程——Euler-Lagrange 方程	205
3.2.1	Euler-Lagrange 方程	205
3.2.2	三标记号的求法	210
3.2.3	自由刚体的运动微分方程	211

3.3	载体-被载系统的运动微分方程	217
3.3.1	载体的运动微分方程	218
3.3.2	被载系统的相对运动微分方程	223
3.4	变质量系统的 Lagrange 方程	239
3.5	带有柔性部件的系统动力学方程	248
3.5.1	柔性部件的力学模型及动力学方程	248
3.5.2	带有柔性部件的载体动力学方程	253
3.6	机电系统的 Lagrange-Maxwell 方程	266
3.6.1	电路系统的广义回路及基本方程	267
3.6.2	驱动力的确定及 Lagrange-Maxwell 方程	273
第四章	Hamilton 力学	297
4.1	Hamilton 正则方程	298
4.1.1	Lagrange 系统的正则方程	298
4.1.2	任意系统的正则方程	306
4.2	Hamilton 函数的物理意义及正则方程的首次积分	307
4.2.1	Hamilton 函数的物理意义	307
4.2.2	能量积分	308
4.2.3	循环积分	308
4.3	正则方程的降阶	309
4.3.1	利用能量积分降阶	309
4.3.2	利用循环积分降阶	311
4.4	Poisson 括号与 Lagrange 括号	315
4.4.1	Poisson 括号	315
4.4.2	Jacobi-Poisson 定理	317
4.4.3	Lagrange 括号	319
4.5	正则变换	321
4.5.1	正则变换的定义	321
4.5.2	$d\delta f = \delta df$	322
4.5.3	正则变换的判别定理	324
4.6	正则变换的一些重要性质	327
4.7	生成函数	333
4.7.1	生成函数的简单方案	333
4.7.2	生成函数的一般方案	339

4.8	Hamilton-Jacobi 方程	340
4.8.1	Hamilton-Jacobi 方程	340
4.8.2	Hamilton-Jacobi 定理	344
4.9	几种特殊情况下 Hamilton-Jacobi 方程的求解	345
4.9.1	H 不显含时间 t 的情况	345
4.9.2	存在循环坐标的情况	346
4.9.3	可分离变量的情况	347
4.10	正则扰动理论	357
第五章	力学的变分原理	365
5.1	变分原理概述	365
5.2	非完整约束条件下的虚位移的定义	368
5.2.1	一阶约束情形	369
5.2.2	高阶约束的情形	371
5.3	微分变分原理	374
5.3.1	Mangeron 原理	374
5.3.2	Jourdain 原理	375
5.3.3	Gauss 原理	376
5.4	微分-变分交换关系	378
5.4.1	问题的提出	378
5.4.2	Hölder 定义的交换关系	379
5.4.3	Суслов 定义的交换关系	381
5.5	Hamilton 原理	383
5.5.1	变分法导引	383
5.5.2	Hamilton 原理的一般形式	388
5.5.3	完整系统的 Hamilton 原理	392
5.5.4	非完整系统的 Hamilton 原理	394
5.6	Hamilton 原理与正则方程及正则变换的关系	398
5.6.1	由 Hamilton 原理推导正则方程	398
5.6.2	由 Hamilton 原理建立正则变换	403
5.7	Hamilton 作用量的极值性质	405
5.8	基于变分原理的直接解法	407
5.8.1	基于 Hamilton 原理的直接解法	408
5.8.2	变时间端点下的 Hamilton 原理及应用	416

5.8.3 基于广义 Helmholtz 原理的直接解法	420
5.8.4 基于微分原理的直接解法	427
5.9 最小作用量原理	433
5.10 变分原理在连续体动力学中的推广及应用	440
5.10.1 线弹性动力学的时域微分原理	441
5.10.2 线弹性动力学的时域积分原理	444
5.11 变质量系统的 Hamilton 原理	457
第六章 非完整系统动力学	466
6.1 引言	466
6.2 Routh 方程	467
6.3 关于非完整系统中准速度及准坐标	473
6.3.1 准速度的变分	473
6.3.2 准坐标的变分	475
6.3.3 函数对准速度及对准坐标的导数	476
6.4 Чаплыгин 方程	477
6.4.1 广义 Чаплыгин 方程	478
6.4.2 Чаплыгин 方程	481
6.5 Boltzmann-Hamel 方程	495
6.5.1 一阶非线性非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程	495
6.5.2 一阶线性非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程	497
6.5.3 γ_k^* 及 ε_k^* 的求法	499
6.5.4 关于广义 Чаплыгин 方程与 Boltzmann-Hamel 方程的讨论	511
6.6 Appell 方程	515
6.6.1 Appell 形式的 Jourdain 原理	515
6.6.2 Appell 方程	516
6.6.3 Appell 函数	519
6.7 建立动力学方程的 Kane 方法	529
6.7.1 Kane 方法概要	530
6.7.2 刚体中的广义主动力和广义惯性力	533
6.8 再论非完整系统动力学的积分变分原理	543
习题答案	554
参考文献	571
索引	574

第一章 基本概念

在初等动力学中,力、质量、加速度被当作基本力学量,动力学方程则是依据牛顿定律或由牛顿定律导出的普遍定理(动量定理、动量矩定理等)建立的,因此称这部分内容为牛顿力学。其优点是直观性强。但是在工程实际中所遇到的问题多是非自由系统,即研究对象的位置、速度在运动中常受到预先规定的某些限制,这些限制统称为约束。用牛顿定律直接解决非自由系统的问题时,往往显得很困难。例如,由 N 个质点组成的受约束系统,按已往的方法,首先要解除约束代之以约束力,而这些约束力又是未知的,然后再列出 $3N$ 个包含未知约束力在内的二阶微分方程组,加上约束方程及约束的物理条件组成一个数目很大的方程组。显然,质点数目和约束条件愈多时,方程的数目也愈多,求解愈困难。但实际上,由于约束的存在,描述这 N 个质点组成的系统的运动并不需要 $3N$ 个变量。约束方程的数目愈多时,描述运动所需要的独立变量则愈少。因此,研究用独立变量表示系统的运动方程就是必然的了。

Lagrange 从另一途径出发,以能量和功(标量)作为力学基本量,以虚功原理作为研究动力学的出发点,用数学分析的方法统一处理任意非自由系统的动力学问题。1788年他的巨著《分析力学》问世后,奠定了分析力学的基础。因此前期的分析力学又称为 Lagrange 力学。分析力学的方法特别适用于研究非自由系统的力学问题。它为非自由系统列出了决定运动所必需的最少数目的方程,而且这些方程中不包含未知的约束反力,还具有统一的简明形式。这些方程也适用于电学和机电系统的复杂问题。

本章先介绍分析力学的一些基本概念。

1.1 约束及其分类

1.1.1 约束

设有由 N 个质点 $P_i (i=1, 2, \dots, N)$ 组成的系统, 质点 P_i 的位置由惯性参考系中一固定点 O 所引的矢径 r_i 或直角坐标 x_i, y_i, z_i 所确定。为简单计, 有时也将系统所有的直角坐标按统一序号记作 x_1, x_2, \dots, x_{3N} 。第 i 个质点的坐标为 $x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i}$ 。由于各个质点的位置确定之后, 整个系统的位置和形状(简称系统的位形)也就完全确定了, 因此又将 $3N$ 个坐标 x_1, x_2, \dots, x_{3N} 称为确定系统位形的坐标。系统运动时, 如果各质点的位置、速度等受到一定的限制, 则称这种限制为约束。例如, 用一根无质量的刚性杆联结两个小球(质点), 运动时由于刚性杆的存在使两球心的距离保持不变; 又如圆盘在粗糙平面上作纯滚动时, 粗糙平面使圆盘与平面接触点相对于平面的速度恒等于零。这些都是约束的实例。另外还有这样一类问题, 如导弹追踪目标时, 要求其飞行方向(即速度方向)时时对准目标。这里并没有一个具体的实物结构来限制导弹飞行速度的方向, 而是通过控制系统来实现约束的。约束的形式和机理虽是千差万别, 但它们的共同本质在于迫使系统各质点的位置、速度等运动学要素必须满足一定的条件。这种条件可用以下一般形式的方程来表示:

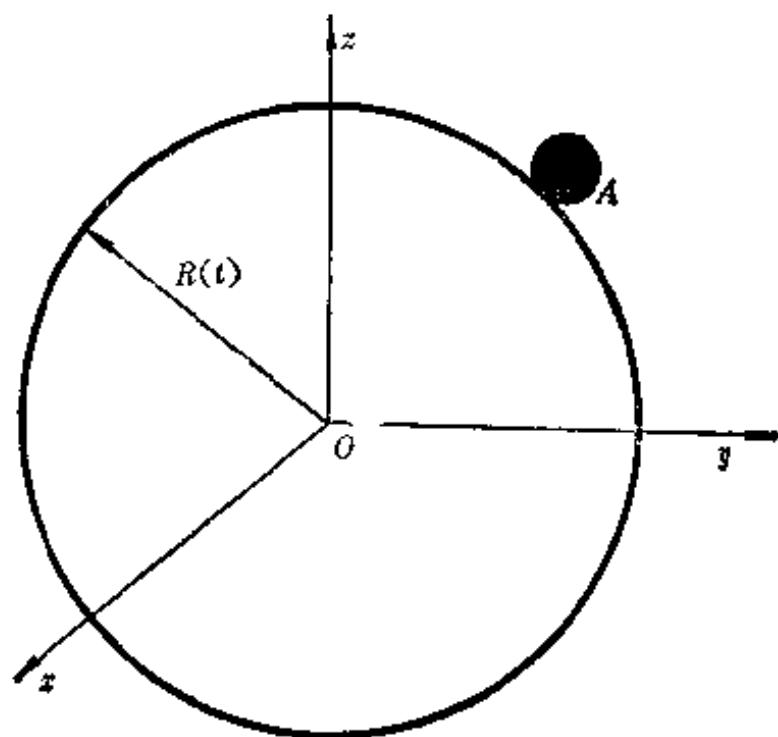
$$f_s(x, \dot{x}, t) = 0 \quad s=1, 2, \dots, l \quad (1.1.1)$$

其中 x 是 x_1, x_2, \dots, x_{3N} 的全体; 字母上的点“ \cdot ”表示该字母代表的量对时间的导数(如 $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$), 而 \dot{x} 则是 $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{3N}$ 的全体(这种用一个不带下标的字母代表有下标的同一字母的全体的简化记法, 今后将一直采用, 不再作说明)。方程(1.1.1)称为约束方

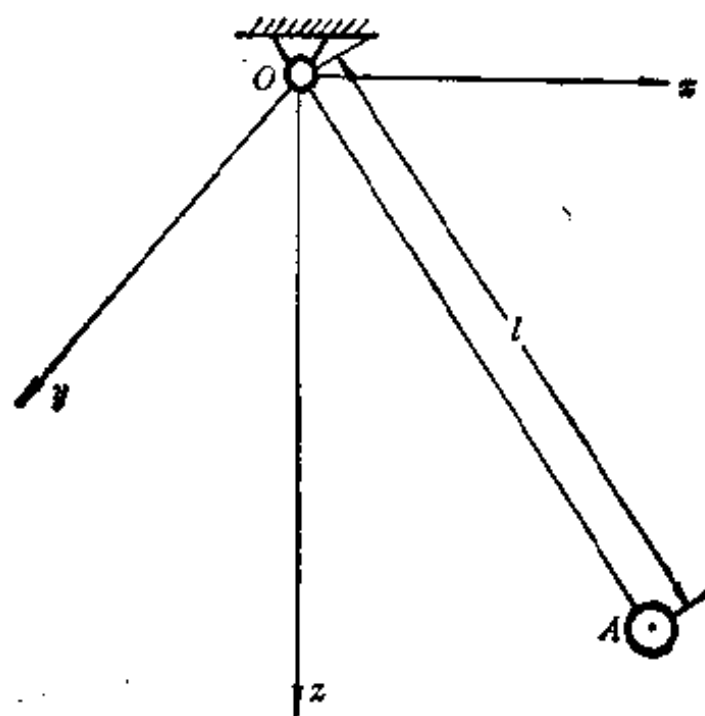
程。有时为了简便起见也将约束方程用质点的矢径表示:

$$f_s(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, l) \quad (1.1.1)'$$

其中 \mathbf{r} 是质点的矢径, 代表 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ 的全体。(一个函数关系



(a)



(b)

图 1.1

用坐标 x 表示或用矢径上表示, 并没有本质的区别, 今后总认为给定了其中一种形式也就给定了相应的另一种形式。)

例题 1.1.1 一个质点 A 被限制在一个不断膨胀的球面上运动(图 1.1a); 或用一不计质量且不断改变长度的细杆将质点 A 与固定点 O 联结(图 1.1b)。写出此两种情况下质点的约束方程。

解 将球的半径记作 $R(t)$, 杆长记作 $l(t)$ 。取坐标如图所示。约束方程分别为:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2(t) = 0 \quad (a)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0 \quad (b)$$

例题 1.1.2 导弹 A 追击目标 B 。要求导弹速度方向总指向目标。试写出约束方程。

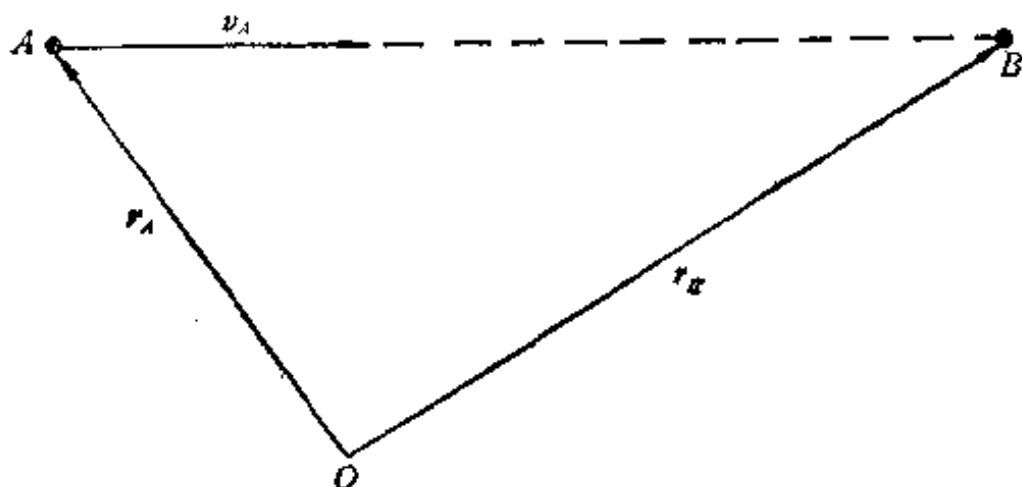


图 1.2

解 以 r_A, r_B 分别记 A, B 的位置(图 1.2), 则约束方程为:

$$\frac{\dot{r}_A}{|\dot{r}_A|} = \frac{r_B - r_A}{|r_B - r_A|} \quad (a)$$

或者写成标量形式:

$$\frac{\dot{x}_A}{x_B - x_A} - \frac{\dot{y}_A}{y_B - y_A} = 0, \quad \frac{\dot{x}_A}{x_B - x_A} - \frac{\dot{z}_A}{z_B - z_A} = 0 \quad (b)$$

1.1.2 约束的分类

在例题 1.1.1 中,两个结构不同的约束却有相同的约束方程。在分析力学中,由于我们关心的是各质点间的位置、速度等等所应满足的关系而不是约束的结构,因而对例题 1.1.1 中两种约束就无需区别。也就是说,今后所说的约束,仅是指约束方程而言,而不追究其具体的构造。因而约束的分类也完全是按约束方程的不同类型而区分的。

一、完整约束和非完整约束

在约束方程(1.1.1)中,如果仅含坐标 x 和时间 t 而不含速度 \dot{x} 时,称为完整约束或几何约束。也就是说,完整约束只限制系统各质点的位置而不限制速度。完整约束的约束方程具有如下的数学表达式:

$$f_s(x, t) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, l) \quad (1.1.2)$$

如果除位形外,系统各点坐标的时间导数(包括速度、加速度等)也受到一定限制,则这种限制条件称为非完整约束。非完整约束中最简单的,也是最常见的一种情况是所谓一阶线性非完整约束,其特点是仅速度受到限制,且约束方程中被限制的速度以线性项形式出现:

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{si} \dot{x}_i + A_s = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, g) \quad (1.1.3)$$

显然,例题 1.1.1 是完整约束,例题 1.1.2 是一阶线性非完整约束。以下再来研究几个完整约束与非完整约束的实例。

例题 1.1.3 具有摆动汽缸的平面机构如图 1.3 所示,已知曲柄 $OA = r$, 曲柄轴至汽缸铰的距离 $OC = l$, 连杆 $AB = l_1$ 。试分析此系统的约束类型。

解 取如图所示的直角坐标系。设 A 、 B 两点的坐标为 x_A ,

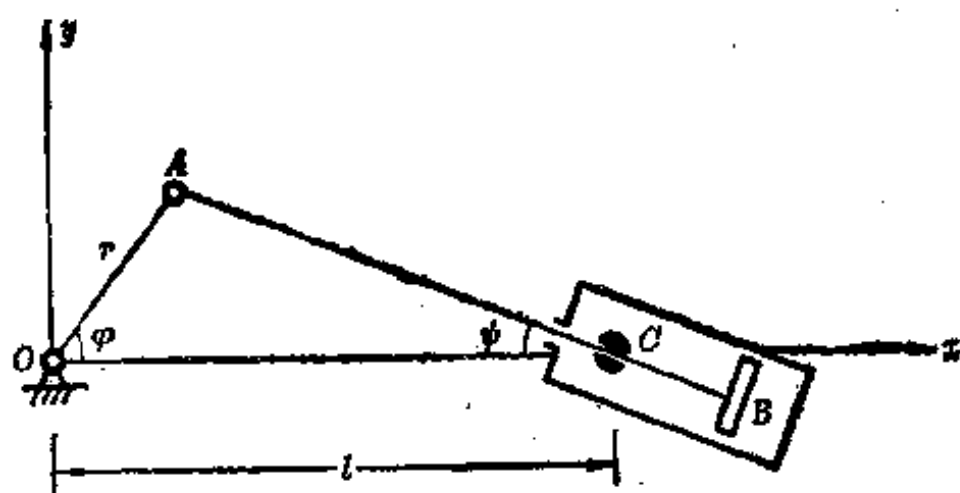


图 1.3

y_A 及 x_B, y_B , 则两个约束方程为

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2 \quad (a)$$

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l^2 \quad (b)$$

连杆在任何时刻皆必须通过 C 点, 这个约束条件可由 OAB 三角形给出以下关系:

$$\frac{\sin(\varphi + \psi)}{l} = \frac{\sin \psi}{r} \quad (c)$$

或
$$\frac{\sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{tg} \psi}{l} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{r} \quad (d)$$

注意以下几何关系:

$$\sin \varphi = \frac{y_A}{r} \quad \cos \varphi = \frac{x_A}{r} \quad (e)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} \quad (f)$$

代入 (d) 后, 可得到第三个约束方程:

$$\frac{1}{l} \left(y_A + x_A \cdot \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} \right) = \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} \quad (g)$$

全部约束方程 (a)、(b)、(g) 表明这些约束都是完整约束。

例题 1.1.4 冰刀在平面上滑动, 冰刀中点的速度始终沿冰

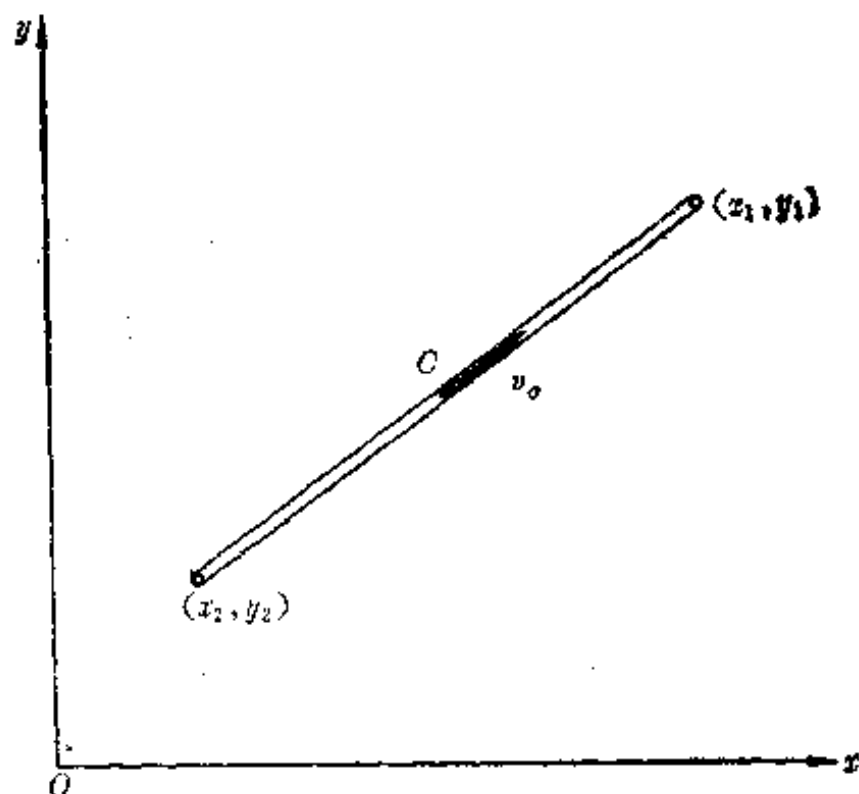


图 1.4

刀的轴线方向。以 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 分别记冰刀两端点的位置, 则冰刀受到的约束为

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0 \quad (a)$$

其中 l 是冰刀两端点的距离。速度限制条件为

$$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_1 - x_2} = \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_1 - y_2} \quad (b)$$

或写成

$$(y_1 - y_2)\dot{x}_1 + (y_1 - y_2)\dot{x}_2 + (x_2 - x_1)\dot{y}_1 + (x_2 - x_1)\dot{y}_2 = 0 \quad (c)$$

由此可见, (a) 是完整约束; (c) 是一阶线性非完整约束。

例题 1.1.5 半径为 a 的均质球在粗糙平面上作纯滚动。这是一个具有一阶线性非完整约束的实例, 例如, 各种滚珠轴承, 齿轮传动中齿廓间的滚动, 都与此相仿。在刚体动力学中, 已知球的转动角速度 ω 在固定坐标 x, y, z 轴上的分量式为:

$$\omega = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) \mathbf{i} +$$

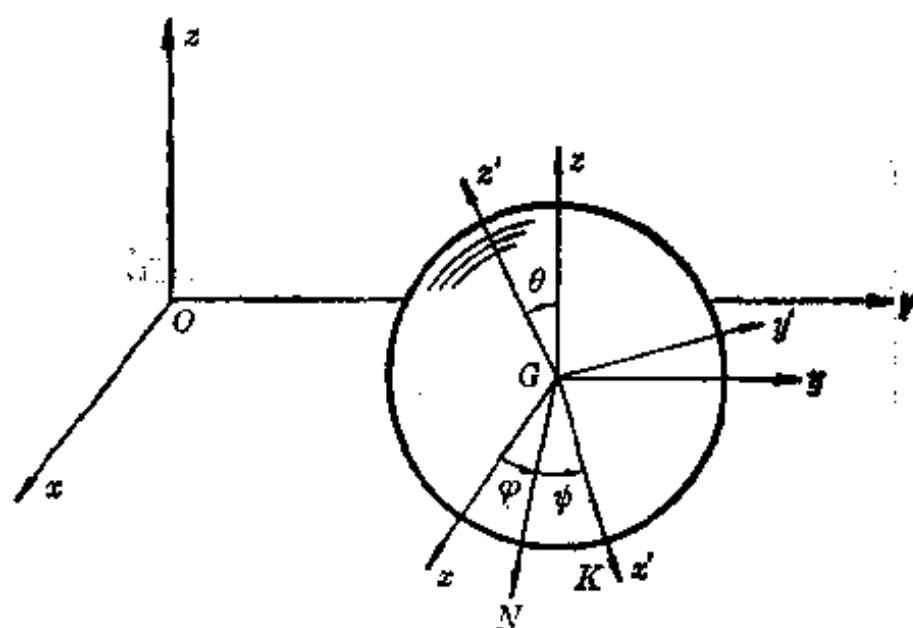


图 1.5

$$(\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi) \mathbf{j} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \mathbf{k} \quad (a)$$

其中 ψ, θ, φ 是欧拉角。切点 K 在随球平移坐标系 $Gxyz$ 中的坐标为 $(0, 0, -a)$, 因而切点 K 的速度

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_K &= \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_K \\ &= (\dot{x}_G - a\omega_y) \mathbf{i} + (\dot{y}_G + a\omega_x) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (b)$$

由只滚不滑条件 $\mathbf{v}_K = 0$, 得约束方程为:

$$\dot{x}_G - a(\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi) = 0 \quad (c)$$

$$\dot{y}_G + a(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) = 0 \quad (d)$$

这也是一阶线性非完整约束。

例题 1.1.6 Appell-Hamel 椅子轮。半径为 a 的轮子 M 在水平面上作无滑动的滚动。为保证轮面始终与水平面垂直, 用一个两条腿的支架与轮子的轴承相固结 (图 1.6)。重物 m 挂在软绳的一端, 绳子绕过两个固定在支架上的滑轮, 缠绕在与轮子固结的鼓轮上。设鼓轮半径为 b , 轮心 G 与 m 间的水平距离为 ρ 。设 x, y, z 为 m 的坐标; 轮与地面接触点 P 的坐标为 x_P, y_P ; θ 为轮面与水平面交线的倾角; φ 为轮子的自转角。

由图 1.6 可知:

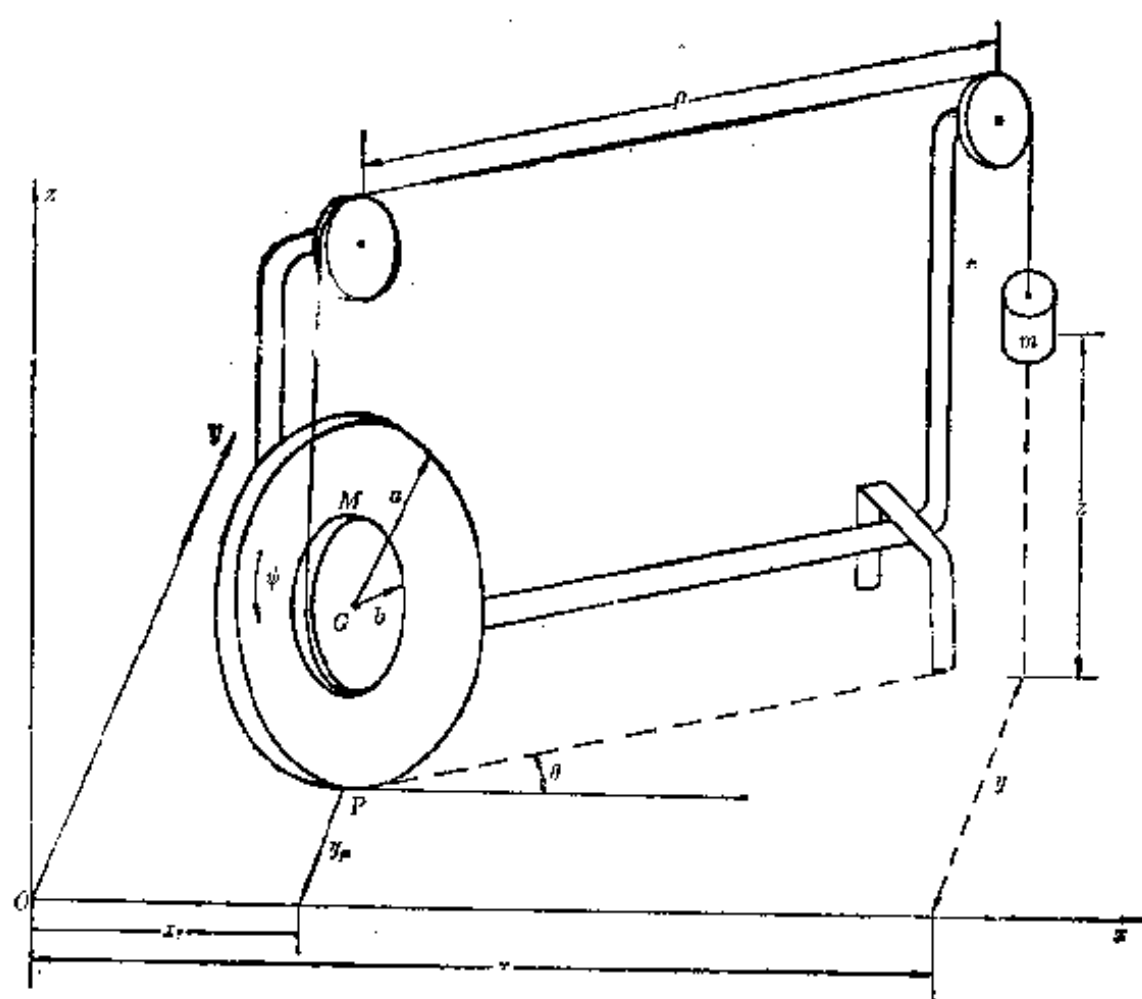


图 1.6

$$\dot{z} = b\dot{\varphi} \quad (a)$$

$$x = x_P + \rho \cos \theta \quad (b)$$

$$y = y_P + \rho \sin \theta \quad (c)$$

因轮子作纯滚动(沿轮缘切向及横向均无滑动),这个条件可表为:

$$\dot{x}_P \sin \theta - \dot{y}_P \cos \theta = 0 \quad (d)$$

$$\dot{x}_P \cos \theta + \dot{y}_P \sin \theta - a\dot{\varphi} = 0 \quad (e)$$

由(d), (e)式可得

$$\dot{x}_P = a\dot{\varphi} \cos \theta, \quad \dot{y}_P = a\dot{\varphi} \sin \theta \quad (f)$$

于是有:

$$\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 = a^2 \dot{\varphi}^2 \quad (g)$$

将(a)式代入上式,得

$$\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 - \frac{a^2}{b^2} \dot{z}^2 = 0 \quad (h)$$

这是加在系统运动上的约束,它是一个含有速度平方的约束方程,是一阶非线性非完整约束的一个经典例子。对于非完整约束,本书着重讨论一阶线性类型。

非完整约束(以后如无特别说明,均指一阶线性非完整约束)也常写成微分形式。如(1.1.3)式可写成

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{si} dx_i + A_s dt = 0 \quad (s=1, 2, \dots, g) \quad (1.1.3)'$$

因此非完整约束又称为微分约束。为叙述方便,有时也将微分约束(1.1.3)'写成

$$\sum_{i=1}^{3N+1} A_{si} dx_i = 0 \quad (s=1, 2, \dots, g) \quad (1.1.4)$$

式中 $dx_{3N+1} = dt$, $A_{s,3N+1} = A_s$, 即第 $3N+1$ 个变量 x_{3N+1} 就是时间变量 t , 这样就不必再区分时间变量和位形变量。(1.1.4) (或(1.1.3)')形式的微分约束称为 Pfaff 约束。

如果微分约束(1.1.4)可积分成有限形式:

$$f_s(x, t) = C_s \quad (s=1, 2, \dots, g)$$

其中 C_s 是积分常数。这种微分约束称为可积微分约束。它实质上就是完整约束。因此在以后的讨论中,我们所说的微分约束都是指不可积的微分约束。

有时也需要将完整约束(1.1.2)写成微分形式:

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_s}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_s}{\partial t} dt = 0 \quad (s=1, 2, \dots, l) \quad (1.1.5)$$

若将(1.1.5)看成微分约束,那么它们就是可积微分约束。

下面我们给出判断一个 Pfaff 型约束(1.1.4)是否可以积分

成有限形式的判据。

首先研究仅有一个 Pfaff 型约束的情况。

为了说明问题,先看一个只含有三个变量的约束:

$$A dx_1 + B dx_2 + C dx_3 = 0 \quad (1.1.6)$$

上式可积的充分必要条件*是:

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial x_3} - \frac{\partial C}{\partial x_2}\right) + B\left(\frac{\partial C}{\partial x_1} - \frac{\partial A}{\partial x_3}\right) + C\left(\frac{\partial A}{\partial x_2} - \frac{\partial B}{\partial x_1}\right) = 0 \quad (1.1.7)$$

引入矢量 $\mathbf{v} = [ABC]$, 上式还可写成

$$\mathbf{v} \cdot \text{curl} \mathbf{v} = 0 \quad (1.1.7)'$$

例题 1.1.7 证明下列 Pfaff 型约束是完整约束:

$$yz(y+z)dx + zx(z+x)dy + xy(x+y)dz = 0 \quad (a)$$

解 计算 A, B, C 的偏导数:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y} &= z(y+z) + yz, & \frac{\partial A}{\partial z} &= y(y+z) + zy; \\ \frac{\partial B}{\partial x} &= z(z+x) + zx, & \frac{\partial B}{\partial z} &= x(z+x) + zx; \\ \frac{\partial C}{\partial x} &= y(x+y) + xy, & \frac{\partial C}{\partial y} &= x(x+y) + xy. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

代入 (1.1.7) 式:

$$\begin{aligned} & yz(y+z)\{x(z+x) + zx - [x(x+y) + xy]\} \\ & + zx(z+x)\{y(x+y) + xy - [y(y+z) + yz]\} \\ & + xy(x+y)\{z(y+z) + yz - [z(z+x) + zx]\} \equiv 0 \end{aligned} \quad (c)$$

由此可知, 所给约束是可积的。事实上, (a) 有积分因子 $\frac{-1}{(xyz)^2}$ 。将

(a) 式两边同乘以 $-1/(xyz)^2$, 则得

* 见 H. T. 彼得罗夫斯基, 《常微分方程讲义》§ 56, 商务印书馆, 1953, 或 E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publication, Inc, New York, p. 54, 1953

$$-\left[\frac{yz}{x^2 y^2 z^2} (y+z) dx + \frac{zx}{x^2 y^2 z^2} (z+x) dy + \frac{xy}{x^2 y^2 z^2} (x+y) dz\right] = d\left(\frac{x+y+z}{xyz}\right) = 0 \quad (d)$$

即 Pfaff 型约束(a)可积成有限形式

$$\frac{x+y+z}{xyz} = C \quad (e)$$

对于含 N 个变量的 Pfaff 型约束

$$\sum_{s=1}^N A_s(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_s = 0 \quad (1.1.8)$$

其可积的充分必要条件是*

$$A_i \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \right) + A_j \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) + A_k \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) = 0$$

$$(i, j, k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.1.9)$$

当有 g 个独立的 Pfaff 型约束

$$\sum_{s=1}^N A_{rs}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_s = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, g) \quad (1.1.10)$$

时, Frobenius 证明**, (1.1.10) 式能积分成有限形式

$$f_r(x_1, x_2, \dots, x_N) = C_r \quad (r = 1, 2, \dots, g)$$

(C_r 是常数)的充分必要条件是:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial A_{rj}}{\partial x_i} - \frac{\partial A_{ri}}{\partial x_j} \right) X_i Y_j = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, g) \quad (1.1.11)$$

其中 X_i, Y_j 是代数方程

* E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publication, Inc., New York, p. 54, 1953

** F. G. Frobenius, *Gesamte Abhandlungen*, Springer, Göttingen pp. 249--334, 1968

$$\sum_{s=1}^n A_{rs} x_s = 0 \quad (r=1, 2, \dots, g) \quad (1.1.12)$$

的任意两组解。

例题 1.1.8 用 Frobenius 条件 (1.1.12) 验证例题 1.1.2 中的微分约束是不可积的。

解 首先将约束方程写成 Pfaff 型:

$$\left. \begin{aligned} (x_5 - x_2) dx_1 - (x_4 - x_1) dx_2 &= 0 \\ (x_6 - x_3) dx_1 - (x_4 - x_1) dx_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

得:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} = x_5 - x_2, A_{12} = -(x_4 - x_1), A_{13} = A_{14} = A_{15} = A_{16} &= 0 \\ A_{21} = x_6 - x_3, A_{22} = 0, A_{23} = -(x_4 - x_1), A_{24} = A_{25} = A_{26} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

对应的代数方程为

$$\left. \begin{aligned} (x_5 - x_2) Y_1 - (x_4 - x_1) Y_2 &= 0 \\ (x_6 - x_3) Y_1 - (x_4 - x_1) Y_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

任取代数方程的两组解:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 = 1, Y_2 = \frac{x_5 - x_2}{x_4 - x_1}, Y_3 = \frac{x_6 - x_3}{x_4 - x_1}, \\ Z_1 = \frac{x_4 - x_1}{x_6 - x_3}, Z_2 = \frac{x_5 - x_2}{x_6 - x_3}, Z_3 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

又由于 A_{ij} 的偏导数中除

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial x_1} = \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} = 1, \frac{\partial A_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial A_{21}}{\partial x_3} = 1$$

之外,其余均等于零,故代入 Frobenius 条件 (1.1.11) 后,得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \left(\frac{\partial A_{1j}}{\partial x_i} - \frac{\partial A_{1i}}{\partial x_j} \right) Y_i Z_j &= -\frac{x_5 - x_2}{x_4 - x_1} \neq 0 \\ \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \left(\frac{\partial A_{2j}}{\partial x_i} - \frac{\partial A_{2i}}{\partial x_j} \right) Y_i Z_j &= -\frac{x_6 - x_3}{x_4 - x_1} \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

由此可知, Pfaff 型微分约束 (a) 是不可积的。

仅有完整约束的系统称为完整系统。完整系统不能任意占据空间位置,这是因为完整约束对系统各点的位置加上了限制。具有非完整约束的系统称为非完整系统。若系统仅有非完整约束,则系统可以占据空间任何位置,但在这些位置上各点的速度都要受到非完整约束的限制。

在形式上最一般的非完整约束,其方程中除 \dot{x} (速度) 而外,还可能包含有 x (加速度), \ddot{x}, \dots , 直至 x 的 k 阶导数 $x^{(k)}$, 即有如下形式的约束方程:

$$f_s(x, \dot{x}, \dots, x^{(k)}; t) = 0 \quad (s=1, 2, \dots, r) \quad (1.1.13)$$

这种约束称为高阶非完整约束。有这种约束的系统称为高阶非完整系统。虽然关于高阶非完整系统有重要实际意义的例子还很少,但是分析力学的一些理论已经被推广到一般高阶非完整系统。关于非完整系统,本书只限于讨论一阶非完整系统,即只包含有一阶线性非完整约束

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{rs} \dot{x}_s + A_r = 0 \quad (r=1, 2, \dots, g) \quad (1.1.3)$$

及一阶非线性非完整约束

$$f_k(x, \dot{x}, t) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, d) \quad (1.1.14)$$

的系统。

二、定常约束和非定常约束

当约束方程不显含时间 t 时,称之为定常约束*。定常完整约束的约束方程具有以下形式:

$$f_s(x_1, x_2, \dots, x_{3N}) = 0 \quad (s=1, \dots, l) \quad (1.1.15)$$

* 定常约束及非定常约束的定义在各书中的提法不尽相同,有些作者仅对完整约束区分这两种类型,而在非完整约束中则不再提定常或非定常的定义。本书为了便于研究非完整系统,采取对所有约束都划分为定常及非定常这两类,而不局限于完整约束。

定常非完整约束的约束方程具有以下形式:

$$f_s(x, \dot{x}, \dots, x^{(k)}) = 0 \quad (s=1, \dots, r) \quad (1.1.16)$$

与此相反,约束方程中显含时间 t 时,称之为非定常约束,非定常完整及非完整约束的一般方程分别具有以下形式:

$$f_s(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) = 0 \quad (s=1, \dots, l) \quad (1.1.17)$$

$$f_s(x, \dot{x}, \dots, x^{(k)}, t) = 0 \quad (s=1, \dots, r) \quad (1.1.18)$$

如例题 1.1.3 及例题 1.1.1 分别表示定常及非定常完整约束方程,例题 1.1.4 至 1.1.6 表示定常非完整约束方程。只具有定常约束的系统称为定常系统。具有非定常约束(即使只有一个约束是非定常的,而其余约束都是定常的)的系统称为非定常系统。

完整系统微分形式的约束方程及一阶线性非完整约束方程具有以下形式:

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{rs} dx_s + A_r dt = 0 \quad (1.1.19)$$

当 $A_r = 0$ 时,这种约束称为有序约束,否则称为非有序约束。具有这两类约束的系统相应地称为有序系统或非有序系统。显然一切定常约束都是有序的,但有序约束不一定是定常的,因为尽管 $A_r = 0$,但 A_{rs} 仍可以显含时间 t 。

下面再来看一个非定常完整约束的例子。

例题 1.1.9 摆长为 l 的旋转摆如图 1.7 所示,摆 OA 可绕转轴上的圆柱形铰在竖直平面内摆动,转轴绕 Oz 以等角速度 ω 转动,试写出此系统的约束方程。

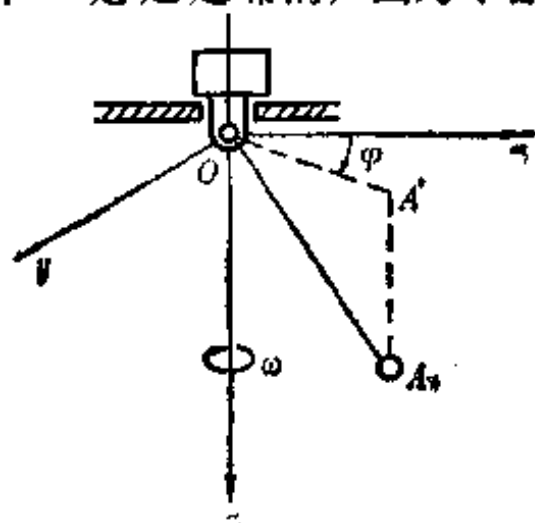


图 1.7

解 此系统的一个约束条件是摆长 OA 恒等于 l :

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \quad (a)$$

另一约束条件是 OA 在 Oxy 面上的投影 OA' 与 Ox 轴之夹角 $\varphi = \omega t$, 这条件可表示为

$$y = x \operatorname{tg} \omega t \quad (b)$$

由此可知, 约束 (a) 是定常的, 约束 (b) 是非定常的。从总体看, 这是一个非定常完整系统。

由例题 1.1.9 的分析可以发现一个带有普遍性的问题。凡带有可作相对运动的非自由系统的载体按已知规律运动时, 这种系统一般都属于非定常系统, 显然, 这类系统有广泛的工程实际背景, 如航空、航天技术中的飞行器、船舶, 车辆等运输工具、以及地震条件下建筑物和仪表都属于非定常系统。

三、固执约束和非固执约束

系统在任何情况下都不能脱离约束时, 我们就称约束是固执的; 与此相反, 当系统在一定条件下能脱离约束时, 就称约束是非固执的。

例如一个质点被限制在曲面 $f(x, y, z) = 0$ 上运动。由于质点可以脱离曲面, 因此质点坐标应满足的约束条件是

$$f(x, y, z) \geq 0$$

非固执约束又称单面约束, 其约束方程通常是用不等式表达的; 以前讨论过的固执约束 (无论完整或非完整、定常或非定常) 又称双面约束, 其约束方程都是用等式表达的。

非固执约束的一般表达式为

$$f(x, \dot{x}, t) \geq 0 \quad (1.1.20)$$

对于非固执约束 (1.1.20), 在等号成立的时间内, 就表示约束是张紧的。否则是非张紧的。

当有非固执约束存在时, 系统的运动可以分阶段考虑: 在约束张紧的一段上, 系统的运动与在固执约束情况下的运动是一样

的;而在约束非张紧的一段上,则和没有此约束的情况相同。因此在系统运动的不同阶段,非固执约束或为固执的,或完全被解除。鉴于此,在今后的讨论中,认为约束都是固执的。

1.2 广义坐标

设有由 N 个质点组成的完整系统, 其约束方程为

$$f_s(x, t) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, l < 3N) \quad (1.2.1)$$

这些方程的左端,每个都是 $3N$ 个变量 x_1, x_2, \dots, x_{3N} 的函数(将 t 看成参数)。如果它们是独立的,即其 Jacobi 矩阵*

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_l)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{3N})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3N}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{3N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \frac{\partial f_l}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial x_{3N}} \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

的秩为 l , 则按隐函数存在定理, 由方程组 (1.2.1) 可以将 l 个坐标作为 l 及其余 $3N-l$ 个坐标的函数解出来 (不失一般性, 假定被解出的是前 l 个), 即

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_{3N}; t) \\ x_2 &= x_2(x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_{3N}; t) \\ &\dots\dots\dots \\ x_l &= x_l(x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_{3N}; t) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.3)$$

上式表明在确定系统在 t 时刻位形的 $3N$ 个坐标中, 只有 $n(=3N-l)$ 个是独立的, 其余 l 个是不独立的。这就是说, 确定系统在 t 时刻的位形只需要 n 个独立参数的坐标, 而不是 $3N$ 个坐标。由于

· T. M. 菲赫金哥尔茨著，杨弢亮、叶彦谦译，〈微积分教程（第一卷第二分册）〉，高等教育出版社，第六章 § 3，1955 年

笛卡尔坐标的这种不平等性(有的独立,有的不独立),使得在具体问题中,取笛卡尔坐标作为确定系统位形的独立参数往往很不方便。因此我们希望根据系统的具体结构选取另外一组独立参数 q_1, q_2, \dots, q_n 来确定系统的位形。这是可以做到的。例如,可以任取 $3N-l$ 个函数

[illegible]

使它们与 l 个约束方程 (1.2.1) 左端的函数是独立的, 即 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_{3N})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{3N})} \neq 0 \quad (1.2.5)$$

于是根据隐函数存在定理, 若令 (1.2.1) 的各式左端诸函数等于 $q_{n+s} (s=1, 2, \dots, l)$, 即

$$f_s = (x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) = q_{n+s} \quad (s=1, 2, \dots, l) \quad (1.2.1)$$

则有

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots, q_{n+l}; t) \quad (i = 1, 2, \dots, 3N) \quad (1.2.6)$$

再考虑到 $q_{n+s}=0$, ($s=1, 2, \dots, l$), 式(1.2.6)就成为

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \quad (i = 1, 2, \dots, 3N) \quad (1.2.7)$$

这是 q 到 x 的一组变换式。由 (1.2.4) 及 (1.2.7) 可知, 利用约束条件, 可对 x 和 q 进行一对一地变换。这样我们就可以用任意取值的独立变量 q_1, q_2, \dots, q_n 表示系统的位形, 而且这样的位形必然是约束所容许的。(1.2.7) 式可以简洁地写成向量形式:

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (1.2.8)$$

x (或 r) 是 q, l 的单值函数。由此可知, 只要给定 q_1, q_2, \dots, q_n 一

组值(在隐函数定理成立的取值范围内),便决定了系统在 t 时刻的、为约束所容许的一个位形,因而 q_1, q_2, \dots, q_n 确是确定系统位形的独立参数,称为广义坐标,它们是决定系统位形所必需的独立参数,或最少的参数。它们的数目 $n=3N-l$ (l 是完整约束的个数)。对于平面问题,广义坐标数 $n=2N-l$ 。由以上的讨论可以看出,由广义坐标 q_1, q_2, \dots, q_n 所决定的 x 必满足约束方程 (1.2.1),所以采用广义坐标后就不必再考虑完整约束了。这正是采用广义坐标的优点之一。

如果约束是定常的,即时间 t 不显含在方程 (1.2.1) 中,那么总可以找到一组 q_1, q_2, \dots, q_n , 使方程组 (1.2.6) 也不显含时间 t [这只要任意选取的函数 (1.2.4) 不显含 t 即可]。以后对于定常系统,我们总认为广义坐标是按此方式选取的,即对于定常系统,总有

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (i=1, 2, \dots, 3N) \quad (1.2.9)$$

或

$$r_j = r_j(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (1.2.9)'$$

在具体问题中,广义坐标的选取,往往并不需要按上述方式通过一组代数方程来选定,而是根据系统的结构和问题的要求凭直观判断:确定系统的位形至少需要几个独立参数,然后择优选取。确定了广义坐标之后,再由约束条件去求确定系统位形的直角坐标 $x=x(q, t)$ 。下面分析几个例子。

例题 1.2.1 如图 1.8 所示的双摆由两个质点 M_1 、 M_2 用长度为 l_1 及 l_2 的刚性杆铰接而成。作为平面问题,共有二个完整约束,因此广义坐标数 $n=2 \times 2 - 2 = 2$ 。取 φ_1, φ_2 为广义坐标(图 1.2.1),则得

$$x_1 = l_1 \cos \varphi_1 \quad (a)$$

$$y_1 = l_1 \sin \varphi_1 \quad (b)$$

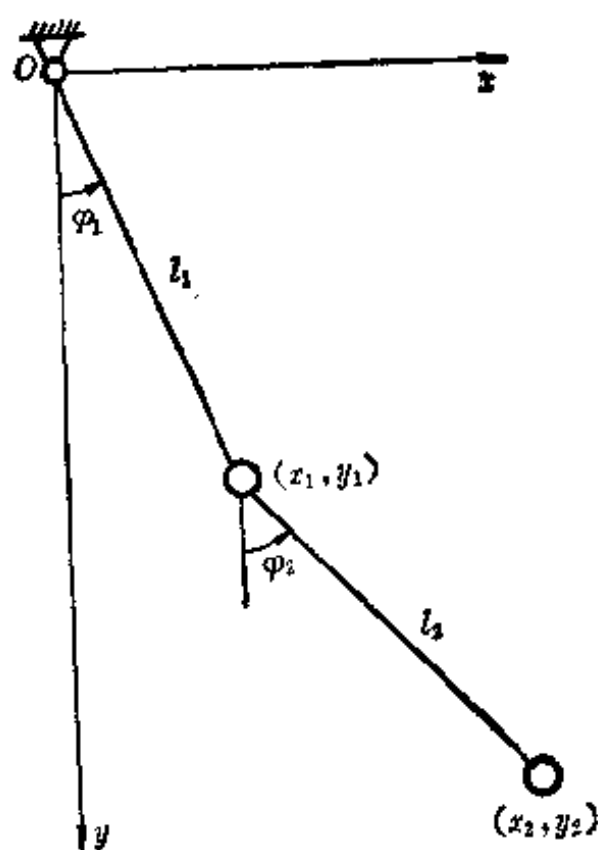


图 1.8

$$x_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \quad (c)$$

$$y_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 \quad (d)$$

由于以上方程中不显含 t , 所以这是一个定常完整系统。

例题 1.2.2 例题 1.1.9 中的旋转摆有两个完整约束, 只需选取一个广义坐标。今取摆与 z 轴夹角 θ 为广义坐标(图 1.9), 则得

$$x = l \sin \theta \cos \omega t \quad (a)$$

$$y = l \sin \theta \sin \omega t \quad (b)$$

$$z = l \cos \theta \quad (c)$$

由于以上方程中显含 t , 这是一个非定常完整系统。

例题 1.2.3 椭圆摆。滑块 A 可沿 x 轴自由滑动, 小球 B 用长度为 l 的杆子与滑块铰结且只能在铅直平面内自由摆动(图 1.10)。

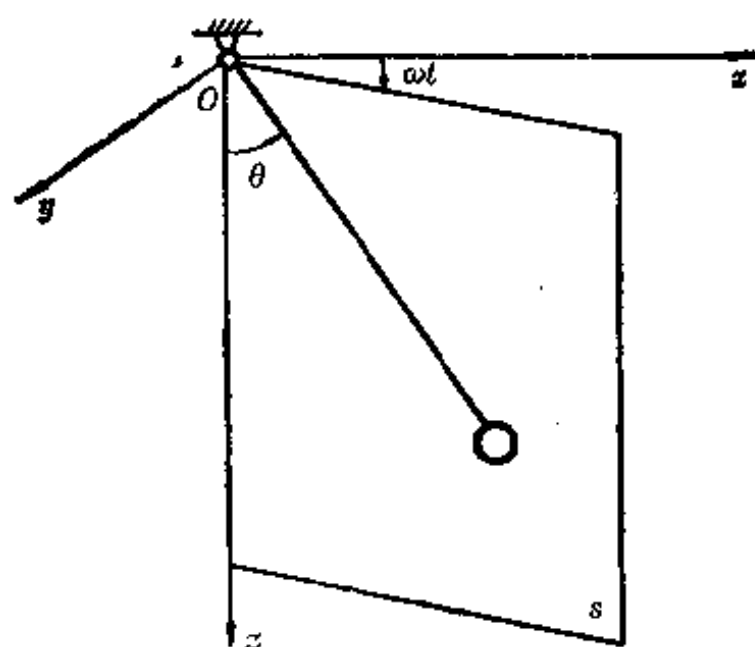


图 1.9

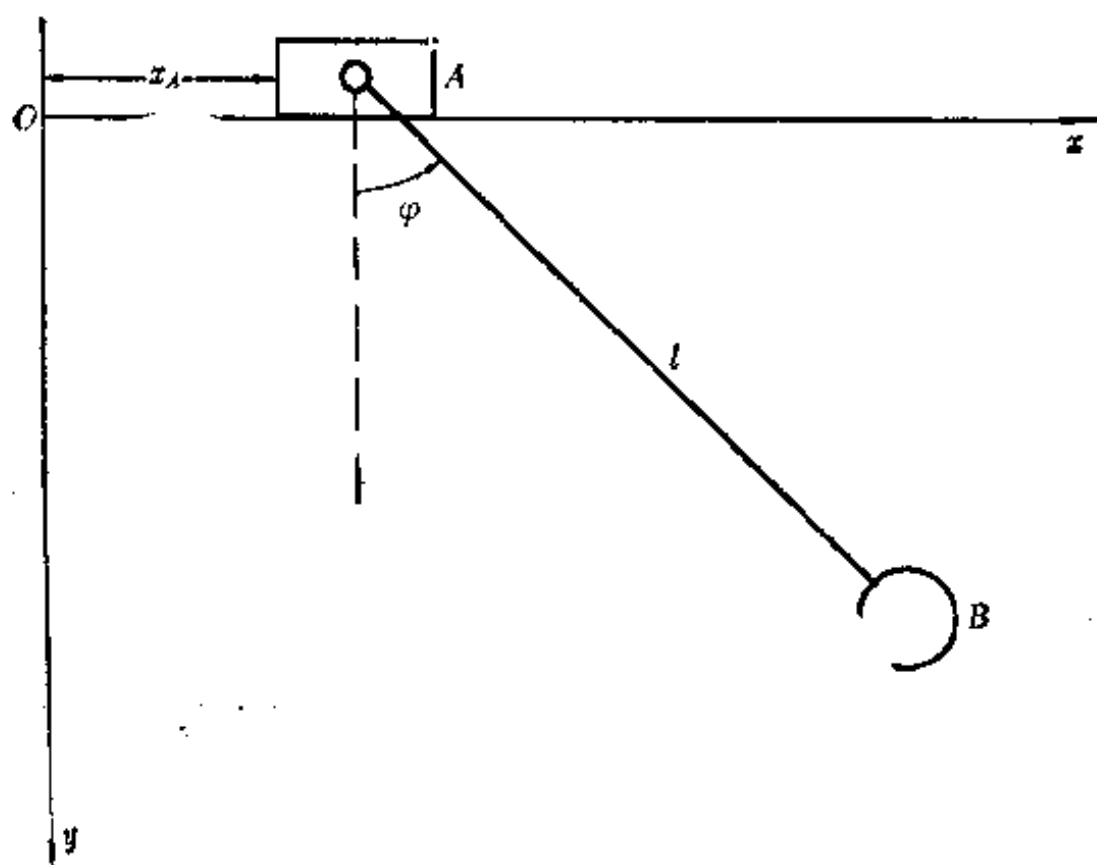


图 1.10

解 系统由两质点组成。作为平面问题，有以下两个约束方程：

$$\left. \begin{aligned} y_A &= 0 \\ (x_B - x_A)^2 + y_B^2 &= l^2 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

因此需选 $n = 2 \times 2 - 2 = 2$ 个广义坐标。取 x_A 及 φ 为广义坐标时，则有

$$x_B = x_A + l \sin \varphi, \quad y_B = l \cos \varphi \quad (b)$$

这是一个定常完整系统，但是当 x_A 按已知规律 $x_A(t)$ 运动时，就成为非定常完整系统了。

在非完整系统中，除非完整约束外，一般还有完整约束同时存在（见例题 1.1.4）。在这种情况下，首先根据完整约束取广义坐标确定系统的位形，这就表明已考虑了完整约束。至于非完整约束，则需以广义坐标及其导数（即广义速度）表示。例如对于一阶线性非完整约束可按下述方式进行。首先将 (1.2.7) 式对时间求导，得：

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_s}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_s}{\partial t} \quad (s=1, 2, \dots, 3N) \quad (1.2.10)$$

将上式和 (1.2.7) 式代入 (1.1.3) 式，就得到以广义坐标表示的非完整约束方程：

$$\sum_{j=1}^n a_{rj} \dot{q}_j + a_r = 0 \quad (r=1, 2, \dots, g) \quad (1.2.11)$$

其中

$$a_{rj} = \sum_{s=1}^{3N} A_{rs} \frac{\partial x_s}{\partial q_j}, \quad a_r = \sum_{s=1}^{3N} A_{rs} \frac{\partial x_s}{\partial t} + A_r$$

$$\left(\begin{array}{l} r=1, 2, \dots, g \\ j=1, 2, \dots, n \end{array} \right) \quad (1.2.12)$$

原来的 A_{rs}, A_r 都是 x, t 的函数，当其中的 x 以 (1.2.6) 代入后，它们就都是 q 和 t 的函数了。由此可见，采用广义坐标后，一阶线性

π_2, \dots, π_n 是彼此独立的, 而且与广义速度 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ 能一对一地转换。这样的 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ 称为准速度。一般(尤其是对完整系统和线性非完整系统)常取准速度为 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ 的线性组合(齐次的或非齐次的):

$$\pi_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j + a_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1.3.2)$$

或

$$\pi_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1.3.2)'$$

其中 a_{kj} 及 a_k 是 q, t 的函数, π 和 \dot{q} 之间能实现一对一地转换的条件是

$$\det[a_{kj}]_{k,j=1}^n \neq 0 \quad (1.3.3)$$

于是由(1.3.2)式可解出广义速度 \dot{q} :

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} \pi_k + b_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.3.4)$$

或与(1.3.2)'相应, 有

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} \pi_k \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.3.4)''$$

式中系数矩阵 $[b_{jk}] = [a_{kj}]^{-1}$, $b_j = -\sum_{k=1}^n b_{jk} a_{k0}$

将(1.3.2)式写成微分形式:

$$\pi_k dt = \sum_{j=1}^n a_{kj} dq_j + a_k dt \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1.3.5)$$

引入记号 $d\pi_k \triangleq \dot{\pi}_k dt$, 则(1.3.5)可写成

$$d\pi_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} dq_j + a_k dt \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1.3.5)'$$

而(1.3.2)'式便可写成

$$d\pi_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} dq_j \quad (1.3.6)$$

如果(1.3.5)'或(1.3.6)中的每个等式右端的微分多项式都是一个全微分,则可积分成有限形式:

$$\pi_1 = \pi_1(q_1, q_2, \dots, q_n; t)$$

$$\pi_2 = \pi_2(q_1, q_2, \dots, q_n; t)$$

.....

$$\pi_n = \pi_n(q_1, q_2, \dots, q_n; t)$$

这表明 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ 不过是另一组广义坐标, $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ 是与之相应的广义速度。但在以后的应用中,并不需要 (1.3.5) (或(1.3.6)) 式右端是全微分, 因为 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ 本身不一定有定义。 π 是由(1.3.2)式定义的一个变量, 并不表示 q 和 t 的某个函数对时间的导数。例如, 刚体作定点转动时, 刚体角速度 ω 在与刚体固结的

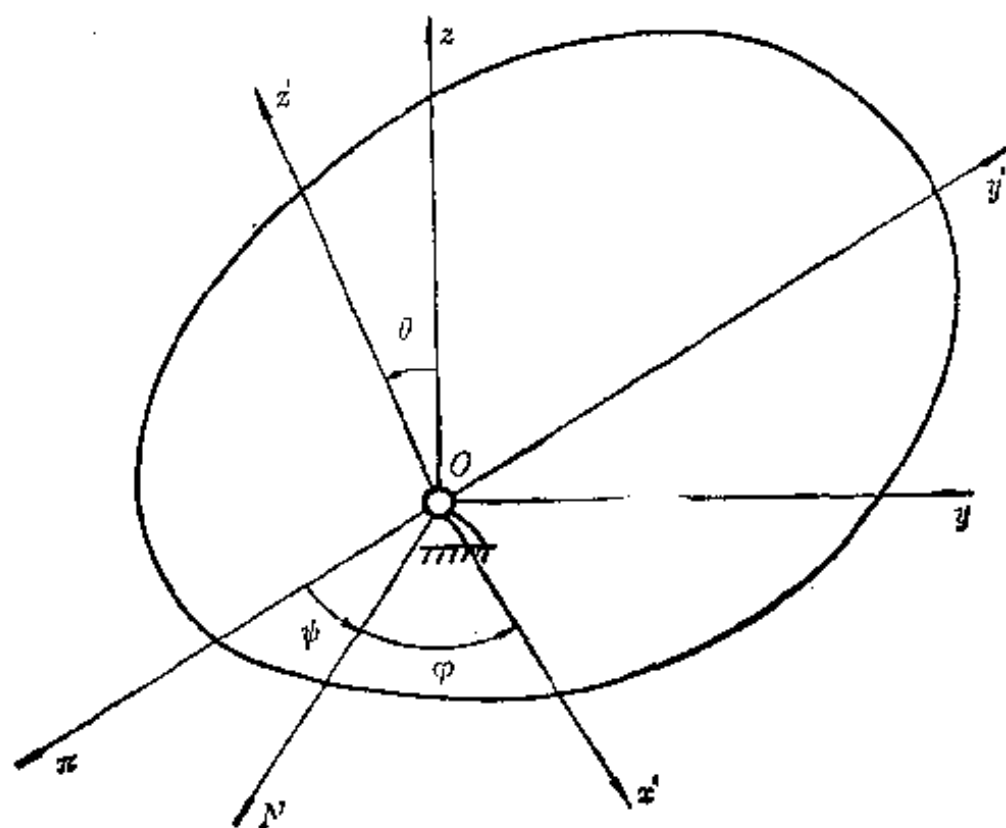


图 1.11

坐标系 $Ox'y'z'$ 各坐标轴上的投影分别为(图1. 11):

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ \omega_{y'} &= -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (1. 3. 7)$$

其中欧拉角 ψ, θ, φ 是广义坐标。取准速度 $\pi_1 = \omega_{x'}, \pi_2 = \omega_{y'}, \pi_3 = \omega_{z'}$ 。它们是广义速度 $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ 的线性齐次函数。引入了准速度, 刚体的动能 T 便可以简单地表示为

$$T = \frac{1}{2}(A\pi_1^2 + B\pi_2^2 + C\pi_3^2).$$

其中 A, B, C 是刚体的主惯性矩。由准速度 π_1, π_2, π_3 可以确定系统的广义速度:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \pi_1 \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} + \pi_2 \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \\ \dot{\theta} &= \pi_1 \cos \varphi - \pi_2 \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= -\pi_1 \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta - \pi_2 \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta + \pi_3 \end{aligned} \right\} \quad (1. 3. 8)$$

从这个例子可以看出, 准速度 π_1, π_2, π_3 有确切的定义, 还有明确的物理意义(一般并不要求准速度有物理意义)。但 π_1, π_2, π_3 本身却无意义, 因为在刚体绕定点转动的问题中找不到一个以 $\psi, \theta, \varphi; t$ 为变量的函数, 它的导数等于刚体的角速度在动坐标轴上的投影。

总之, 准速度 π 作为 q, \dot{q}, t 的函数, 有确切的定义, 它们的全体可以确定系统的广义速度 \dot{q} ; 但 π 是不一定存在的。虽然可以由 $\int_0^t \pi dt$ 得到一个时间 t 的函数 $\pi(t)$, 但它却是依赖于运动的, 不能用来确定系统的位形。然而其微分、导数以及下面要定义的变分 δ 的表达式(1. 3. 11)等都有与坐标相似的作用, 因此称之为准坐标。

将(1. 3. 4)式代入(1. 2. 10)式, 便得到用准速度表示各点速度

的表达式:

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_s}{\partial q_j} b_{jk} \pi_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_s}{\partial q_j} b_j + \frac{\partial x_s}{\partial t} \quad (s=1, 2, \dots, 3N) \quad (1.3.9)$$

引入记号

$$\frac{\partial}{\partial \pi_k} \triangleq \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_j} b_{jk} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1.3.10)$$

则(1.3.9)式可写成

$$\dot{x}_s = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_s}{\partial \pi_k} \pi_k + D_s \quad (s=1, 2, \dots, 3N) \quad (1.3.11)$$

其中

$$D_s = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_s}{\partial q_j} b_j + \frac{\partial x_s}{\partial t} \quad (s=1, 2, \dots, 3N)$$

是与 π 无关的项。

(1.3.11)式表明, 准速度 π 也是描述系统各点速度的一组独立参数。系统各点的速度无论用准速度 π 表示, 或用广义速度 \dot{q} 表示都得到线性函数。

如果系统有 g 个一阶线性非完整约束:

$$\sum_{j=1}^n a_{rj} \dot{q}_j + a_r = 0 \quad (r=1, 2, \dots, g) \quad (1.2.11)$$

那么, 系统的广义速度 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ 由于需要满足 g 个非完整约束(1.2.11), 而只能有 $n-g$ 个是独立的。令 $m=n-g$, 则此时可取 m 个准速度作为描述系统速度的独立参数。不失一般性, 可取

$$\left. \begin{aligned} \pi_k &= \sum_{j=1}^n h_{kj} \dot{q}_j - h_k \quad (k=1, 2, \dots, m) \\ \pi_{m+r} &= \sum_{j=1}^n a_{rj} \dot{q}_j + a_r \quad (r=1, 2, \dots, g) \end{aligned} \right\} \quad (1.3.12)$$

并使 $\det[w_{jk}] \neq 0$, 这里

$$[w_{jk}] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{g1} & a_{g2} & \cdots & a_{gn} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (1.3.13)$$

这样一来,非完整约束方程(1.2.11)具有最简单的形式:

$$\pi_{m+1} = 0, \cdots, \pi_n = 0 \quad (1.3.14)$$

而广义速度 \dot{q} 则可由 m 个独立的准速度 π_1, \cdots, π_m 来表示:

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^m b_{jk} \pi_k + b_k \quad (j=1, 2, \cdots, n) \quad (1.3.15)$$

其中系数矩阵 $[b_{jk}]$ 是矩阵 $[w_{jk}]$ 的逆矩阵的前 m 列。

如果系统还有 d 个一阶非线性非完整约束

$$\varphi_k(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (k=1, 2, \cdots, d) \quad (1.2.16)$$

时,独立广义速度个数 $m = n - g - d$,此时可取

$$\left. \begin{aligned} \pi_k &= \sum_{j=1}^n h_{kj} \dot{q}_j + h_k \quad (k=1, 2, \cdots, m) \\ \pi_{m+r} &= \sum_{j=1}^n a_{rj} \dot{q}_j + a_r \quad (r=1, 2, \cdots, g) \\ \pi_{m+g+k} &= \varphi_k(q, \dot{q}, t) \quad (k=1, 2, \cdots, d) \end{aligned} \right\} \quad (1.3.16)$$

且 Jacobi 矩阵的行列式

$$\det \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{g1} & \cdots & a_{gn} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \dot{q}_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \dot{q}_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_d}{\partial \dot{q}_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_d}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (1.3.17)$$

非完整约束(1.2.11)及(1.2.16)仍具有

$$\pi_{m+1}=0, \dots, \pi_n=0$$

的简单形式。由于函数组(1.3.16)的 Jacobi 行列式不等于零, 因此可由(1.3.16)式解出

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_1, q_2, \dots, q_n; \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m; t) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.3.18)$$

即广义速度仍可用 m 个准速度 π 来表示。

按以上方法选取准速度时, 一个系统的非完整约束数目愈多, 决定系统各点速度的独立参数 π 就愈少, 即非零准速度的数目也愈少, 这也正是为什么引入准速度的重要原因。

例题 1.3.1 在例题 1.1.4 中, 取冰刀一个端点的坐标 x_1, y_1 及冰刀与 x 轴夹角 φ 为广义坐标; 则冰刀的位形由 x_1, y_1, φ 决定;

$$x_2 = x_1, y_2 = y_1; x_2 = x_1 + l \cos \varphi, y_2 = y_1 + l \sin \varphi \quad (a)$$

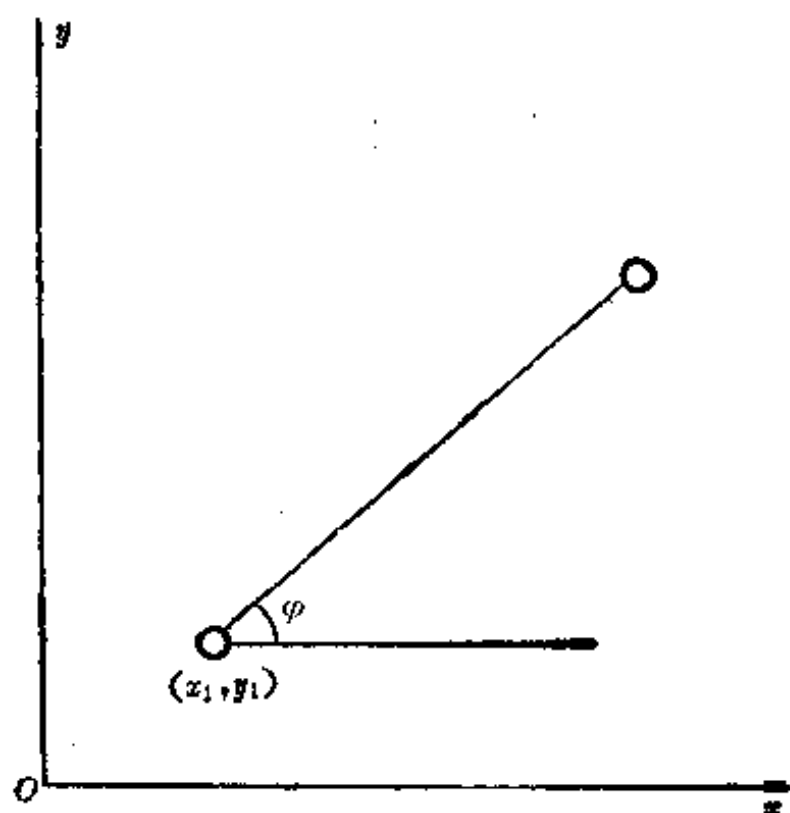


图 1.12

非完整约束方程为

$$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_2 - x_1} - \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_2 - y_1} = 0$$

或写成

$$\dot{x}_1 \sin \varphi - \dot{y}_1 \cos \varphi - \frac{l}{2} \dot{\varphi} = 0 \quad (b)$$

引入准速度

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= \dot{x}_1 \\ \pi_2 &= \dot{y}_1 \\ \pi_3 &= \dot{x}_1 \sin \varphi - \dot{y}_1 \cos \varphi - \frac{l}{2} \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

于是非完整约束(b)便有以下简单形式:

$$\pi_3 = 0 \quad (d)$$

系统的广义速度便由 π_1, π_2 这两个独立参数表达如下:

$$\dot{x}_1 = \pi_1, \dot{y}_1 = \pi_2, \varphi = \frac{2}{l} \pi_1 \sin \varphi - \frac{2}{l} \pi_2 \cos \varphi$$

1.4 位形空间与状态空间

1.4.1 位形空间

由 N 个质点组成的系统, 其位形可以用 $3N$ 个直角坐标 x_1, x_2, \dots, x_{3N} 描述。为了形象地理解和采用几何理论研究复杂系统的运动, 我们将以 x_1, x_2, \dots, x_{3N} 为正交坐标的 $3N$ 维空间称为系统的直角坐标位形空间, 简称 x 空间。 x 空间的点称为系统的位形点或代表点。确定系统位形的 $3N$ 个坐标 x_1, x_2, \dots, x_{3N} 在 x 空间确定一个点。相反, x 空间的一点代表系统的一个位形。对于自由系统, x 空间中任一点都是系统的可能位形; 但对于非自由系统, 由于约束的存在, 并非 x 空间中任一点都是系统的可能位形。在系统运动的同时, 代表点也在 x 空间中移动, 并画出一条连续曲线, 我们称它为系统的位形轨迹。

为了说明 x 空间的性质, 我们先看一个质点运动的情况。此时, x 空间就是三维几何空间。点的轨迹就是位形轨迹。设质点受到一个完整约束的作用, 约束方程为

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (1.4.1)$$

即质点被限制在方程 (1.4.1) 所表示的曲面上运动。曲面上任一连续曲线都代表质点的一种可能运动 (图 1.13)。用广义坐标 q_1 ,

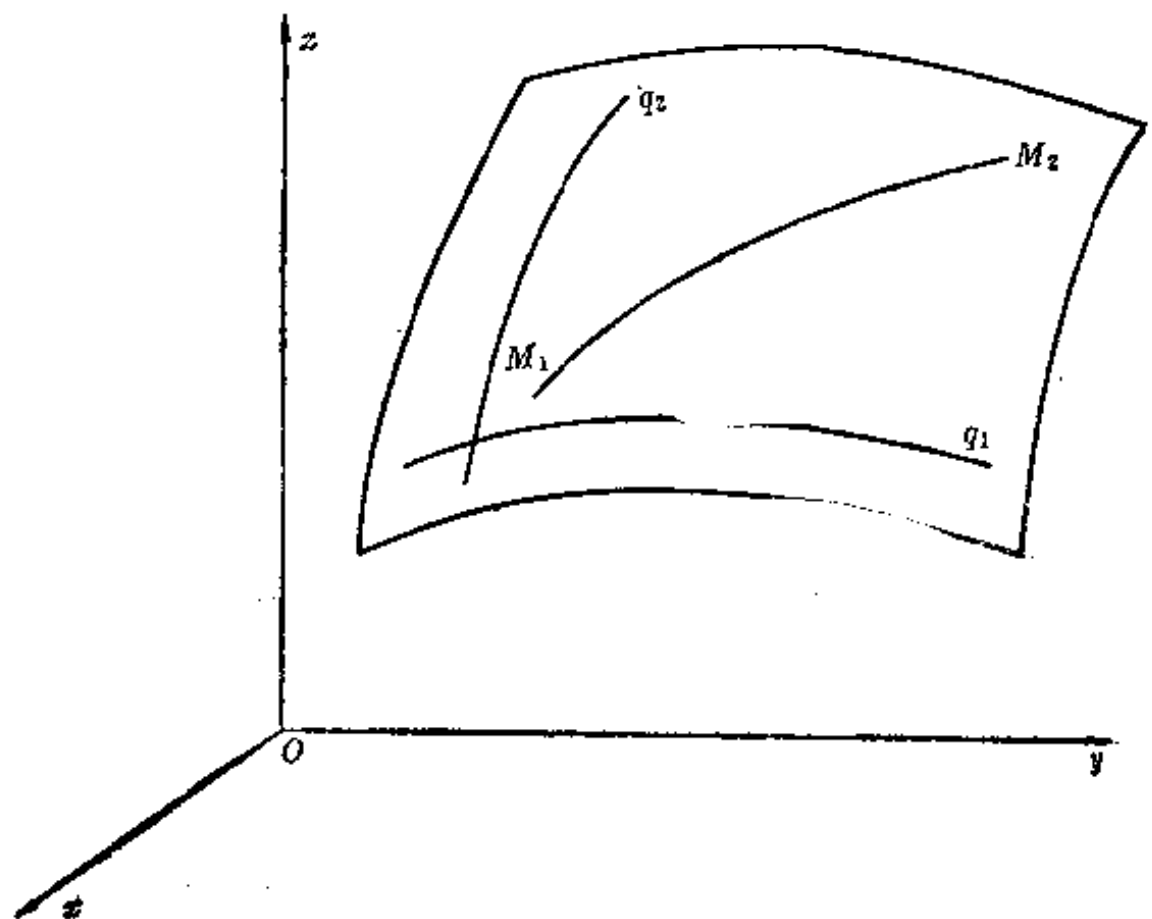


图 1.13

q_2 (见 1.2 节) 来描述质点在约束曲面上的位置时 (例如任取两个与 (1.4.1) 函数无关的函数 $g(x, y, z, t) = q_1$, $h(x, y, z, t) = q_2$), 它们与约束曲面 $f(x, y, z, t) = 0$ 的交线构成 $f = 0$ 表面上的坐标网。 q_1 , q_2 就是约束表面上的曲线坐标。质点在表面上的位置由坐标 q_1 , q_2 决定。也可以用平面上的两个垂直坐标表示 q_1 , q_2 。并称该平面为广义坐标位形平面, 简称 q 空间 (图 1.14)。三维的直角坐标位形空间与二维广义坐标位形空间有很大差别。在三维 x 空间, 质

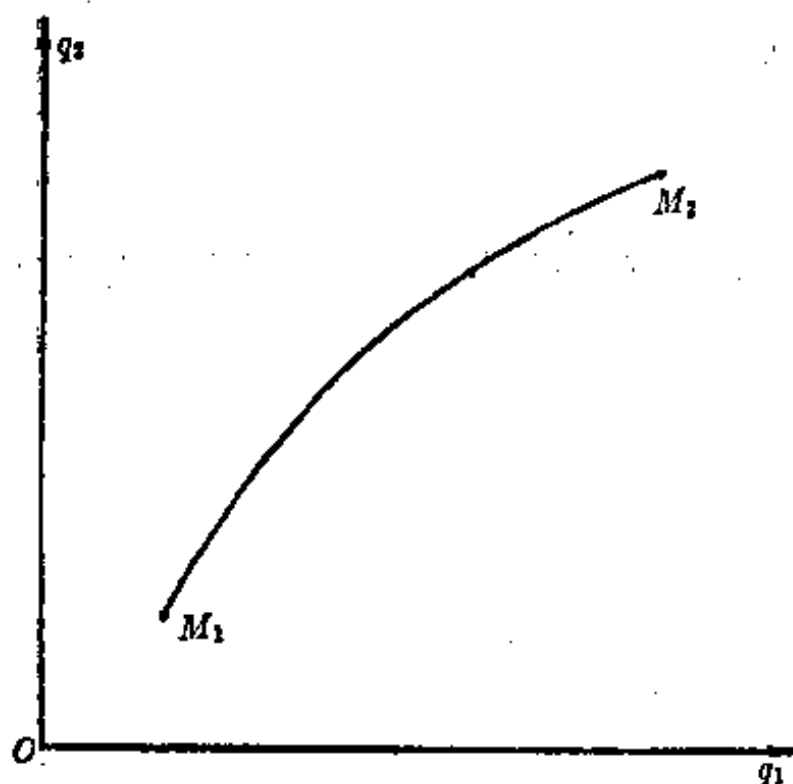


图 1.14

点的运动是受约束的。而在二维 q 空间, 代表点的运动是自由的, 任何一条连续曲线都代表系统一个可能运动。如果质点还受到一个非完整约束

$$a_1(q_1, q_2, t)\dot{q}_1 + a_2(q_1, q_2)\dot{q}_2 = 0 \quad (1.4.2)$$

的限制(这里 a_1 显含 t , 因而不可积)。这时代表点在 q_1, q_2 空间虽仍可占据任何位置(如 M_1, M_2), 但由 M_1 到达 M_2 的可能路径(符合约束(1.4.2)的路径)却不能任意给定, 在可能路径上, \dot{q}_1, \dot{q}_2 之间必须满足非完整约束方程(1.4.2), 即广义坐标位形空间中的任意连续曲线不一定是代表点的可能路径。

对于由 N 个质点组成的系统, 如果其位形受到一个完整约束

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{3N}; t) = 0 \quad (1.4.3)$$

的限制, 则可取 $3N-1$ 个广义坐标。因而系统的代表点在 $3N$ 维 x 空间里可以到达的区域是一个 $3N-1$ 维子空间。我们可以形象

的说, 完整约束(1.4.3)在 $3N$ 维 x 空间规定了一个 $3N-1$ 维超曲面(这曲面的形状和位置都随时间 t 改变), 代表点被限制在此曲面上运动。如果有 l 个完整约束, 则可以取 $3N-l$ 个广义坐标, 系统代表点的可达区域是 $3N-l$ 维的。若每一个完整约束规定一个超曲面, 则代表点被限制在这 l 个超曲面之交集上运动。这个交集是一个 $n(=3N-l)$ 维超曲面。广义坐标 q_1, q_2, \dots, q_n 是这个 n 维超曲面上的坐标线。若 q_1, q_2, \dots, q_n 为正交坐标, 建立 n 维广义坐标位形空间, 则在此 q 空间里, 代表点的运动是完全自由的, 其中任一条连续曲线都代表系统一个可能的运动。而在 $3N$ 维位形空间里, 只有在约束所规定的 n 维超曲面上的连续曲线才是系统的可能运动。在今后的讨论中, 由于常以广义坐标描述系统的位形, 因而也常将广义坐标位形空间简称为位形空间。

如果除完整约束外, 系统还受到非完整约束的限制, 那么和一个质点的情况一样, 代表点虽然可以到达 q 空间一定区域内的任何点, 但连结 q 空间两点的任意连续曲线却不一定是系统的可能运动轨线。因为沿 q 空间任意一条曲线运动时点的速度不一定满

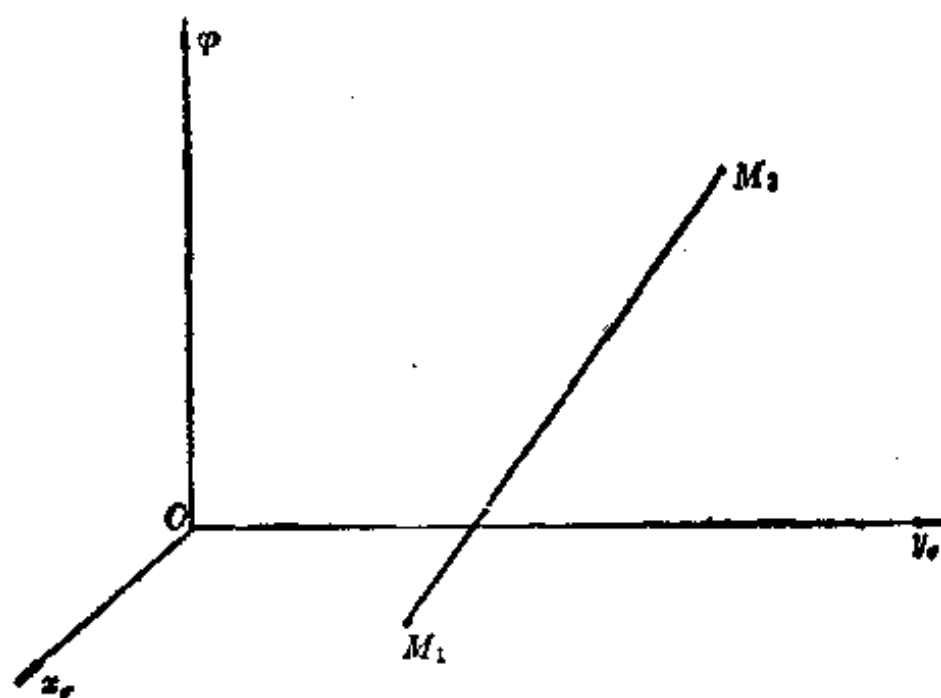


图 1.15

是非完整约束。例如,在冰刀的例子中(见例题1.1.4),取冰刀中点坐标 x_c, y_c 及冰刀与 x 轴夹角 φ 为广义坐标, q 空间是三维的。其中任意两点 $M_1(x_{c1}, y_{c1}, \varphi_1)$ 和 $M_2(x_{c2}, y_{c2}, \varphi_2)$ 都是冰刀可以实现的两个位形。但由于非完整约束 $\frac{\dot{y}_c}{\dot{x}_c} = \operatorname{tg} \varphi$ 的存在,只要 $\varphi_1 \neq \varphi_2$,代表点就不可能沿直线由 M_1 到达 M_2 。这是因为,按约束条件要求 $\left(\frac{dy_{c1}}{dx_{c1}}\right) = \operatorname{tg} \varphi_1$ 及 $\left(\frac{dy_{c2}}{dx_{c2}}\right) = \operatorname{tg} \varphi_2$,而 $M_1 M_2$ 直线上处处皆有 $\frac{dy_c}{dx_c} = \operatorname{const.}$ 而不随 φ 而变,不能满足约束条件。

1.4.2 状态空间

系统在任意时刻 t 的位形和各点的速度二者一起称为系统在 t 时刻的状态。当系统的运动微分方程确定之后,系统的运动完全为其初始状态所决定。但由于时间坐标的原点可以任意选取(即任意时刻 t 都可以作为初始状态),因而系统在任何时刻的状态都决定了系统过去和未来的全部运动。

决定系统 t 时刻的状态需要 $6N$ 个量: $x_1, x_2, \dots, x_{3N}; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{3N}$ 。和位形空间一样,我们将 $6N$ 个状态变量组成的 $6N$ 维空间称为系统的状态空间。状态空间的点称为状态点。系统在时刻 t 的状态 $(x_1, x_2, \dots, x_{3N}; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{3N})$ 与状态空间的一个点相对应;反之,状态空间的一个点也对应系统的一个状态。但由于约束的存在,状态空间中的每一点所对应的系统的状态不一定能实现。系统运动时,不断改变其位形和速度分布,状态点便在状态空间描出一条曲线,称为状态轨迹。对于非自由系统,其状态常用广义坐标 q_1, q_2, \dots, q_n 和广义速度 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ 描述。以 $q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ 为坐标的 $2n$ 维空间,也称为状态空间。系统的状态与此空间的点相对应。系统的运动也可以由状态点在 $2n$

维状态空间的运动来表示。

位形空间，状态空间都是描述系统运动的工具。它们之间有如下差别：首先，通过位形空间的同一点可以有許多位形轨迹，即位形轨迹是可以相交的。这是因为系统的运动不仅决定于给定时刻的位形，还决定于此时每个质点的速度，在同一位置，质点可以有不同的速度。至于状态空间，在系统的动力学方程满足解的存在和唯一性条件下（实际上系统一般都满足），需按动力学方程是否显含时间 t 分为两种情况讨论。不显含时间 t 的，称为自治系统，显含时间 t 的，称为非自治系统。前者的状态轨迹既不自交，也不互交；后者则不然，例如 $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$ ，这是一个非自治系统。令 $\dot{x} = y$ ，则 $\dot{y} = \frac{1}{m}F(x, y, t)$ ，状态空间为 (x, y) 平面。由于 $F(x, y, t)$ 显含时间 t ，所以在不同的时刻 t_1, t_2 ，通过 (x_0, y_0) 的状态轨迹的方向分别为

$$y'(t_1) = \left. \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right|_{t=t_1} = \frac{F(x_0, y_0, t_1)}{y_0},$$

$$y'(t_2) = \frac{F(x_0, y_0, t_2)}{y_0}$$

两者是不相同的（图 1.16）。这表明状态轨迹可能相交，也可能自交。但在 F 不显含时间 t 时，由于改变时间的零点不影响动力学方程的形式，所以轨迹曲线通过任一给定点时的方向是一定的，不随通过时间的不同而改变。因此状态轨迹不会自交，也不会互交。其二，对于完整系统，广义坐标位形空间里任一条连续曲线都是系统的一个可能的运动。但在状态空间，随意给定一条曲线，系统能否实现该运动，还要看沿给定曲线的坐标 (q, \dot{q}) 是否符合 $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ 的关系。例如，在系统的状态平面 (q, \dot{q}) 上，上半平面相轨迹的走向都是从左至右的（因为 $\dot{q} > 0$ ），如曲线 $\widehat{M_1 M_2}$ 。而曲线 $\widehat{M_3 M_4}$ 则是

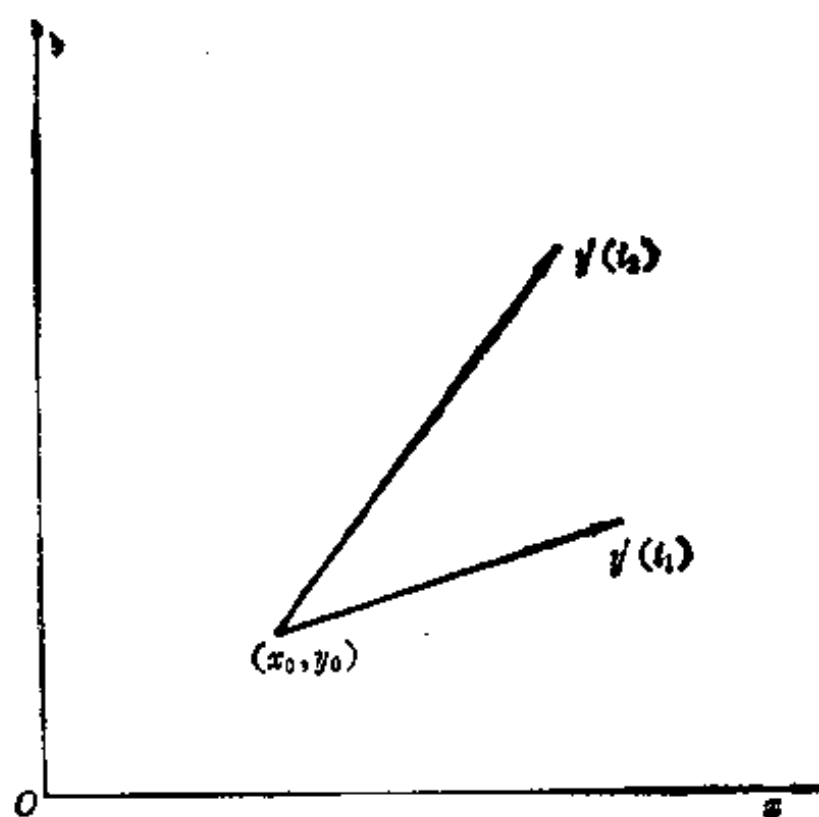


图 1.16

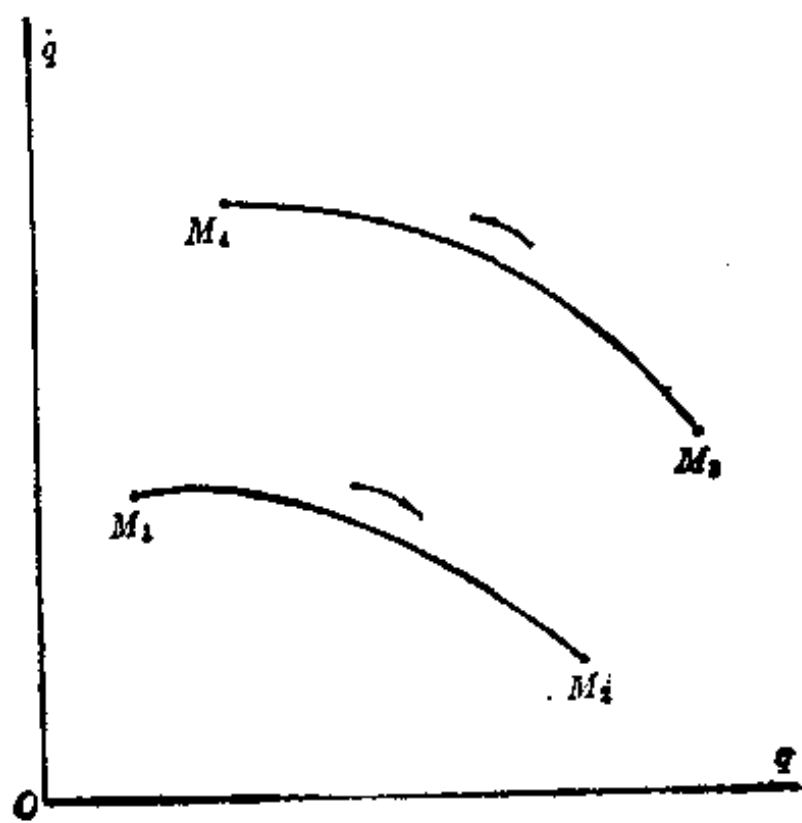


图 1.17

系统不可能实现的运动,因为在此曲线上 $\frac{dq}{dt} < 0$, 而曲线的坐标 q 却大于零(图 1.17)。

1.5 可能位移、实位移、虚位移

1.5.1 可能位移

设在由 N 个质点组成的系统上作用 l 个完整约束(1.1.2)和 g 个一阶线性非完整约束(1.1.3)。将这些约束统一写成微分形式(见(1.1.3)', (1.1.5)式):

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{rs} dx_s + A_r dt = 0 \quad (r=1, 2, \dots, l+g) \quad (1.5.1)$$

或

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{rs} \dot{x}_s + A_r = 0 \quad (r=1, 2, \dots, l+g) \quad (1.5.1)'$$

则对给定的 t 和 x , 满足方程(1.5.1)的无限小位移 $dx_1, dx_2, \dots, dx_{3N}$ 称为系统在时刻 t 由位形 x 出发, 在 dt 时间内的可能位移。也就是说, 可能位移是约束所容许的无限小位移, 也是系统有可能实现的位移。与此类似, 我们将满足约束方程(1.5.1)'的速度 $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{3N}$ 称为系统的可能速度。由于方程(1.5.1)的个数 $(l+g)$ 一般小于 $3N$, 因而作为决定 $3N$ 个 dx_i 的方程(1.5.1), 其解不是唯一的。如果将可能位移 $dx_1, dx_2, \dots, dx_{3N}$ 看作 $3N$ 维向量, 并为简单起见, 记作 $d\mathbf{x}$, 即

$$d\mathbf{x} = [dx_1, dx_2, \dots, dx_{3N}]^T \quad (1.5.2)$$

则由线性代数理论可知, 全部可能位移向量的集合构成 $3N$ 维向量空间中的一个 m 维子空间, $m=3N-(l+g)$ 。

同样, 将满足约束方程的运动 $x_s(t)$ ($s=1, 2, \dots, 3N$)称为系

统的可能运动, 记作 $\mathbf{x}(t)$, 即

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_{3N}(t)]^T \quad (1.5.3)$$

显然, 可能运动也不是唯一的。

1.5.2 实位移

既满足约束方程, 又满足动力学方程和初始条件的运动才是系统实际发生的运动, 称为真运动。真运动只是可能运动集合中的一个。在真运动中, 由时刻 t 经无限小时间间隔 dt 所发生的无限小位移称为时刻 t 的实位移。显然, 实位移也是可能位移集合中的一个。

1.5.3 虚位移

虚位移是分析力学中一个基本概念, 它对分析力学理论的建立具有举足轻重的地位。不同作者对它的定义有不同的表达方式。本书采用如下表述:

在时刻 t , 系统自同一位形出发, 经过同一无限小时间间隔 dt 所发生的任何两个可能位移 $d\mathbf{x}$ 和 $d\mathbf{x}'$ 之差称为系统在时刻 t 的虚位移, 记作 $\delta\mathbf{x}$, 即

$$\delta\mathbf{x} = d\mathbf{x}' - d\mathbf{x} \quad (1.5.4)$$

式中

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x} &= [\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{3N}]^T \\ \delta x_s &= dx'_s - dx_s \quad (s=1, 2, \dots, 3N) \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

值得注意的是, 由(1.5.5)式所定义的无穷小量 δx_s 与函数 $x_s(t)$ 由于 t 的无限小变化而产生的无穷小增量不同, 它随 $x_s(t), x'_s(t)$ 的选取而有任意性, 所以将它记作 δx_s 。下面我们将看到它就是 $x_s(t)$ 的等时变分, 因而采用变分符号。由于 $d\mathbf{x}'$ 和 $d\mathbf{x}$ 都是可能位移, 因而都满足约束方程(1.5.1), 即

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^{3N} A_{rs}(x, t) dx_s + A_r(x, t) dt &= 0 \\ \sum_{s=1}^{3N} A_{rs}(x, t) dx'_s + A_r(x, t) dt &= 0 \end{aligned} \right\} (r=1, 2, \dots, l+g)$$

将上两式相减并考虑到两组可能位移 dx , dx' 是由同一时刻、同一位形出发、经由同一时间间隔 dt 所发生的, 即 A_{rs} , A_r 在两式中是相同的, 于是得:

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{rs}(dx'_s - dx_s) = 0$$

即

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{rs} \delta x_s = 0 \quad (r=1, 2, \dots, l+g) \quad (1.5.6)$$

这是虚位移 δx 所应满足的方程。和可能位移一样, 全体虚位移 δx 的集合也构成 $3N$ 维向量空间里的一个 m 维子空间 ($m=3N-l-g$)。

对完整约束和线性非完整约束而言, 比较(1.5.6)式和(1.5.1)式, 可以看出, 两者的差别仅在于(1.5.6)式没有 $A_r dt$ 这一项。因此也可以形象地说, 虚位移就是约束被“冻结”时的可能位移。所谓“冻结”是对时间 t 而言的, 即令约束方程中的时间 t 不变。因为虚位移是在 t 不变时系统位形 $x(t)$ 的无限小变化, 因而称之为函数 $x(t)$ 的等时变分。

如果约束是定常的, 则由(1.1.6)、(1.1.7)式可知, 虚位移与可能位移一致。如果约束是非定常的但是有序的, 则由(1.1.18)式可知, 虚位移也就是可能位移。

例题 1.5.1 点沿固定曲面运动。

设曲面方程为 $f(x, y, z)=0$, 则可能位移应满足的约束方程为

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0 \quad (a)$$

即可能位移 $d\mathbf{r}$ 与曲面在 P 点处的法线垂直, 它位于过 P 点的切平面内。二切线向量之差 $\delta\mathbf{r} = d\mathbf{r}' - d\mathbf{r}$ 也仍是与曲面在同一点 P 相切的向量。因此, 由 P 点所作的位于切平面的任何向量, 既可以看成是某一个可能位移 $d\mathbf{r}$, 也可以看作是某一个虚位移 $\delta\mathbf{r}$ 。因为约束是定常的, 所以虚位移与可能位移是一致的。

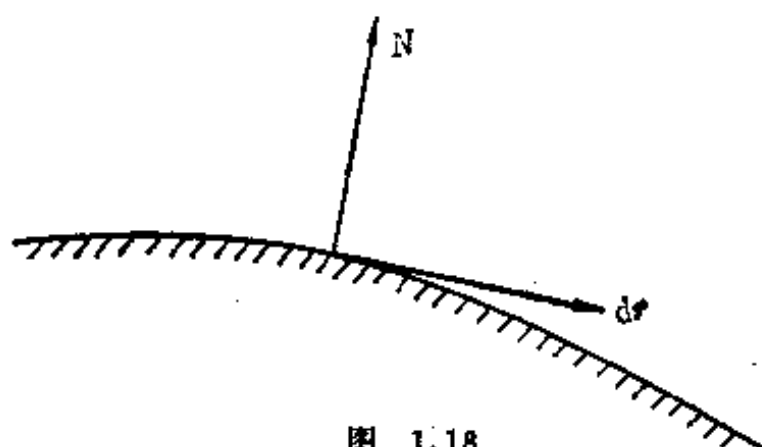


图 1.18

当约束曲面 s 以速度 \mathbf{u} 运动时, (图 1.19), 可能位移 $d\mathbf{r}$ 由与曲面相切的向量 \mathbf{b} 和曲面自身运动的位移 $\mathbf{u}dt$ 之和得出:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{b} + \mathbf{u}dt \quad (a)$$

另一个可能位移 $d\mathbf{r}'$ 则是过 P 点的另一切向量 \mathbf{b}' 与 $\mathbf{u}dt$ 之和:

$$d\mathbf{r}' = \mathbf{b}' + \mathbf{u}dt \quad (b)$$

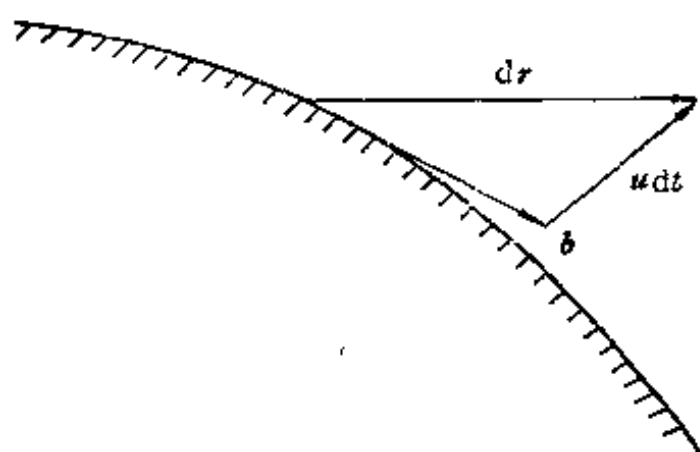


图 1.19

而虚位移

$$\delta \mathbf{r} = d\mathbf{r}' - d\mathbf{r} = \mathbf{b}' - \mathbf{b} \quad (c)$$

它仍是曲面过 P 点的切平面上的向量, 与 $d\mathbf{r}$ 不同。向量 $\delta \mathbf{r}$ 是当曲面 s 不动(“冻结”)时的可能位移。

若取广义坐标 q 描述系统的位形, 则完整约束就可以不再考虑了。此时可能位移由广义坐标微分决定, 即

$$d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} dt \quad (1.5.7)$$

在给定时刻, 自给定位形出发的可能位移, 由 $(dq_1, dq_2, \dots, dq_n)$ 完全决定。当有线性非完整约束时, 这些广义坐标的微分 dq 又须满足约束方程(1.2.13)

$$\sum_{j=1}^n a_{r,j} dq_j + a_r dt = 0$$

我们将满足上式的向量 $d\mathbf{q} = [dq_1, dq_2, \dots, dq_n]^T$ 称为 q 空间的可能位移, 在不致误解的地方, 也简称为可能位移。在(1.5.4)式中, 由于

$$d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} dt$$

$$d\mathbf{x}' = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} dq'_j + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} dt$$

所以

$$\delta \mathbf{x} = d\mathbf{x}' - d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} (dq'_j - dq_j) \quad (1.5.8)$$

和(1.5.5)式一样, 这里 $(dq'_j - dq_j)$ 也是一个有一定任意性的无穷小量。

对(1.2.7)式两端作等时变分, 得:

$$\delta x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x}{\partial q_j} \delta q_j \quad (1.5.8)'$$

与(1.5.8)式比较可知, $(dx' - dx)$ 和 $(dq'_j - dq_j)$ 就是 x 和 q_j 的等时变分, 因而可以记作 δx 和 δq_j 。相仿地称 $\delta q = [\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n]^T$ 为 q 空间的虚位移, 也简称其为虚位移。将(1.5.8)'式代入(1.5.6)式, 并考虑到(1.2.12)式, 便得到这些变分 $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ 所应满足的方程:

$$\sum_{j=1}^n a_{rj} \delta q_j = 0 \quad (r=1, 2, \dots, g) \quad (1.5.9)$$

它也可以按 δq 的定义由约束方程(1.2.13)得到。

对于一阶非线性非完整约束

$$f_k(x, \dot{x}, t) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, d) \quad (1.1.14)$$

而言, 由于可能位移 $dx = \dot{x}dt$, \dot{x} 是满足非完整约束的可能速度, 而非线性非完整约束只是对速度的限制, 因此如果 \dot{x}' 和 \dot{x} 是在同一时刻 t 由同一位形 x 出发的两个无限接近的可能速度, 便可以令 $\dot{x}' = \dot{x} + \delta \dot{x}$, 则有 $f_k(x, \dot{x} + \delta \dot{x}, t) = f_k(x, \dot{x}, t) + \sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_s} \delta \dot{x}_s$,

$\dots = 0 (k=1, 2, \dots, d)$ 。略去高阶项则有:

$$\sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_s} \delta \dot{x}_s = 0 \quad (k=1, 2, \dots, d) \quad (1.5.10)$$

由于虚位移 $\delta x = \dot{x}'dt - \dot{x}dt = \delta \dot{x}dt$, 因而上式又可写成

$$\sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_s} \delta x = 0 \quad (k=1, 2, \dots, d) \quad (1.5.11)$$

这就是非线性非完整约束(1.1.14)加在虚位移 δx 上的限制。这个限制最初是 H. Г. Четаев 于 1932 年以“假设”的形式提出来

的*, 目的在于将动力学普遍方程用于一阶非线性非完整系统。本书采用的虚位移定义使这个“假设”成为逻辑结果。但是对一个具体问题来说, 这个虚位移方程(1.5.11)是否实用, 也就是由此而产生的理想约束条件(见1.6节)是否实用, 则和其它约束情况一样, 都需要具体分析, 要以实践为标准检验其正确性。

1.5.4 以准坐标变分表示虚位移

在1.3节已指出, 准速度由以下广义速度的线性表达式所定义:

$$\pi_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j + a_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1.3.2)$$

其中 a_{kj}, a_k 是 q, t 的函数, 而且 $\det[a_{kj}] \neq 0$ 。所以在给定的位形和时刻, 广义速度与准速度相互一对一地决定。若记

$$\delta \pi_k \triangleq \pi'_k dt - \pi_k dt \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

其中 π_k, π'_k ($k=1, 2, \dots, n$) 是同一 (q, t) 上的准速度, 即

$$\left. \begin{aligned} \pi_k &= \sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j + a_k \\ \pi'_k &= \sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}'_j + a_k \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

而 \dot{q}_j, \dot{q}'_j ($j=1, 2, \dots, n$) 是系统在时刻 t 及位形 q 上的两组不同的广义速度。因而

$$\delta \pi_k \triangleq \sum_{j=1}^n a_{kj} \delta q_j \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1.5.12)$$

式中 $\delta q = (\dot{q}' - \dot{q}) dt$ 。这里, 由于准坐标 π_k 一般无定义, $\delta \pi_k$ 并不表示某个函数的变分, 只是一个记号, 表示由(1.5.12)式确定的

* 见参考文献[46]。

一个小量，但由于它和坐标的相似性，仍形式地称其为准坐标的变分。因为已设 $\det[a_{kj}] \neq 0$ ，故由 (1.5.12) 式可将 $\delta q_j (j=1, 2, \dots, n)$ 解出(见(1.3.4)式)：

$$\delta q_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} \delta \pi_k \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.5.13)$$

将(1.5.13)式代入(1.5.8)'式并利用定义(1.3.10)，便得虚位移与准坐标变分的关系：

$$\delta x_s = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_s}{\partial \pi_k} \delta \pi_k \quad (s=1, 2, \dots, 3N) \quad (1.5.14)$$

或

$$\delta r_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial \pi_k} \delta \pi_k \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (1.5.15)$$

1.5.5 自由度

在理论力学中，人们通常把确定完整系统位形的坐标数减去约束方程数称为系统的自由度。这个定义如推广到非完整系统，需作以下区分：如果采用 $3N$ 个直角坐标，那么约束方程就要包括完整约束和非完整约束；如采用独立的广义坐标，则只需减去非完整约束数。若 m 表示自由度， l 表示完整约束数， g 表示非完整约束数，则 $m = 3N - (l + g) = n - g$ ，而 $n = 3N - l$ 是广义坐标数。对于完整系统， n 个广义坐标 q_j 是互相独立的，它们的变分 δq_j 也是互相独立的；对于非完整系统，广义坐标 q_j 仍保持独立，但它们的变分并非互相独立，而受到 g 个约束方程的限制：

$$\sum_{j=1}^n a_{sj} \delta q_j = 0 \quad (s=1, 2, \dots, g) \quad (1.5.16)$$

独立的广义坐标变分数等于 $n - g$ 。基于以上的分析，对任意系统的

自由度给出如下定义：系统的自由度等于独立的坐标变分的个数。只有在完整系统，自由度数才等于广义坐标的个数。

1.6 理想约束

1.6.1 约束力

众所周知，约束对被约束物体的作用称为约束力。一般说来，约束总是对被约束物体有力的作用。以质点系为例，如不考虑约束力，质点 P_i 在主动力 F_i 作用下将产生加速度 $\ddot{r}_i = \frac{F_i}{m_i}$ ($i=1, 2, \dots, N$)。但这样的加速度却不一定满足约束对系统各点加速度的限制：

$$\sum_{i=1}^{3N} (A_{rs} \ddot{x}_s + \dot{A}_{rs} \dot{x}_s) + \dot{A}_r = 0 \quad (r=1, 2, \dots, l+g) \quad (1.6.1)$$

这个限制是由约束方程(1.5.1)对时间求导而得到的。

对于由具体结构实现的约束，约束力的机理要作具体分析。如质点被限制在某物体表面上，其约束力由此物体直接接触而产生；如约束是对系统运动预先提出的要求，例如 1.1 节导弹追击目标问题中对导弹速度方向的限制，那么，约束力实际上就是控制系统作用给控制对象的力。

非自由系统动力学的基本问题之一是：已知主动力 $F_s(x, \dot{x}, t)$ 和系统各质点的一组为约束所容许的初始位置 x_{s0} 和初始速度 \dot{x}_{s0} ($s=1, 2, \dots, 3N$)，求系统的运动和约束力，即所谓正问题。

在正问题中，需要确定的未知量是 $3N$ 个 x_s 和 $3N$ 个约束力 R_s 。但是现在只有 $3N$ 个动力学方程

$$m_s \ddot{x}_s = F_s + R_s \quad (s=1, 2, \dots, 3N) \quad (1.6.2)$$

和 $l+g$ 个约束方程(1.5.1)。而一般总是 $l+g < 3N$ ，因此，如果对约束力的情况一无所知，那么前述正问题就不可能完全确定。为

了使问题得到完全确定的解, 必须再补充 $n=3N-(l+g)$ 个独立的关系式。这可以从约束的力学性质得到。为此先考查以下几个常见约束, 以及由其约束力的虚功所体现的约束的力学特征。

1.6.2 几种常见约束及其约束力的虚功

我们将作用在质点 P_i 上的力 F_i 在其虚位移 δr_i 上所作的功称为 F_i 的虚功, 记作 $\delta' W_i$, 即

$$\delta' W_i = F_i \cdot \delta r_i \quad (1.6.3)$$

虚功是个无限小标量。一般说来, “ δ' ”并不表示变分, 因为上式右端是个微分三项式, 一般不一定是全变分。

一、质点沿光滑曲面运动

因为光滑曲面的约束力 R 在曲面的法线方向, 而质点在曲面上运动时, 不论约束曲面是固定的还是运动或变形的, 虚位移 δr 都在曲面的切平面上。因此, 约束力的虚功为零。即

$$R \cdot \delta r = 0$$

二、光滑铰链约束

设铰链由光滑柱面或球面运动副构成, 因而约束力通过铰链

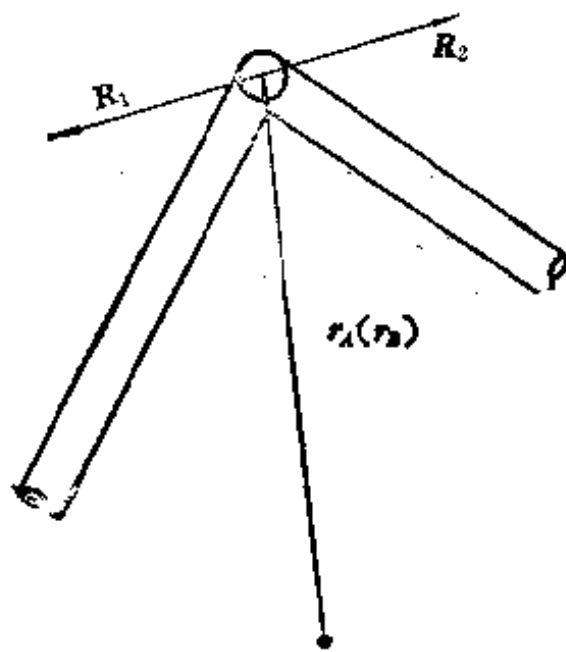


图 1.20

中心。对于固定铰，因为没有可能位移，虚位移为零。对于运动铰，设销钉作用在铰所联结的两个物体 A 、 B 上的约束力分别为 \mathbf{R}_1 、 \mathbf{R}_2 (图 1.20)，销钉质量略去不计，则 $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 0$ ，因而铰链约束力的虚功

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_A + \mathbf{R}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_B = (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) \cdot \delta \mathbf{r}_A = 0$$

三、刚性约束

设有质点 P_1 及 P_2 ，与质量可以不计而且不变形的刚性杆相联结。设质点加在杆上的力分别为 \mathbf{N}_1 和 \mathbf{N}_2 (图 1.21)。由于杆的质量不计，故有

$$\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 = 0$$

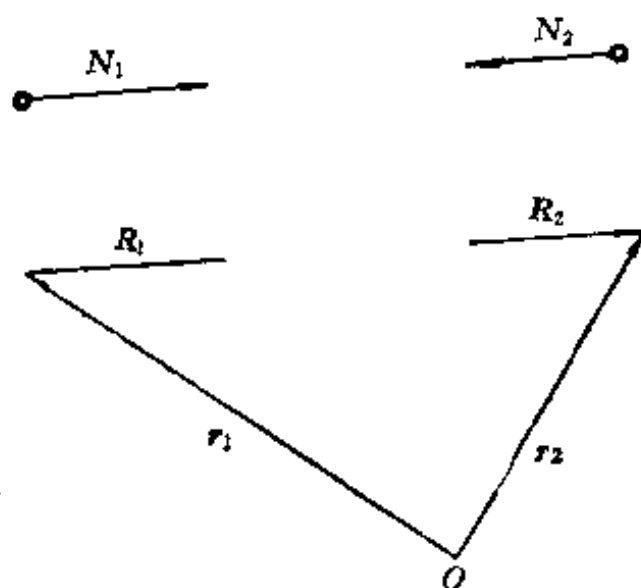


图 1.21

且由对质心的动量矩定理知， \mathbf{N}_1 、 \mathbf{N}_2 对杆上任一点之主矩为零，即 \mathbf{N}_1 、 \mathbf{N}_2 沿杆子方向作用，大小相等，方向相反。根据作用反作用定律，杆子对质点的约束力 \mathbf{R}_1 、 \mathbf{R}_2 分别与 \mathbf{N}_1 、 \mathbf{N}_2 大小相等、方向相反，即 $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 0$ 。设 P_1 、 P_2 的矢径分别为 \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 ，则 $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{R}_1 = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ (λ 是比例系数)。约束力的虚功

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\delta \mathbf{r}_2 - \delta \mathbf{r}_1) = \lambda \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = 0$$

这是因为 $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = l^2$ (l 是杆长) 是不会改变的。即刚性轻杆的

约束力的虚功之和为零。不可伸长的软绳也属于这种情况。

刚体可以看成是任何两个质点都由刚性轻杆联结而成的质点系，所以其间的约束力的虚功之和必为零。以后在计算约束力的虚功时，不必再考虑刚体内力之虚功。

四、两个刚体在运动中以其光滑表面相接触

因为接触面是光滑的，所以约束力沿公法线方向，而且

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 0$$

设接触点 P 、 Q 的矢径为 \mathbf{r}_P 、 \mathbf{r}_Q (图 1.22)，则其可能位移 $d\mathbf{r}_P$ 、 $d\mathbf{r}_Q$ 在公法线上之投影必须相等 (不会相互嵌入)。因此 $d\mathbf{r}_P - d\mathbf{r}_Q$ 与约束力垂直，约束力的虚功

$$\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r}_P + \mathbf{R}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_Q = \mathbf{R}_1 (\delta \mathbf{r}'_P - \delta \mathbf{r}_P) + \mathbf{R}_2 \cdot (\delta \mathbf{r}'_Q - \delta \mathbf{r}_Q)$$

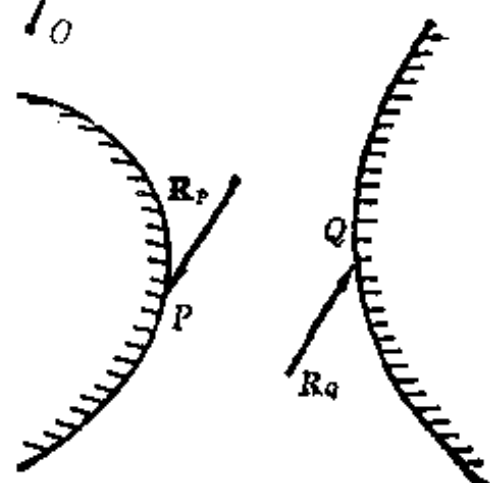
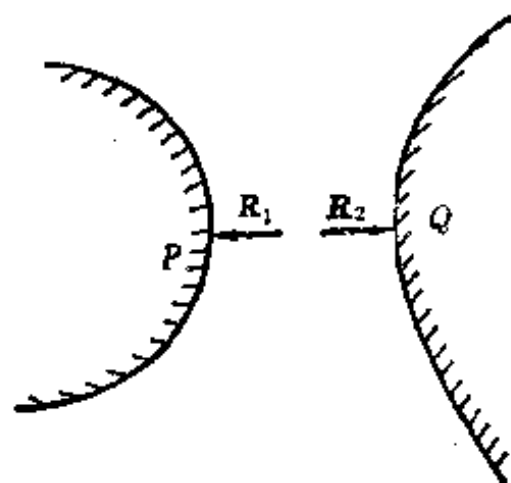
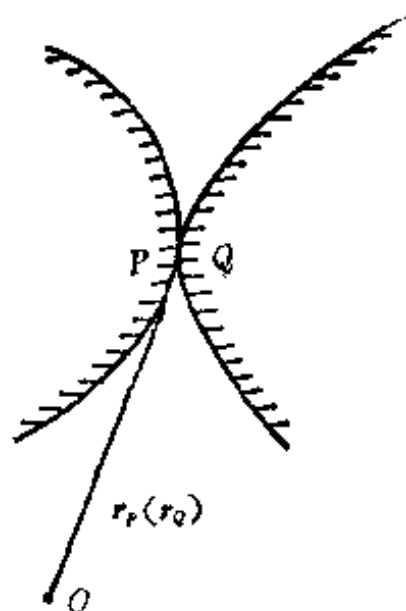
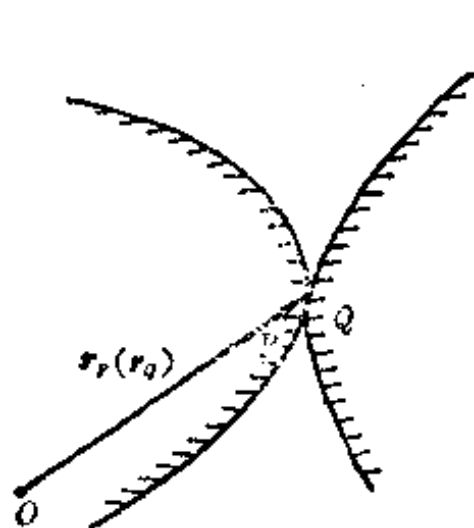


图 1.22

图 1.23

$$\begin{aligned}
&= R_1 \cdot (dr'_P - dr'_Q) - R_1 (dr_P - dr_Q) \\
&= 0
\end{aligned}$$

五、两刚体在运动中以其完全粗糙表面相接触(纯滚动)

接触面完全粗糙是指它们不能产生相对滑动,即接触点速度 v_P, v_Q 相等。因而约束力的虚功之和

$$\begin{aligned}
R_P \cdot \delta r_P + R_Q \cdot \delta r_Q &= R_P \cdot (\delta r_P - \delta r_Q) \\
&= R_P \cdot [(dr'_P - dr_P) - (dr'_Q - dr_Q)] \\
&= R_P \cdot [(v'_P - v'_Q) - (v_P - v_Q)] dt = 0
\end{aligned}$$

1.6.3 理想约束

以上的例子表明,工程实际中的许多约束经理想化之后(如绝对光滑、完全粗糙、不变形、不可伸长等等),其约束力的虚功之和都等于零。我们称这类约束为理想约束。推而广之,我们将满足如下条件的一切约束都称为理想约束:

作用在系统上的约束力在系统的任何虚位移上所作的虚功之和均为零,即

$$\sum_{i=1}^N R_i \cdot \delta r_i = 0, \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^{3N} R_i \delta x_i = 0 \quad (1.6.4)$$

上式亦称为理想约束条件。

如前所述,在 $3N$ 个虚位移分量 δx_i 中,只有 $n(=3N - (l+g))$ 个是独立的。今设 $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_L$ 为其余 $L(=l+g)$ 个不独立的分量,并通过方程(1.5.6)以独立分量 $\delta x_{L+1}, \delta x_{L+2}, \dots, \delta x_{3N}$ 表示,代入理想约束条件(1.6.4),消去不独立的 $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_L$, 则(1.6.4)式中独立分量 $\delta x_{L+1}, \delta x_{L+2}, \dots, \delta x_{3N}$ 的系数必须为零。由此便得到 R_1, R_2, \dots, R_{3N} 之间的 n 个关系式,这便是我们所需要的补充关系式。这 n 个关系式,加上 $3N$ 个牛顿方程(1.6.2)及 $(l+g)$ 个约束方程(1.5.1),共 $6N$ 个方程,便可以决定 $6N$ 个

未知量 x_1, x_2, \dots, x_{3N} ; R_1, R_2, \dots, R_{3N} 。所以有了理想约束条件或理想约束假定, 非自由系统动力学问题便一定可以求解。

在理论分析和具体应用中, 并不一定要按上述方法去找 n 个补充方程。例如, 也可以采用如下办法, 有时更简单。将虚位移方程 (1.5.6) 及 (1.5.11) 统一写成

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{rs} \delta x_s = 0 \quad (r=1, 2, \dots, L=l+g+d) \quad (1.6.5)$$

其中前 l 个是完整约束, 且 $A_{rs} = \frac{\partial f_r}{\partial x_s}$ ($r=1, 2, \dots, l$), 中间 g 个是一阶线性非完整约束, 后 d 个是一阶非线性非完整约束, 其中 $A_{rs} = \frac{\partial f_r}{\partial x_s}$ ($r=l+g+1, l+g+2, \dots, L$)。将 (1.6.5) 式分别乘以待定乘子 λ_r 然后求和, 再与 (1.6.4) 式相减, 得

$$\sum_{s=1}^{3N} \left(R_s - \sum_{r=1}^L \lambda_r A_{rs} \right) \delta x_s = 0 \quad (1.6.6)$$

对于不独立的虚位移分量 $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_L$, 可以通过选择 λ_r ($r=1, 2, \dots, L$) 使其系数为零 (因为 L 个约束方程是独立的, 即 $[A_{rs}]_{r,s=1}^L$ 的秩为 L , 这样的一组 λ_r 是确定的), 余下独立的虚位移分量的系数必须全为零。于是便有

$$R_s = \sum_{r=1}^L \lambda_r A_{rs} \quad (s=1, 2, \dots, 3N) \quad (1.6.7)$$

这样就将 $3N$ 个未知量 R 通过约束方程以 L 个未知量 λ 表示出来。这个方法称为 Lagrange 乘子法, 今后还要多次用到。显然, 如果约束力 R_s ($s=1, 2, \dots, 3N$) 取 (1.6.7) 的形式, 则有

$$\sum_{s=1}^{3N} R_s \delta x_s = \sum_{s=1}^{3N} \sum_{r=1}^L \lambda_r A_{rs} \delta x_s$$

$$= \sum_{r=1}^L \lambda_r \sum_{s=1}^{3N} A_{rs} \delta x_s = 0$$

可看成是理想约束条件的另一种表达形式。

在一般工程问题中,实际约束并不都符合理想条件。例如,两物体接触面不是绝对光滑的,也不是完全粗糙的。因此接触面之间可能有相对滑动,而且在滑动方向出现摩擦力。对于这样的实际约束,如果摩擦力不大,而且不是重要因素,那么就可以忽略不计,而将约束看成是理想的;如果摩擦力无论其数值如何都是一个重要因素而不能忽略时,则可将摩擦力看作是主动力,使理想约束条件仍能成立。摩擦力的出现使未知量增多,所缺之方程,可由摩擦定律来补充。

总之,理想约束条件既不是凭空产生的,也不是完全符合实际的。它是分析力学中一个有实际背景的假定,有很广的适用范围。在本书中,如无特别声明,总认为加在系统上的约束都是理想的。

1.6.4 第一类 Lagrange 方程

在 1.6.3 中,通过理想约束条件将约束力用待定乘子表示了出来(见(1.6.6)式)。现将虚位移方程(1.5.6)式分开写出:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_s}{\partial x_i} \delta x_i &= 0 & (s=1, 2, \dots, l) \\ \sum_{i=1}^{3N} A_{ri} \delta x_i &= 0 & (r=1, 2, \dots, g) \end{aligned} \right\} \quad (1.5.6)$$

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad (k=1, 2, \dots, d) \quad (1.5.11)$$

则约束力的表达式(1.6.7)变成

$$R_i = \sum_{s=1}^l \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^g \gamma_r A_{ri} + \sum_{k=1}^d \mu_k \frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_i} \quad (i=1, 2, \dots, 3N) \quad (1.6.8)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_g; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d$ 都是待定乘子。上式右端三个和式分别是完整约束、一阶线性非完整约束和一阶非线性非完整约束产生的约束力。将它们代入牛顿方程(1.6.2), 便有

$$m_i \ddot{x}_i = R_i + \sum_{s=1}^l \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^g \gamma_r A_{ri} + \sum_{k=1}^d \mu_k \frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_i} \quad (i=1, 2, \dots, 3N) \quad (1.6.9)$$

这就是第一类 Lagrange 方程。其中有 $3N$ 个未知函数 $x_i(t)$ 和 $(l+g+d)$ 个待定乘子 $\lambda(t), \gamma(t), \mu(t)$ 。 $3N$ 个第一类 Lagrange 方程和 $l+g+d$ 个约束方程构成求解这些未知函数的一个封闭方程组。当质点和约束方程都很多时, 这组方程的数目很大, 要进行积分是很困难的。因此第一类 Lagrange 方程实际很少被采用。

1.7 动能、主动力的虚功及势能

1.7.1 动能

系统的动能

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{3N} m_s \dot{x}_s^2 \quad (1.7.1)$$

是一个基本的动力学函数, 当以广义坐标描述系统的运动时, 动能也可用广义坐标、广义速度表示。将 \dot{x}_s 的表达式(1.2.10)代入上式, 得:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{3N} m_s \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_s}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_s}{\partial t} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_s}{\partial t} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n A_i \dot{q}_i + T_0 \quad (1.7.2)$$

其中

$$A_{ij} = \sum_{s=1}^{3N} m_s \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \frac{\partial x_s}{\partial q_j} \quad (1.7.3)$$

$$A_i = \sum_{s=1}^{3N} m_s \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \frac{\partial x_s}{\partial t} \quad (1.7.4)$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{3N} m_s \left(\frac{\partial x_s}{\partial t} \right)^2 \quad (1.7.5)$$

系数 A_{ij} , A_i , T_0 都是 t 和 q 的函数, 而且 $A_{ij} = A_{ji}$ 。 (1.7.2) 式表明, 系统的动能 T 是广义速度的二次函数, 一般说来是非齐次的。为了简明起见, 常将动能式写为

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \quad (1.7.6)$$

其中

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad T_1 = \sum_{i=1}^n A_i \dot{q}_i \quad (1.7.7)$$

T_2 , T_1 , T_0 分别表示广义速度的二次项, 一次项及零次项。

对于定常系统, 由于 $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$, 因而有 $T_1 = 0$, $T_0 = 0$ 。于是

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (1.7.8)$$

即定常系统的动能 T 是广义速度 \dot{q} 的二次型, 而且系数 A_{ij} 不显含时间。下面证明这个二次型是正定的。

由动能的定义, 有 $T \geq 0$, 而且只有 \dot{x} 全为零时才等于零。又因为系统是定常的, x 的广义坐标表达式不显含时间 t , 因而

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \dot{q}_n \\ \dot{x}_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial x_2}{\partial q_n} \dot{q}_n \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{3N} &= \frac{\partial x_{3N}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_{3N}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial x_{3N}}{\partial q_n} \dot{q}_n \end{aligned} \right\} \quad (1.7.9)$$

上式右端的系数矩阵正是 (1.2.9) 式的 Jacobi 矩阵。由于函数 $x(q)$ [见 (1.2.9)] 的独立性, 其秩为 n 。因此, n 个列向量 $\left[\frac{\partial x_1}{\partial q_j}, \frac{\partial x_2}{\partial q_j}, \dots, \frac{\partial x_{3N}}{\partial q_j} \right]^T$ ($j=1, 2, \dots, n$) 是线性无关的。方程组 (1.

7.9) 表示向量 $[\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{3N}]^T$ 是 n 个线性无关向量 $\left[\frac{\partial x_1}{\partial q_j}, \frac{\partial x_2}{\partial q_j}, \dots, \frac{\partial x_{3N}}{\partial q_j} \right]^T$ ($j=1, 2, \dots, n$) 的线性组合。所以 $\dot{x}=0$, 与 $\dot{q}=0$ 相互对

应。由此可知, 当且仅当 $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \cdots = \dot{q}_n = 0$ 时才有 $T=0$, 即 (1.7.8) 是正定的。由正定二次型的性质, 可知其系数行列式不等于零: *

$$\det[A_{ij}]_{i,j=1}^n \neq 0 \quad (1.7.10)$$

而且各阶主子式都大于零:

$$A_{11} > 0, \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \dots\dots\dots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} > 0 \quad (1.7.11)$$

至于非定常系统, 动能虽不是广义速度 \dot{q} 的齐次二次函数 (见 (1.7.6) 式), 但是它的二次齐次项 T_2 仍是一个正定二次型。事实上, 如果在任意时刻 t_0 将系统的非定常约束

$$f_s(x_1, x_2, \dots, x_{3N}; t) = 0 \quad (s=1, 2, \dots, l)$$

* 蓝以中,《线性代数引论》, 北京大学出版社, 第 302 页, 1981 年

“冻结”，即将约束方程中的 t 代之以不变的 t_0 ：

$$f_s(x_1, x_2, \dots, x_{3N}; t_0) = 0 \quad (s=1, 2, \dots, l)$$

这样便得到一个“新”的定常系统。它的坐标 x 和广义坐标仍有与原系统同样的函数关系，只是需将参数 t 换成 t_0 ：

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t_0)$$

由于这个“新”系统是定常的，所以其动能表达式

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{s=1}^{3N} m_s \frac{\partial x_s(q, t_0)}{\partial q_i} \frac{\partial x_s(q, t_0)}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

仍是一个正定二次型。而且不论 t_0 取何值，这个结论都成立，因而上式就是原系统动能表达式的齐次二次式部分（见 (1.7.7) 第一式及 (1.7.3) 式），有关 T_2 的正定性这一性质今后还会用到。

下面给出用准速度表示的动能表达式。由 1.3 节给出的准速度表达式

$$\pi_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1.3.2)'$$

解出 \dot{q} （为简单计，这里只考虑上式右端为 \dot{q} 的齐次式情况，非齐次情况可作相似的讨论）。

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} \pi_k \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.3.4)'$$

将上式代入 \dot{x} 的表达式 (1.2.10)，可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \sum_{k=1}^n b_{jk} \pi_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \pi_k} \pi_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (j=1, 2, \dots, 3N) \end{aligned} \quad (1.7.12)$$

其中 $\frac{\partial x}{\partial \pi_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x}{\partial q_j} b_{jk}$ （见 (1.3.10) 式）。代入 (1.7.1) 式，即得到以准

速度表示的动能:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n A_{kl}^* \pi_k \pi_l + \sum_{k=1}^n A_k^* \pi_k + T_0 \\ &= T_2' + T_1' + T_0 \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

其中

$$A_{kl}^* = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial \pi_k} \frac{\partial x_i}{\partial \pi_l} \quad (k, l = 1, 2, \dots, n) \quad (1.7.14)$$

$$A_k^* = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial \pi_k} \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (k, l = 1, 2, \dots, n) \quad (1.7.15)$$

$$T_2' = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n A_{kl}^* \pi_k \pi_l \quad (1.7.16)$$

$$T_1' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k^* \pi_k \quad (1.7.17)$$

即系统的动能也是准速度的二次函数,而且

$$\begin{aligned} A_{kl}^* &= \sum_{i=1}^n b_{ik} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{s=1}^{3N} m_s \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \frac{\partial x_s}{\partial q_j} \right) b_{jl} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ik} A_{ij} b_{jl} \end{aligned} \quad (1.7.18)$$

即

$$[A_{kl}^*] = \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b} \quad (1.7.18)'$$

其中

$$\mathbf{A} = [A_{ij}], \quad \mathbf{b} = [b_{ij}]$$

由于 $\det \mathbf{b} \neq 0$, 所以 $[A_{kl}^*]$ 也是正定矩阵, 即 T_2' 是关于 π 的正定二次型。显然, 无论 (1.3.2)' 式是否齐次, 都不影响 T_2' 的正定性。

如果系统有 g 个线性非完整约束:

$$\sum_{j=1}^n a_{rj} \dot{q}_j + a_r = 0 \quad (r=1, 2, \dots, g) \quad (1.2.11)$$

按如下方式选取准速度:

$$\left. \begin{aligned} \pi_k &= \sum_{j=1}^n h_{kj} \dot{q}_j + h_k \quad (k=1, 2, \dots, m, m=n-g) \\ \pi_{m+r} &= \sum_{j=1}^n a_{rj} \dot{q}_j + a_r \quad (r=1, 2, \dots, g) \end{aligned} \right\} \quad (1.7.19)$$

则有 $\pi_{m+r}=0, (r=1, 2, \dots, g)$ 。由(1.7.19)式解出 \dot{q} :

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^m b_{jk} \pi_k + e_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.7.20)$$

式中 $[b_{jk}]$ 是(1.7.19)的系数矩阵 $[[h_{kj}]^T : [a_{rj}]^T]^T$ 的逆矩阵; e_j 是相应的非齐次项。代入动能表达式(1.7.2), 得到

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^m A_{kl}^* \pi_k \pi_l + \sum_{k=1}^m A_k^* \pi_k + A_0^* \quad (1.7.21)$$

式中 A_{kl}^*, A_k^*, A_0^* 同前。它仍是准速度 π 的二次函数。前面已经证明 $[A_{kl}^*]_{k,l=1}^n$ 是正定的, 其一切主子式都大于零, 因而作为部分主子式的 $[A_{kl}^*]_{k,l=1}^m$ 也必然是正定的, 即

$$T_2'' = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^m A_{kl}^* \pi_k \pi_l \quad (1.7.22)$$

仍是正定二次型。

例题 1.7.1 刚体绕定点转动的动能

解 设刚体的瞬时角加速度为 ω , 则刚体上任一点 M_i 的速度为

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \quad (a)$$

若 M_i 点的质量为 m_i , 则刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

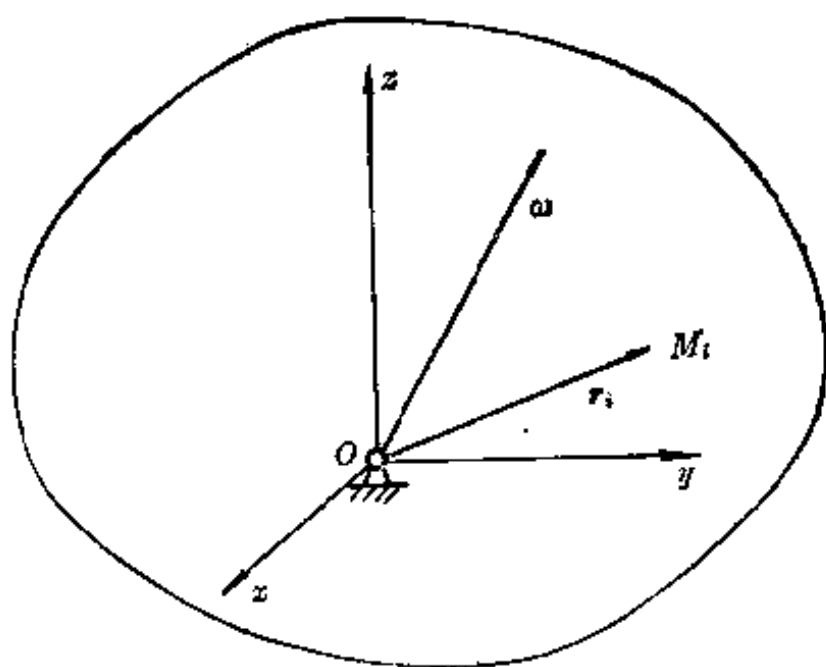


图 1.24

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \omega \cdot \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \\
 &= \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{L}_O
 \end{aligned} \tag{b}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_O &= \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i (\omega \times \mathbf{r}_i) \\
 &= \omega \sum_i m r_i^2 - \sum_i m_i \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \omega)
 \end{aligned} \tag{c}$$

是刚体对 O 点的动量矩。取与刚体固结的正交坐标系 $Ox'y'z'$ ，则

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{r}_i &= x'_i \mathbf{i}' + y'_i \mathbf{j}' + z'_i \mathbf{k}' \\
 \omega &= \omega_{x'} \mathbf{i}' + \omega_{y'} \mathbf{j}' + \omega_{z'} \mathbf{k}' \\
 \mathbf{L}_O &= L_{x'} \mathbf{i}' + L_{y'} \mathbf{j}' + L_{z'} \mathbf{k}'
 \end{aligned} \right\} \tag{d}$$

中其 $\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}$; $L_{x'}, L_{y'}, L_{z'}$ 分别是 ω, \mathbf{L}_O 在 $Ox'y'z'$ 坐标轴上的投影。由 (c) 式可得

$$\begin{aligned}
L_{x'} &= \omega_{x'} \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - \sum_i m_i x_i' (\omega_{x'} x_i' + \omega_{y'} y_i' + \omega_{z'} z_i') \\
&= \omega_{x'} \sum_i m_i (y_i'^2 + z_i'^2) - \omega_{y'} \sum_i m_i x_i' y_i' - \omega_{z'} \sum_i m_i x_i' z_i' \\
&= \omega_{x'} I_{x'} - \omega_{y'} I_{x'y'} - \omega_{z'} I_{x'z'} \quad (e)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_{x'} &= \sum_i m_i (y_i'^2 + z_i'^2) \\
I_{x'y'} &= \sum_i m_i x_i' y_i'; \quad I_{x'z'} = \sum_i m_i x_i' z_i' \quad (f)
\end{aligned}$$

$I_{x'}$ 是刚体对 x' 轴的转动惯量; $I_{x'y'}$, $I_{x'z'}$ 是刚体对 x' , y' 轴和 x' , z' 轴的惯性积。由于 $Ox'y'z'$ 轴固结在刚体上并与刚体一起转动, 所以这些量与刚体运动无关, 仅与刚体质量分布有关。它是决定刚体惯性特征的基本物理量。

同理可得:

$$L_{y'} = -\omega_{x'} I_{y'x'} + \omega_{y'} I_{y'} - \omega_{z'} I_{y'z'} \quad (g)$$

$$L_{z'} = -\omega_{x'} I_{z'x'} - \omega_{y'} I_{z'y'} + \omega_{z'} I_{z'} \quad (h)$$

$I_{y'x'} = I_{x'y'}$, $I_{y'z'} = I_{z'y'}$, $I_{z'x'} = I_{x'z'}$ 意义如前, 而 $I_{y'} = \sum_i m_i (x_i'^2 + z_i'^2)$, $I_{z'} = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2)$ 分别是刚体对 y' 轴和 z' 轴的转动惯量。

将 (d), (e), (g), (h) 式代入 (b) 式, 得

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} [I_{x'x'} \omega_{x'}^2 + I_{y'y'} \omega_{y'}^2 + I_{z'z'} \omega_{z'}^2] \\
&\quad - I_{x'y'} \omega_{x'} \omega_{y'} - I_{x'z'} \omega_{x'} \omega_{z'} - I_{y'z'} \omega_{y'} \omega_{z'} \quad (i)
\end{aligned}$$

若 $Ox'y'z'$ 是刚体的惯性主轴系, 则有 $I_{x'y'} = I_{y'z'} = I_{z'x'} = 0$,

于是动能

$$T = \frac{1}{2} [I_{x'x'} \omega_{x'}^2 + I_{y'y'} \omega_{y'}^2 + I_{z'z'} \omega_{z'}^2] \quad (j)$$

若取欧拉角 ψ, θ, φ 为广义坐标, 则有

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_{y'} &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

将(j)式代入(i)式, 得

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \{ & [(I_{x'x'} \sin^2 \varphi + I_{y'y'} \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + I_{z'z'} \cos^2 \theta] \dot{\psi}^2 \\ & + 2 \dot{\theta} \dot{\psi} (I_{x'x'} - I_{y'y'}) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ & + \dot{\theta}^2 (I_{x'x'} \cos^2 \varphi + I_{y'y'} \sin^2 \varphi) + I_{z'z'} \dot{\varphi}^2 \} \end{aligned} \quad (l)$$

这个表示式比较复杂。若引入准速度

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= \omega_{x'} = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \pi_2 &= \omega_{y'} = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \pi_3 &= \omega_{z'} = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

则动能 T 可以简单地表为

$$T = \frac{1}{2} [I_{x'} \pi_1^2 + I_{y'} \pi_2^2 + I_{z'} \pi_3^2] \quad (n)$$

1.7.2 主动力的虚功

设作用在质点 P_i 上的主动力为 F_i , 则 F_i 在 P_i 点的虚位移 δr_i 上作的虚功为 $F_i \cdot \delta r_i$, 整个系统上的主动力的虚功之和为

$$\delta' W_F = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i = \sum_{s=1}^{3N} X_s \delta x_s \quad (1.7.23)$$

以广义坐标 q 表示时, 则有

$$\delta' W_F = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (1.7.24)$$

式中

$$Q_j = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{s=1}^{3N} X_s \frac{\partial x_s}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.7.25)$$

称为与第 j 个广义坐标相对应的广义力。根据(1.7.24)式,也可以说,系统全部主动力的虚功之和等于广义力 Q_j 在相应虚位移 δq_j ($j=1, 2, \dots, n$) 上所作虚功之和。

以准坐标变分表示虚位移(见(1.5.15)式), 则主动力的虚功

$$\begin{aligned} \delta' W &= \sum_{i=1}^{3N} F_i \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \pi_k} \delta \pi_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \pi_k} \right) \delta \pi_k = \sum_{k=1}^n P_k \delta \pi_k \end{aligned} \quad (1.7.26)$$

其中

$$P_k = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \pi_k} \quad (1.7.27)$$

称为与准坐标 π_k 相应的广义力。它将用于准坐标形式的动力学方程。

例题 1.7.2 设在刚体上某点 O 建立方向固定的坐标系 $Oxyz$, 另外在 O 点又建立与刚体相固结的坐标系 $Ox'y'z'$ 。试求:

(1) 以 $Oxyz$ 及欧拉角描述运动时的广义力。(2) 以 $Ox'y'z'$ 及对 $Ox'y'z'$ 各轴之无限小转角描述运动时的广义力。

解 刚体内任一质点的虚位移由 O 点虚位移 $\delta \mathbf{r}_o$ 及无限小转动 $\boldsymbol{\theta}$ 表示如下:

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{r}_o + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}'_i \quad (a)$$

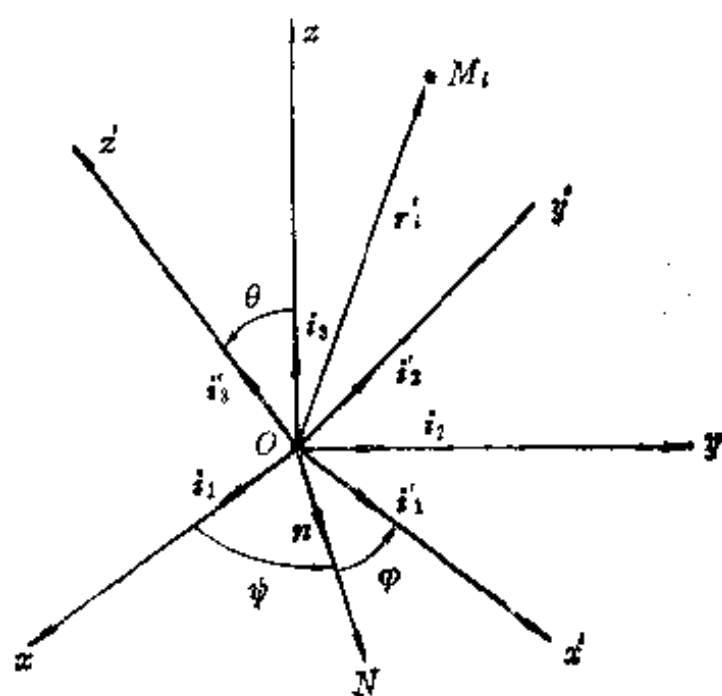


图 1.25

其中 r'_i 为该质点的矢径。因之,在主动力 F_1, F_2, \dots, F_N 作用下虚功为

$$\begin{aligned}
 \delta'W &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \\
 &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}'_i) \\
 &= \delta \mathbf{r}_0 \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i + \boldsymbol{\theta} \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i \quad (b)
 \end{aligned}$$

令 \mathbf{S} 及 \mathbf{m}^0 分别表示主动力的主向量及对 O 点的主矩:

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{m}^0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i \quad (c)$$

主动力的虚功表达式 (b) 可化为:

$$\delta'W = \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{r}_0 + \mathbf{m}^0 \cdot \boldsymbol{\theta} \quad (d)$$

当用 $Oxyz$ 坐标系及欧拉角描述刚体运动时, 广义坐标为 α_0 ,

$y_0, z_0, \psi, \theta, \varphi$ (见图 1.25), 于是有

$$\left. \begin{aligned} \delta \mathbf{r}_0 &= \mathbf{i}_1 \delta x_0 + \mathbf{i}_2 \delta y_0 + \mathbf{i}_3 \delta z_0 \\ \theta &= \mathbf{i}_3 \delta \psi + \mathbf{n} \delta \theta + \mathbf{i}'_3 \delta \varphi \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

其中 \mathbf{i}_s 为定坐标系中之单位向量, \mathbf{i}'_s 为动坐标系中之单位向量, \mathbf{n} 为节线单位向量, 将 (e) 式代入 (d) 式后, 便得到

$$\begin{aligned} \delta' W &= S_1 \delta x_0 + S_2 \delta y_0 + S_3 \delta z_0 + \mathbf{m}^0 \cdot \mathbf{i}_3 \delta \psi + \mathbf{m}^0 \cdot \mathbf{n} \delta \theta \\ &\quad + \mathbf{m}^0 \cdot \mathbf{i}'_3 \delta \varphi \end{aligned} \quad (f)$$

由此得到对应 x_0, y_0, z_0 之广义力为

$$Q_1 = S_1, \quad Q_2 = S_2, \quad Q_3 = S_3 \quad (g)$$

它们分别为外力主向量 \mathbf{S} 在定坐标轴上的投影, 而与 ψ, θ, φ 相对应之广义力为

$$Q_4 = \mathbf{m}^0 \cdot \mathbf{i}_3 = m_3, \quad Q_5 = \mathbf{m}^0 \cdot \mathbf{n} = m_N, \quad Q_6 = \mathbf{m}^0 \cdot \mathbf{i}'_3 = m'_3 \quad (h)$$

它们分别为外力对 Oz 轴, ON 轴, 及 Oz' 轴之主矩。

现在用与动坐标系 $Ox'y'z'$ 相联系的线速度 $v_{Ox'}, v_{Oy'}, v_{Oz'}$, 及角速度 $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$ 作为准速度, 相应的准坐标变分为 $\delta\pi_1, \delta\pi_2, \dots, \delta\pi_6$ 。外力的虚功为

$$\delta' W = S'_1 \delta\pi_1 + S'_2 \delta\pi_2 + S'_3 \delta\pi_3 + \mathbf{m}_x^0 \delta\pi_4 + \mathbf{m}_y^0 \delta\pi_5 + \mathbf{m}_z^0 \delta\pi_6 \quad (i)$$

与准坐标相对应的广义力为:

$$P_1 = S'_1, \quad P_2 = S'_2, \quad P_3 = S'_3 \quad (j)$$

$$P_4 = m_x^0, \quad P_5 = m_y^0, \quad P_6 = m_z^0 \quad (k)$$

由此可见, 与准速度 $v_{Ox'}, v_{Oy'}, v_{Oz'}, \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$ 相对应的广义力分别为外力主向量在 Ox', Oy', Oz' 上的投影及外力对这些轴的主矩。

1.7.3 势能

势能和动能类似, 都是在真位移及真速度中确定的物理量。系

统在真位移中的元功为:

$$d'W := \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i \quad (1.7.28)$$

其中 $d\mathbf{r}_i$ 及 $d'W$ 分别表示真位移及总元功, 这里记号 $d'W$ 同样只表示元功, 而不表示某函数 W 的全微分。 $d'W$ 能成为某函数的全微分的条件是: 存在一个只依赖系统位形的单值且二阶可导函数 V :

$$V = V(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N) \quad (1.7.29)$$

而作用在每个质点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$ 上的力在惯性坐标轴上的投影能满足以下关系:

$$F_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i} \quad (1.7.30)$$

函数 V 称之为势函数, 或势能, 显然对 V 加以任意常数后, 条件 (1.7.30) 仍能成立。任意常数的确定取决于“零位形”的选择, 即规定系统在何种位形下取势能为零。

将 (1.7.30) 式代入 (1.7.28) 式, 系统在实位移中的元功等于

$$d'W = - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} dz_i \right) = -dV \quad (1.7.31)$$

此处 dV 是势能的全微分。

由势能决定的主动力称为有势力。有势力的特征在于: 力在某过程中的功等于过程两端势能之差:

$$W_{12} = \int_{(1)}^{(2)} dW = - \int_{(1)}^{(2)} dV = V_1 - V_2 \quad (1.7.32)$$

以下限于讨论定常系统, 在定常约束条件下, 我们已知系统各点的直角坐标可表为广义坐标的单值函数 (见 (1.2.9) 式), 代入 (1.7.29) 式后, 势能便成为广义坐标的单值函数:

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (1.7.33)$$

有势力的虚功可仿照(1.7.31)得到:

$$\delta'W = -\delta V = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j \quad (1.7.34)$$

于是,有势广义力可由势能 V 表达如下:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.7.35)$$

如引用准坐标, 则将(1.5.20)式给出的 δq_j 与 $\delta \pi_k$ 的关系式代入(1.7.34)式后, 得到

$$\begin{aligned} \delta'W = -\delta V &= -\sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_j} \sum_{k=1}^n b_{jk} \delta \pi_k \\ &= \sum_{k=1}^n P_k \delta \pi_k \end{aligned} \quad (1.7.36)$$

P_k 称为对应准坐标 π_k 的广义有势力, 它等于

$$P_k = -\sum_{j=1}^n b_{jk} \frac{\partial V}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^n b_{jk} Q_j \quad (1.7.37)$$

按照(1.3.10)所规定的形式记号, 上式又可表为:

$$P_k = -\frac{\partial V}{\partial \pi_k} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1.7.38)$$

例题 1.7.3 求任意刚体在引力场中的势能及广义力

解 万有引力定律给出质点 m 在以质量 m_0 为中心的引力场作用下的引力公式为:

$$\mathbf{F} = -f \frac{mm_0}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (a)$$

其中 f 为万有引力常数, \mathbf{r} 为自引力中心指向 m 的矢径。取 $k = fm_0$, 称为简化引力常数, 并求引力 \mathbf{F} 的虚功如下:

$$\delta'W = -\frac{km}{r^3} \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r} = -\frac{km}{r^3} \frac{1}{2} \delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = -\frac{km}{r^3} r dr \quad (b)$$

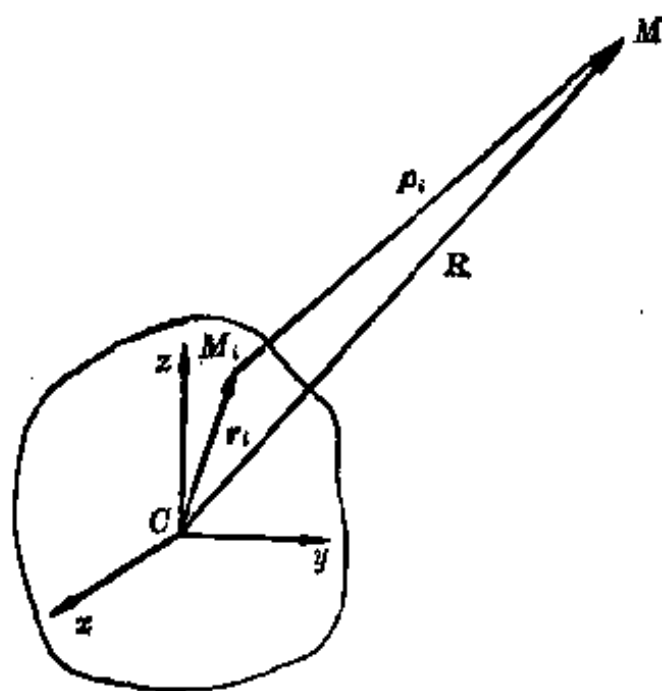


图 1.26

或

$$\delta'W = -\frac{km}{r^2}\delta r = \delta\left(k\frac{m}{r}\right) \quad (c)$$

由此可得单质点在引力场中之势能为

$$V = -\frac{km}{r} \quad (d)$$

现在将以上结果应用于刚体，设在刚体的质量中心 C 建立惯性主轴坐标系 $Cxyz$ ，刚体内任一质点 M_i 的坐标为 x_i, y_i, z_i ； C 点至引力中心 M 的距离为 R ，而 M 点在 C_{xyz} 坐标系中之坐标为 x, y, z 。于是，刚体在引力场中之势能为：

$$V = -k \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_i} = -k \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} \quad (e)$$

令

$$\left. \begin{aligned} r_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \\ R^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

势能表达式可改写为

$$V(x, y, z) = -\frac{k}{R} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{[1 - 2(xx_i + yy_i + zz_i)/R^2 + r_i^2/R^2]^{1/2}} \quad (g)$$

现在考虑在航天工程中常见的情况: 刚体尺度远远小于 C 点至引力中心之距离, 即 $r_i \ll R$, 上式中分母可视为 $(1 - \alpha)^{\frac{1}{2}}$, 其中 α 为小于 1 的小量。由幂级数展开式

$$(1 - \alpha)^{-1/2} = 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha^2 + \dots \quad (h)$$

在略去高阶小量后的势能近似表达式为:

$$V(x, y, z) = -\frac{k}{R} \left\{ m + \sum_{i=1}^N m_i \frac{xx_i + yy_i + zz_i}{R^2} + \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{3}{2} \left(\frac{xx_i + yy_i + zz_i}{R^2} \right)^2 - \frac{r_i^2}{2R^2} \right] \right\} \quad (i)$$

由于 C 点是质量中心, 应有

$$\sum_{i=1}^N m_i x_i = \sum_{i=1}^N m_i y_i = \sum_{i=1}^N m_i z_i = 0 \quad (j)$$

又由于 $Cxyz$ 是中心惯性主轴系统, 又有

$$\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i = \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i = \sum_{i=1}^N m_i z_i x_i \quad (k)$$

于是势能函数简化为

$$V(x, y, z) = -\frac{km}{R} - \frac{k}{R^3} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{x^2 x_i^2 + y^2 y_i^2 + z^2 z_i^2}{R^2} - \frac{r_i^2}{2} \right) \quad (l)$$

用 A, B, C 分别表示刚体对 Cx, Cy, Cz 轴之转动惯量, 则有以下关

系:

$$\sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \frac{1}{2} (A + B + C) \quad (m)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i x_i^2 = \frac{1}{2} (B + C - A) \quad (n)$$

势能最后可表为

$$V(x, y, z) = -\frac{km}{R} - \frac{k}{2R^3} [(B + C - 2A)x^2 + (C + A - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2] \quad (o)$$

由于 R 及 r_i 都是从刚体质量中心 C 点引出的向量, 所以 $-\frac{\partial V}{\partial x}$, $-\frac{\partial V}{\partial y}$, $-\frac{\partial V}{\partial z}$ 应理解为质点 m_0 所受引力的分量, 而刚体所受引力方向则正相反, 故有刚体所受引力主向量分量如下:

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = \left[\frac{\partial V}{\partial R} - \frac{k}{R^4} (B + C - 2A) \right] \frac{x}{R} \quad (p)$$

类似地应有:

$$\left. \begin{aligned} F_y &= \left[\frac{\partial V}{\partial R} - \frac{k}{R^4} (C + A - 2B) \right] \frac{y}{R} \\ F_z &= \left[\frac{\partial V}{\partial R} - \frac{k}{R^4} (A + B - 2C) \right] \frac{z}{R} \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

引力对 $Cxyz$ 各轴之主矩为:

$$\left. \begin{aligned} m_x &= yF_z - zF_y = \frac{3k}{R^5} (C - B) yz \\ m_y &= zF_x - xF_z = \frac{3k}{R^5} (A - C) zx \\ m_z &= xF_y - yF_x = \frac{3k}{R^5} (B - A) xy \end{aligned} \right\} \quad (r)$$

1.8 动力学普遍方程 (d'Alembert-Lagrange 原理)

对于非自由质点系, 若将约束解除代之以约束力, 则由牛顿定律便得质点的动力学方程:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (1.8.1)$$

式中 \mathbf{F}_i , \mathbf{R}_i 分别是作用在质点 P_i 上的主动力的合力和约束力的合力, m_i 是它的质量。

设约束是理想的, 即对系统自任何可能状态(约束所容许的位置和速度)引出的任何一组虚位移 $\delta \mathbf{r}$ 均有

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1.6.4)$$

则由方程(1.8.1)便有:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1.8.2)$$

上式称为动力学普遍方程。它表明, 在系统运动的任何时刻 t , 主动力和惯性力在系统邻近状态的任何虚位移上所作虚功之和为零。

动力学普遍方程又称为 d'Alembert-Lagrange 原理*。

动力学普遍方程是决定系统在给定主动力 $\mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ ($i=1, 2, \dots, N$) 作用下实现约束所容许的真运动的充分必要条件。必要

• 将主动力 \mathbf{F}_i 分解为两部分:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(1)} + \mathbf{F}_i^{(2)} \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

其中 $\mathbf{F}_i^{(1)} = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$, 称为有效力, 它使质点产生加速度, 改变质点的运动状态; $\mathbf{F}_i^{(2)} = \mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ 与约束的作用抵消(即 $\mathbf{F}_i^{(2)} + \mathbf{R}_i = 0$)。对改变质点的运动状态不起作用, 称为损失力。损失力和约束反力平衡, 这就是 d'Alembert 原理。动力学普遍方程也可表述为: 在系统运动的任何时刻, 损失力在系统的任何虚位移上的虚功之和为零。

性已如上述。下面证明它的充分性。

证明充分性,就是要证明在理想约束条件下,满足动力学普遍方程(1.8.2)的加速度 $\ddot{\mathbf{r}}_1, \ddot{\mathbf{r}}_2, \dots, \ddot{\mathbf{r}}_N$ 就是系统在给定状态 $\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i$ 及主动力 \mathbf{F}_i 作用下实际发生的加速度,即由动力学方程(1.8.1)决定的加速度。

用反证法证明。假设系统在主动力 $\mathbf{F}_i (i=1, 2, \dots, N)$ 作用下,与给定状态 $\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i$ 相适当的真加速度不是 $\ddot{\mathbf{r}}_i$ 而是 $\ddot{\mathbf{r}}'_i$, 相应的约束力为 $\mathbf{R}'_i (i=1, 2, \dots, N)$, 于是便有

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}'_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (1.8.3)$$

根据理想约束条件和(1.8.2)式,则有

$$\sum_{i=1}^N m_i \Delta \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1.8.4)$$

式中 $\Delta \ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}'_i - \ddot{\mathbf{r}}_i$ 。以广义坐标 q 表示时,则因

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j + (**) \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (1.8.5)$$

其中(**)代表不含广义加速度 \ddot{q} 而只含 t, q, \dot{q} 的项。而 $\ddot{\mathbf{r}}_i$ 和 $\ddot{\mathbf{r}}'_i$ 都是在 t 时刻系统与同一状态 $(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$ 相适应的加速度,因此,由(1.8.5)式可知

$$\Delta \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \Delta \ddot{q}_j \quad (1.8.6)$$

将上式及以广义坐标的变分表示的虚位移表达式(1.5.8)'代入(1.8.4)式,得

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j,k=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \Delta \ddot{q}_j \delta q_k = 0$$

利用(1.7.3)式,上式又可写成

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk} \Delta \ddot{q}_j \delta q_k = 0 \quad (1.8.7)$$

这表明, 如果有两组加速度 \ddot{r}_i 和 \ddot{r}'_i ($i=1, 2, \dots, N$) 同时满足 (1.8.2) 式, 则决定其差的 $\Delta \ddot{q}_j$ ($j=1, 2, \dots, n$) 对于任何为约束所容许的 $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ 都须满足上式。但是对于完整系统, 因为 \ddot{q} 和 $\delta \ddot{q}$ 都是独立的, 不受任何限制, 所以可取 $\delta \ddot{q}_k = c \Delta \ddot{q}_k$ ($k=1, 2, \dots, n$), c 是任意一个非零常数, 因而有

$$c \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk} \Delta \ddot{q}_j \Delta \ddot{q}_k = 0 \quad (1.8.8)$$

于是, 由 $[A_{jk}]$ 的正定性 (见 (1.7.11) 式), 必有 $\Delta \ddot{q}_j = 0$ ($j=1, 2, \dots, n$), 因而 $\ddot{r}' = \ddot{r}$ 。

如果还有非完整约束

$$f_m(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (m=1, 2, \dots, g+d) \quad (1.8.9)$$

(它包括一阶线性非完整约束) 则约束加在广义加速度 \ddot{q} 上的限制为

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial \ddot{q}_j} \ddot{q}_j + (**) = 0 \quad (m=1, 2, \dots, g+d) \quad (1.8.10)$$

式中 $(**)$ 代表只含 (t, q, \dot{q}) 而与 \ddot{q} 无关的项。因此 $\Delta \ddot{q}_j$ ($j=1, 2, \dots, n$) 必须满足方程

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial \ddot{q}_j} \Delta \ddot{q}_j = 0 \quad (m=1, 2, \dots, g+d) \quad (1.8.11)$$

这和约束方程 (1.8.9) 加在坐标变分 δq 上的限制

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = 0 \quad (m=1, 2, \dots, l+d) \quad (1.5.11)$$

是一样的, 即 $(\Delta \ddot{q}_1, \Delta \ddot{q}_2, \dots, \Delta \ddot{q}_n)$ 和 $(\delta \ddot{q}_1, \delta \ddot{q}_2, \dots, \delta \ddot{q}_n)$ 有相同的解空间, 因而仍可取 $\delta \ddot{q}_j = \Delta \ddot{q}_j$ ($j=1, 2, \dots, n$), 代入 (1.8.7) 式后仍可得 $\Delta \ddot{q}_j = 0$ ($j=1, 2, \dots, n$)。和完整系统一样, 它也表明满足动力学普遍方程的加速度是唯一的, 它们就是在主动力 F_1, F_2, \dots ,

F_N 作用下, 系统各质点的真加速度。充分性证毕。

作为分析力学的基本原理, 动力学普遍方程仅以理想约束为前提, 它既适用于完整系统, 也适用于非完整系统。分析力学中的其它一些原理都可由之导出。非自由系统中各种形式的运动微分方程也可由之导出。

由动力学普遍方程(1.8.3)求得运动后, 便可借方程(1.8.1)求出约束力。

如果系统的位形由 r_i 表示 ($i=1, 2, \dots, N$), 而且在此位形各点的速度恒为零, 则这个位形称为系统的平衡位形。因此在系统的平衡位形恒有 $\dot{r}_i \equiv 0$ ($i=1, 2, \dots, N$)。代入动力学普遍方程(1.8.2), 则有

$$\sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (1.8.12)$$

即某位形是系统平衡位形的充分必要条件是: 在此位形上主动力在任何一组虚位移上的虚功之和为零。这就是虚位移原理。

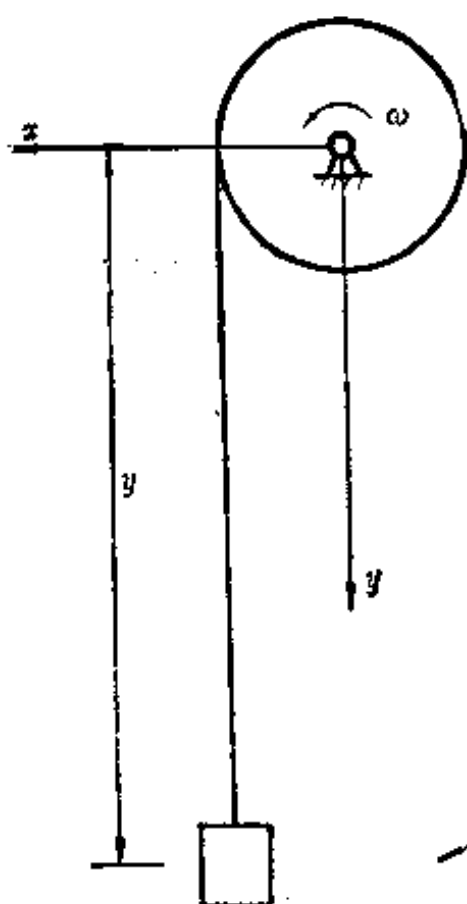
第一章 习 题

1.1 重块 m 吊在不可伸长的钢绳上, 钢绳绕在半径为 R 的鼓轮上。鼓轮以等角速度 ω 转动。考虑重块在图示平面上的摆动。试选定广义坐标, 写出直角坐标与广义坐标间的变换关系, 并说明其为何种约束。

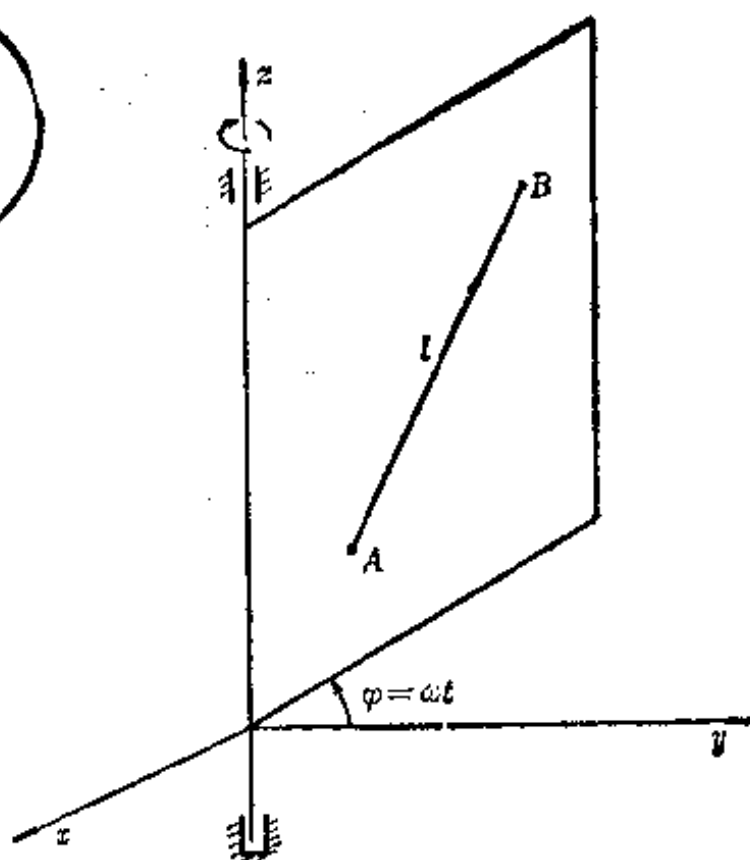
1.2 长度为 l 的杆 AB 被限制在竖直平面内运动, 此竖直平面又绕竖直轴以等角速 ω 转动, 试写出此系统的约束方程。自选广义坐标, 写出直角坐标与广义坐标间的变换关系。

1.3 五连杆机构如图, 支座 A, B 之距离为 l , 各杆长度分别为 l_1, \dots, l_5 。 AC 杆按规律 $\varphi_1 = \omega_0 t$ 运动。问(1)此系统有几个自由度, (2) 自选广义坐标, 写出直角坐标与广义坐标的转换关系。

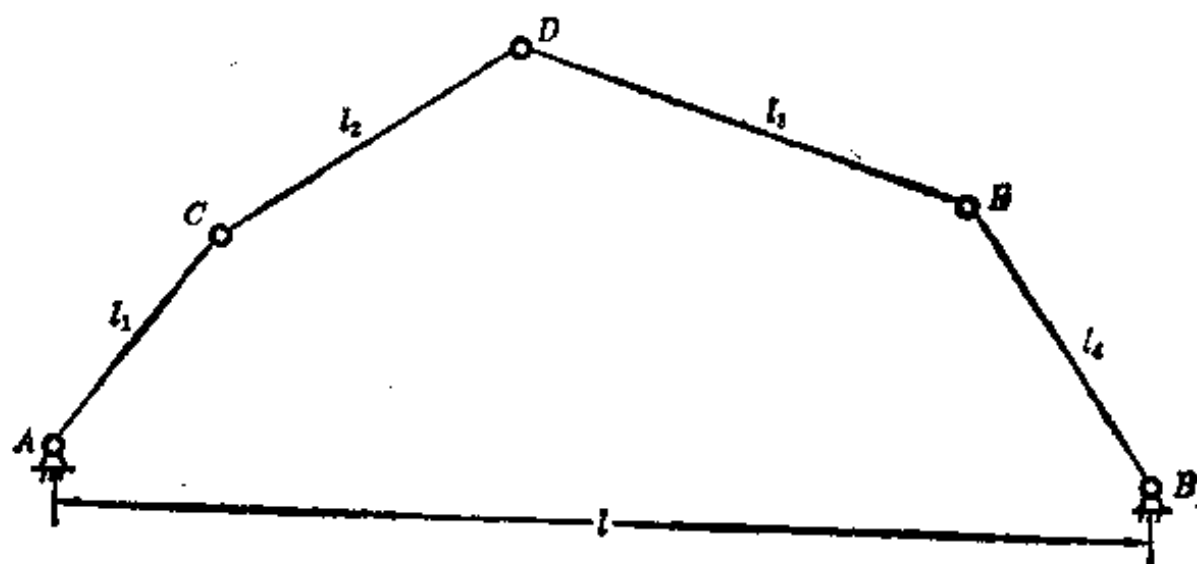
1.4 安装在地下室中的地震仪如图所示。设地下室沿水平方向及铅垂方向作刚体运动: $x_0(t), y_0(t)$ 。用摆锤的摆角 φ 表示其直角坐标并判断约束类型。



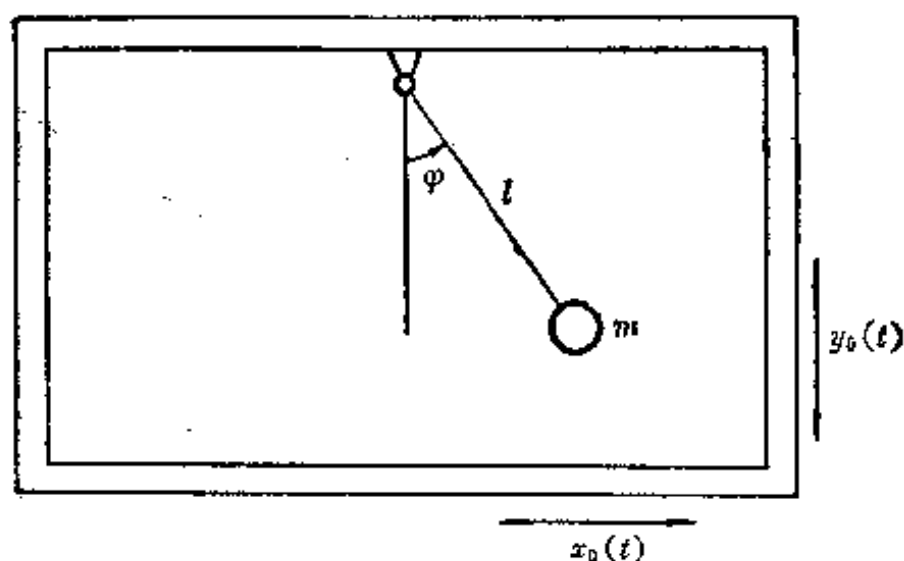
題 1.1



題 1.2

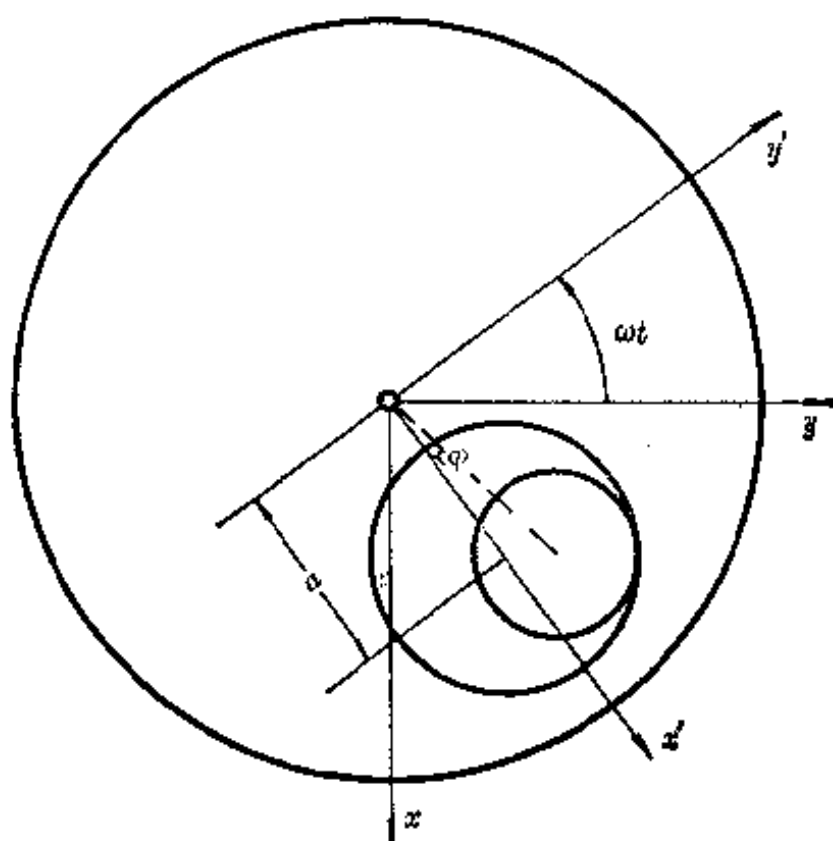


題 1.3



题 1.4

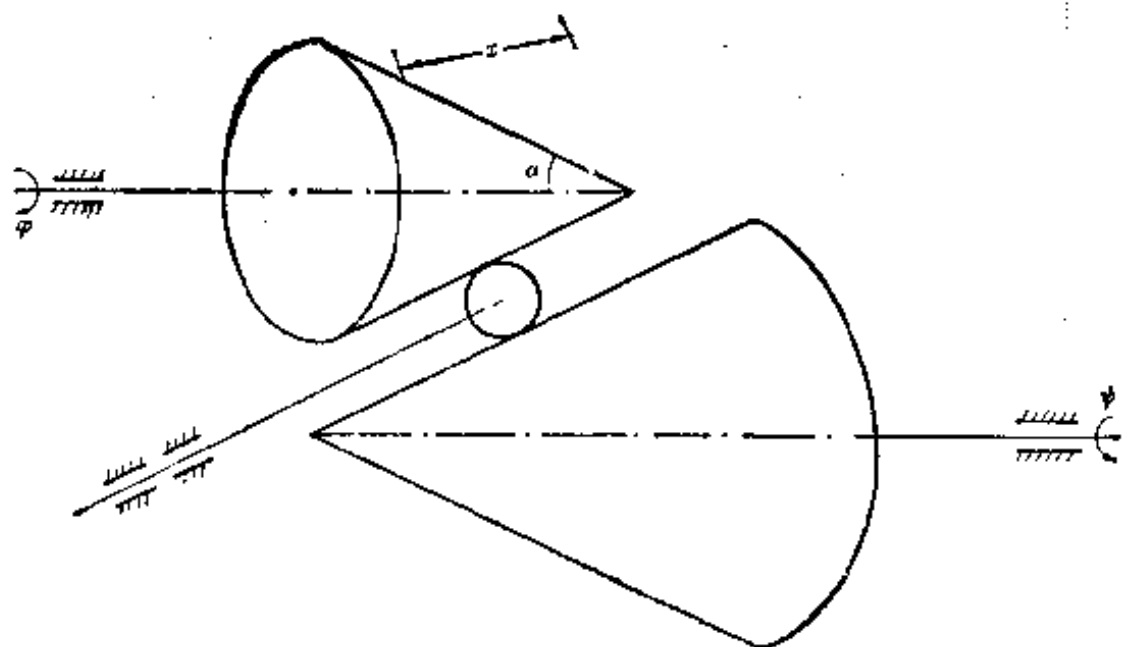
1.5 飞轮以等角速 ω 转动, 飞轮中挖一半径为 R 的圆槽, 槽中放置一半径为 r 的圆柱体。如果圆柱体在槽中作纯滚动, 自选广义坐标, 并求圆柱体上任一点直角坐标与广义坐标之关系。



题 1.5

1.6 两个转动轴相互平行的粗糙圆锥体, 借助小轮传动。小轮之轴平行于两圆锥之母线。设圆锥顶角为 α , 高为 h , 试求锥体角速度之关系, 并判

断约束类型。



题 1.6

1.7 判断下列约束是否为完整约束。若是完整约束，则写出其有限形式。

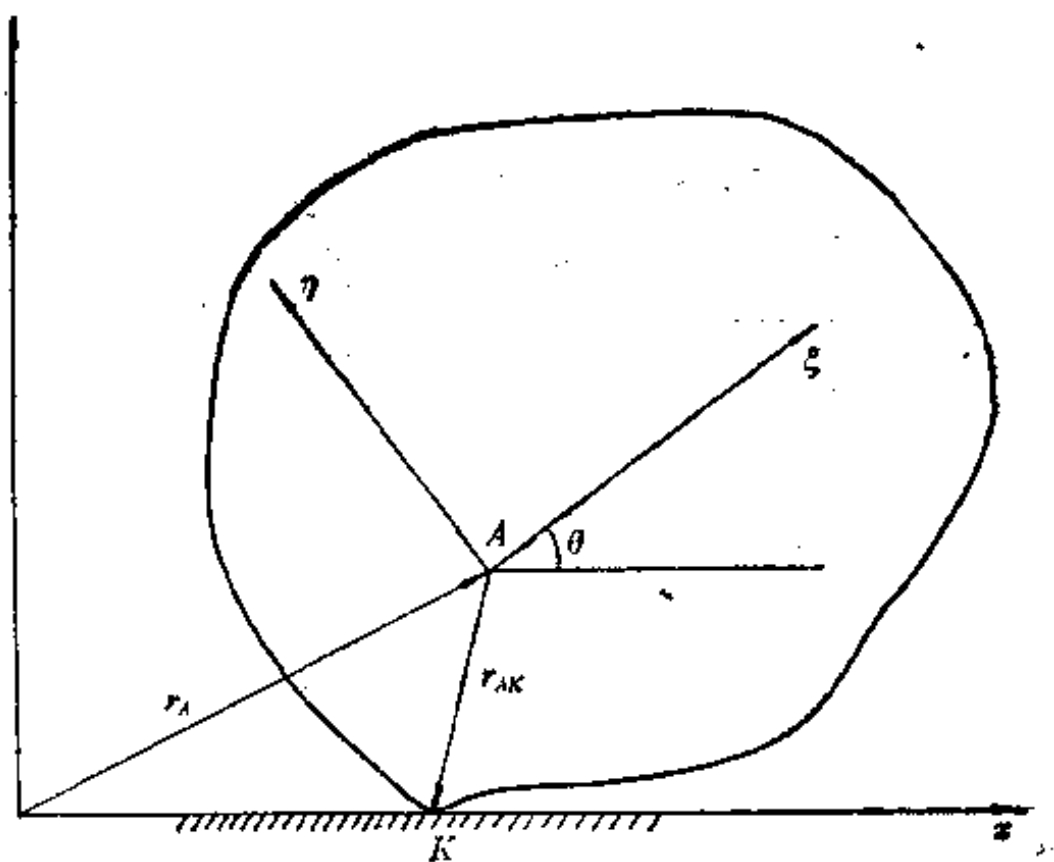
- (1) $x\dot{z} + (y^2 - x^2 - z)\dot{x} + (z - y^2 - xy)\dot{y} = 0$
- (2) $\dot{y} - z\dot{x} = 0$
- (3) $(2x + y + z)\dot{x} + (2y + z + x)\dot{y} + (2z + x + y)\dot{z} = 0$
- (4) $\dot{x}(x^2 + y^2 + z^2) + 2(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) = 0$

1.8 任意周边形状的柱面物体在水平面上无滑动地滚动，试写出约束条件。(提示：在物体上固结一坐标系 $A\xi\eta$ ，当周边形状给定时，物体与 x 轴接触点坐标 ξ_k, η_k 是 θ 的函数，至于物体本身的位形可用 A 点的坐标 x, y 及转角 θ 表示)。

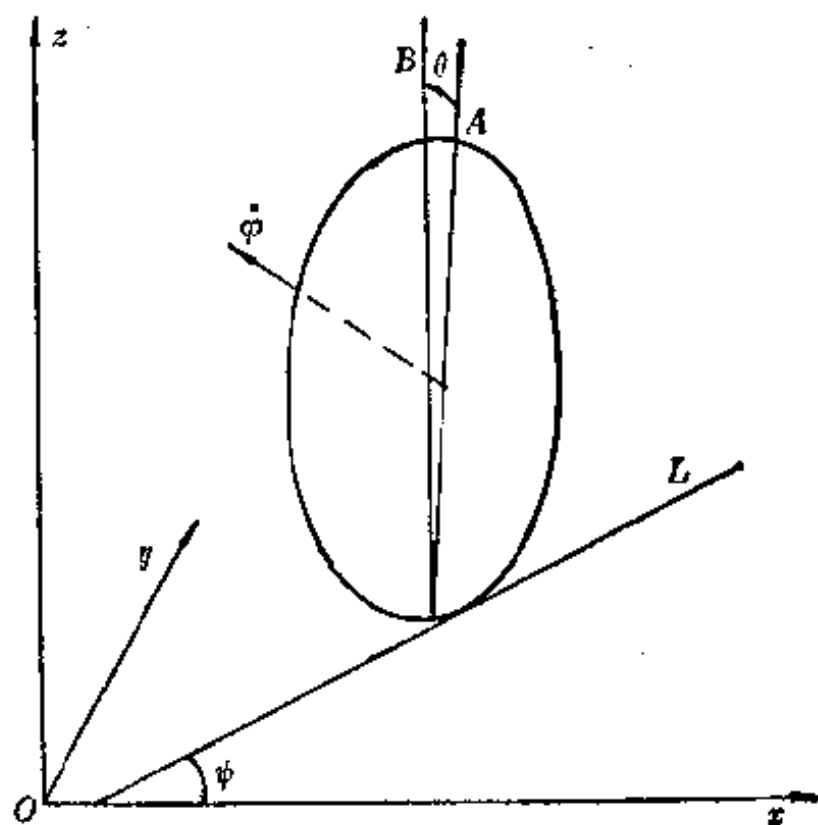
1.9 半径为 a 的均质圆盘在粗糙平面上滚动，试写出系统的约束方程。(作为确定圆盘位置的广义坐标，可取(1)重心坐标 x_0, y_0, z_0 及 Euler 角 ψ, θ, φ ；(2)圆盘与平面接触点 x, y 及 Euler 角 ψ, θ, φ)。

1.10 在上题中，如果圆盘有尖锐边缘，仅限制横向滑动，试列出约束方程。

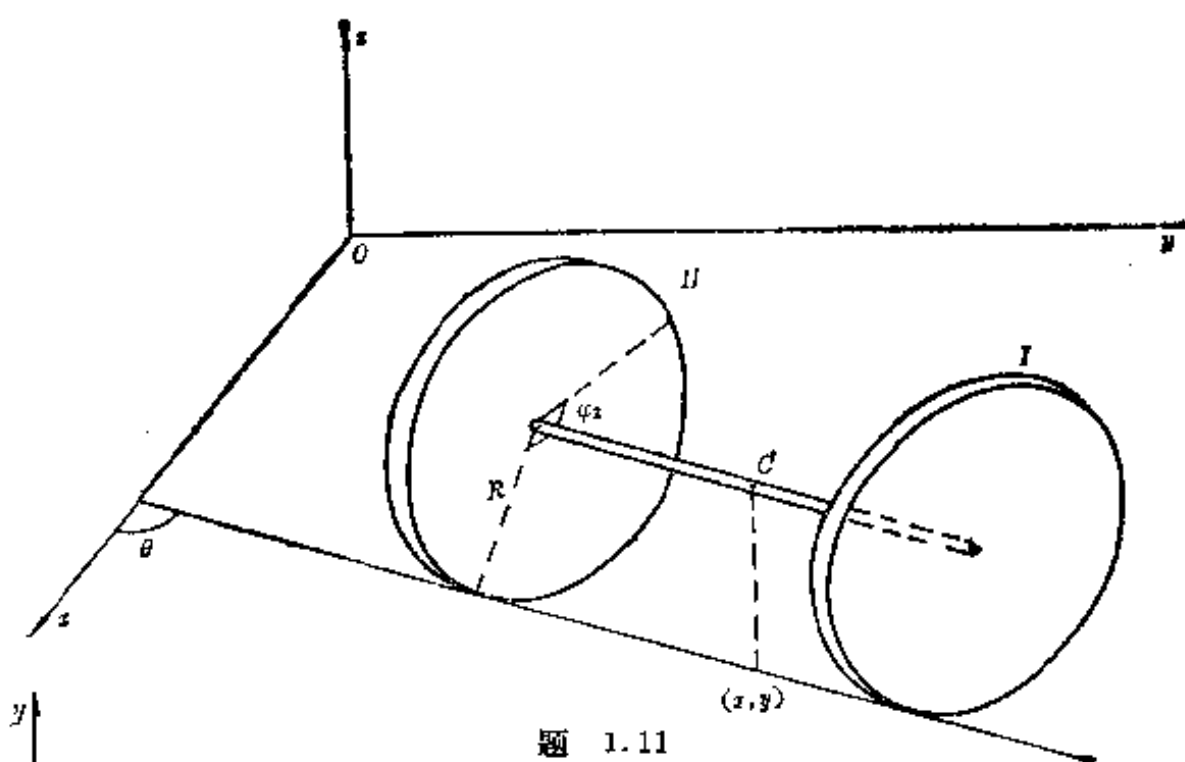
1.11 两个半径为 R 的车轮，用长为 $2a$ 的轴联结(轴与轮面垂直)在粗糙平面上滚动(轮面与平面垂直)，试写出系统的约束方程。



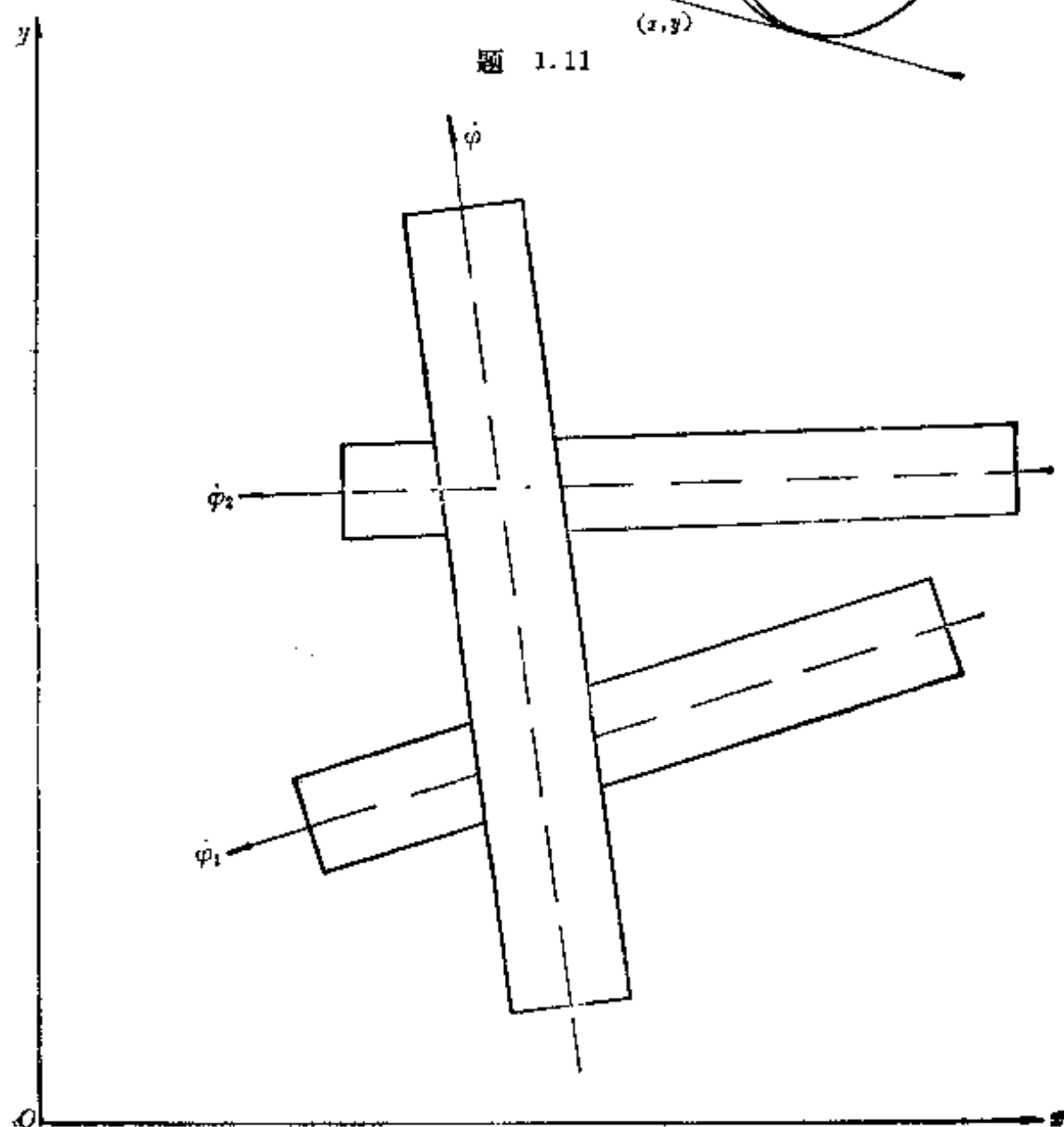
題 1.8



題 1.9



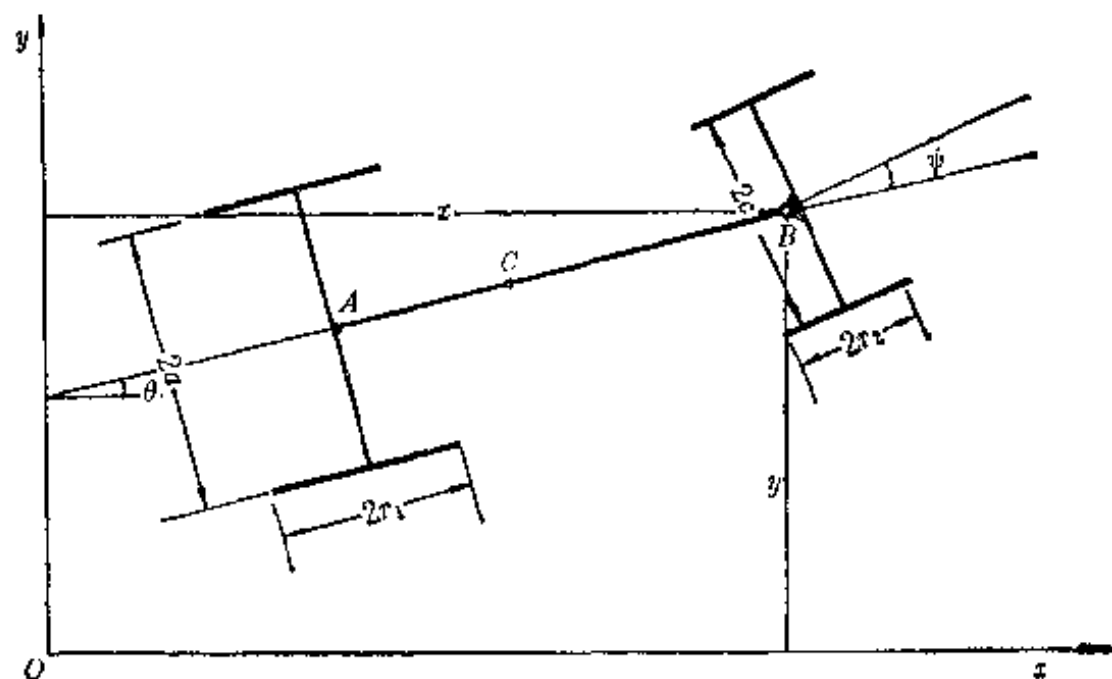
题 1.11



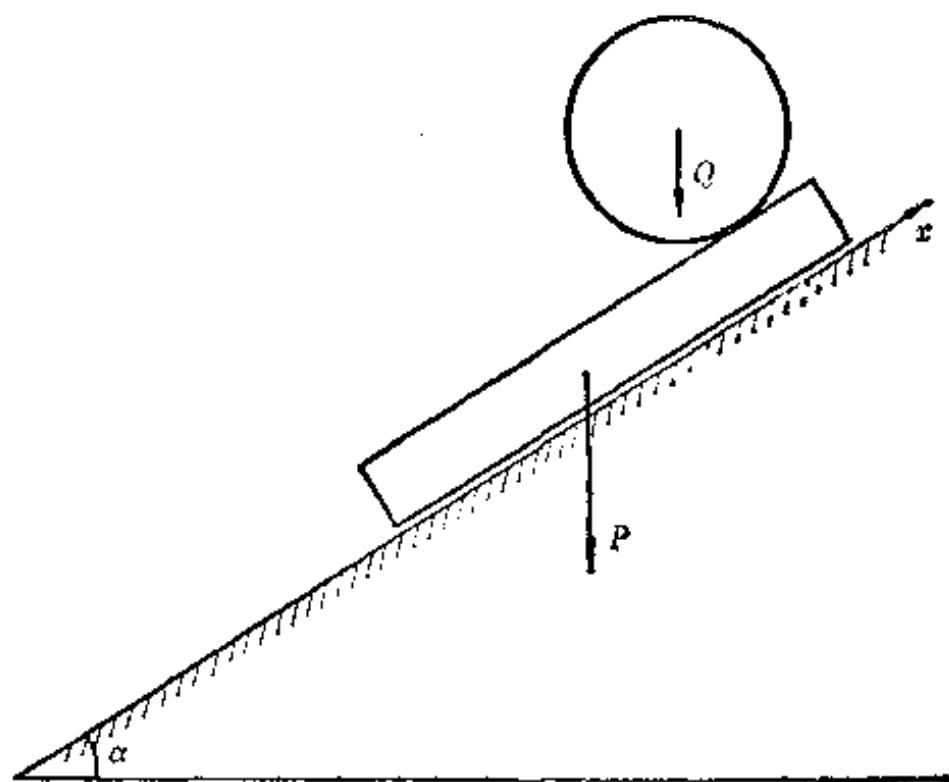
题 1.12

1.12 由三个粗糙匀质圆柱所组成的系统, 其中两个半径为 r 的圆柱在粗糙平面上滚动, 两圆柱母线夹角为 α 。第三个圆柱半径为 R , 在这两圆柱之上滚动。试列出系统的非完整约束, 并指明系统的自由度数。

1.13 四轮小车如图, 在粗糙平面上滚动, 且无横向滑动, 试写出系统的非完整约束方程。



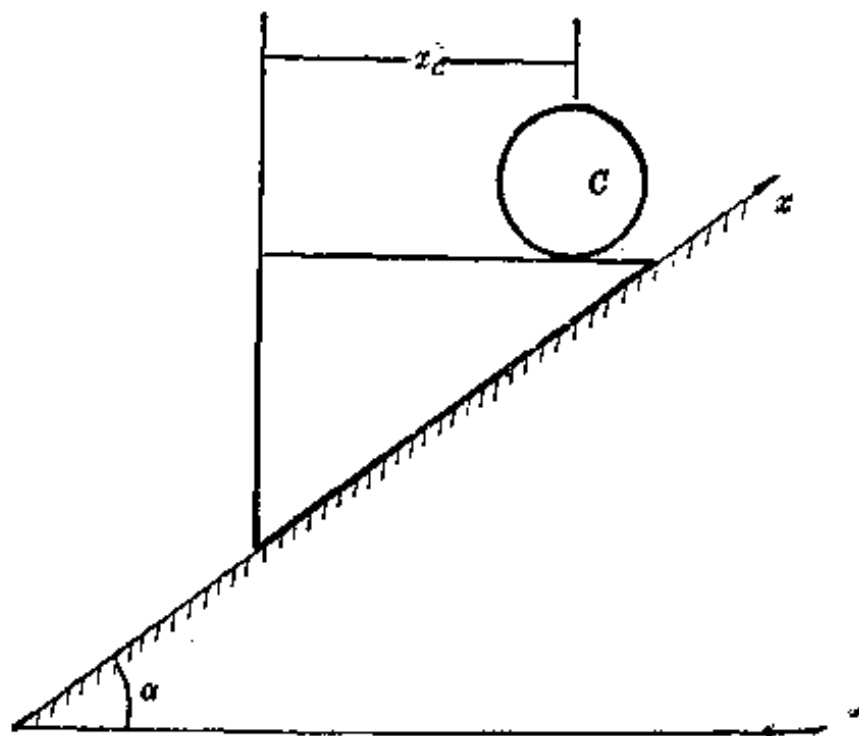
题 1.13



题 1.14

1.14 重量为 P 的平板 AB , 放在倾角为 α 的斜面上, 板上有一重量为 Q 的均质圆柱。当平板向下滑动的同时, 圆柱在平板上滚动。试计算系统的动能和势能。

1.15 重量为 P 的三棱柱 A 放在光滑斜面上, 斜面倾角为 α , 三棱柱上有一重量为 Q 的均质圆柱。圆柱在三棱柱上滚动, 求系统的动能和势能。



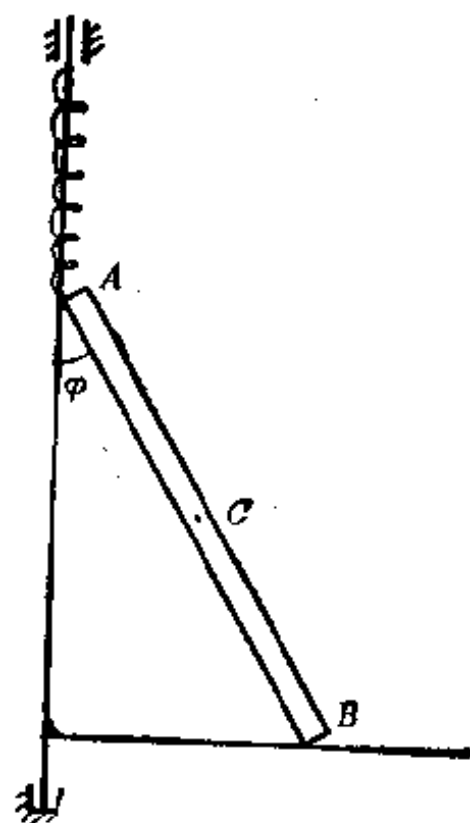
题 1.15

1.16 在匀速转动的平台 OB 上, 有一质量为 m , 长度为 l 的均质柱 AC 斜靠在转轴上, 杆沿平台滑动时 A 点不离转轴且有一弹性系数为 k 的弹簧与 A 点联结, 求系统的动能和势能 ($\varphi = \varphi_0$ 时, 弹簧为原长)。

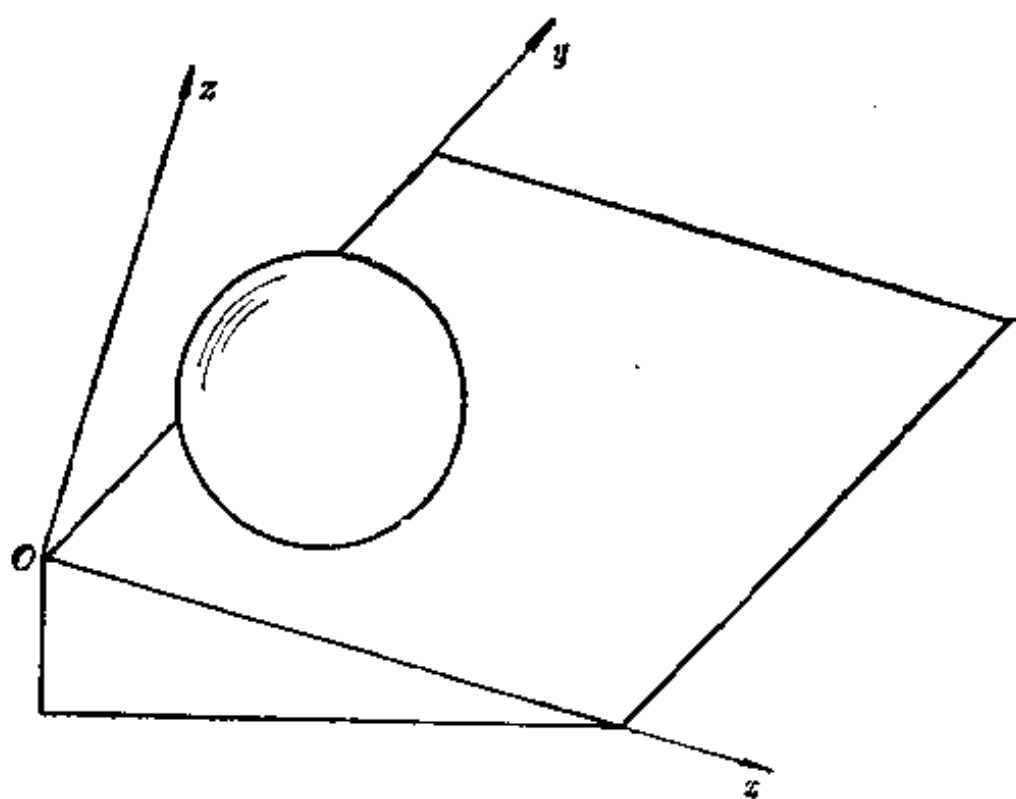
1.17 写出 12 题中系统的动能。

1.18 质量为 m 、半径为 a 的圆球在重力作用下在粗糙斜面滚动。斜面倾角为 α 。(1) 计算球的动能和势能; (2) 若取球滚动角速度 ω 在固定坐标系 $Oxyz$ 轴的投影为伪速度, 试用伪速度表示动能。

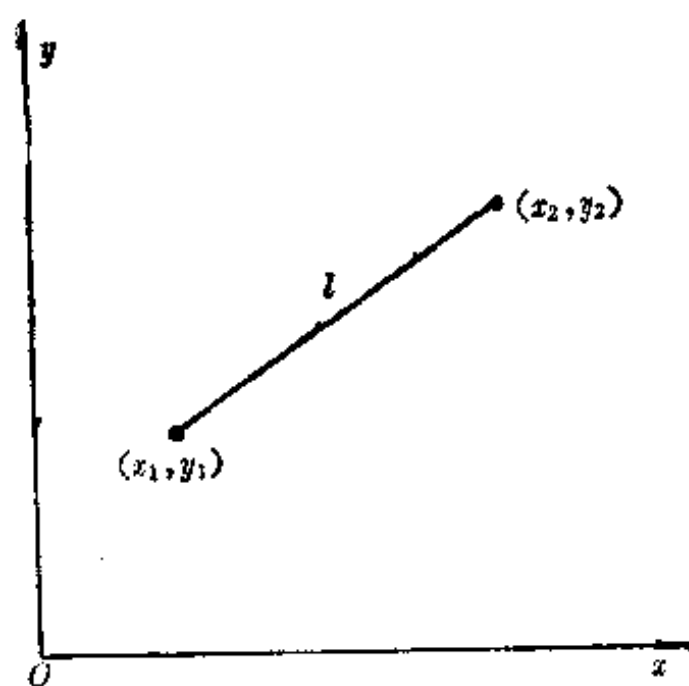
1.19 两个质量均为 $m=1$ 的质点 M_1 、 M_2 , 由一不计质量、长度为 l 的刚杆联结, 且此系统仅能在一铅垂面上运动, 且杆子中点的速度必须沿杆子方向, 试用第一类 Lagrange 方程建立运动方程, 并求解。



题 1.16

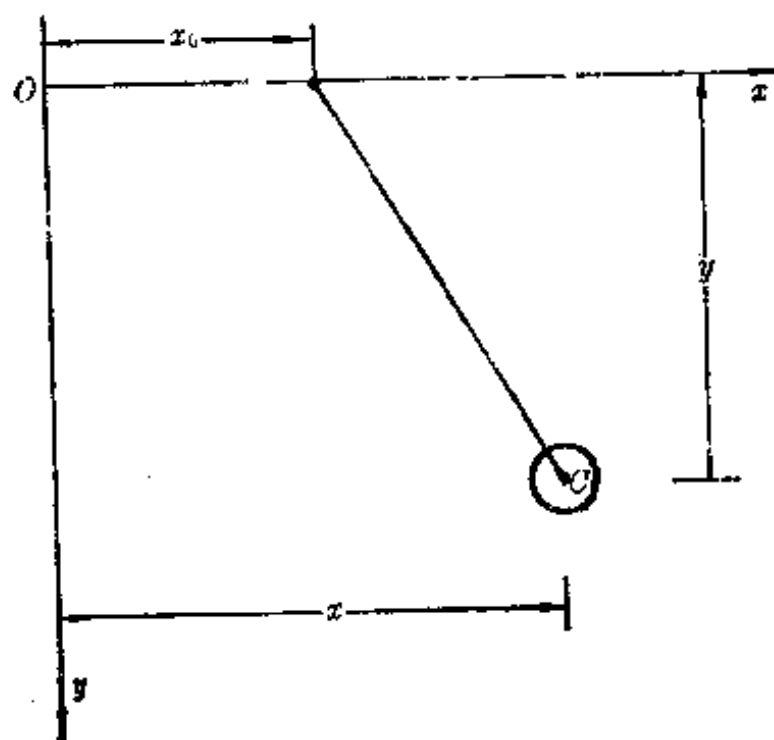


题 1.18



题 1.19

1.20 一个平面单摆的悬挂点按 $x_0(t) = f(t)$ 运动，试建立单摆的第一类 Lagrange 方程，并求解。



题 1.20

第二章 Lagrange 力学 (一)

本章及第三章都是关于 Lagrange 力学的论述。Lagrange 力学的特点是: 1) 在广义坐标位形空间中描述任何非自由系统; 2) 用能量及变分方法建立运动微分方程, 因而所有理想约束的约束力能自动消除; 3) 方程数目和系统自由度数相一致, 方程形式极为简明。由于以上原因, Lagrange 力学在分析力学发展史上占有十分重要的地位, 是继牛顿力学之后的一个新里程碑。

属于 Lagrange 力学的还有: Lagrange 关于系统的平衡稳定性理论, Routh 关于具有循环坐标系统的方程降阶问题 (Routh 方程), Rayleigh 关于多自由度系统微振动的理论, Kelvin 和 Tait 关于陀螺系统稳定性的研究, 以及 Ляпунов 关于运动稳定性一般理论的研究等等。

为了叙述方便, 本章只讨论 Lagrange 力学的一些基本问题, 第三章将讨论一些深入问题, 而且只限于研究完整系统动力学。至于用 Lagrange 方法研究非完整系统动力学将在第六章讨论。

2.1 第二类 Lagrange 方程

2.1.1 第二类 Lagrange 方程的一般形式

我们从动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^N (F_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.1.1)$$

出发来推导广义坐标形式的运动微分方程。

设有 N 个质点组成的系统, 其上只施有形如 (1.1.2) 式的 l 个

完整约束。取广义坐标 q_1, q_2, \dots, q_n ($n=3N-l$ 是系统的自由度) 决定系统的位形。因此动力学普遍方程 (2.1.1) 中主动力的虚功

$$\delta W_F = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \text{ 及惯性力的虚功 } \delta W_J = \sum_{i=1}^N (-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i \text{ 均可以}$$

用广义坐标表出。由以前的讨论知, 主动力的虚功等于广义力与对应广义坐标的变分的乘积之和:

$$\delta' W_F = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (2.1.2)$$

而惯性力之虚功 $\delta' W_J$ 也可以写成相似的形式:

$$\delta' W_J = - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \delta q_j = - \sum_{j=1}^n Z_j \delta q_j \quad (2.1.3)$$

于是, 动力学普遍方程便可写成

$$\sum_{j=1}^n (Q_j - Z_j) \delta q_j = 0 \quad (2.1.4)$$

其中

$$\begin{aligned} Z_j &= \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \\ &\quad (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

因为速度 $\dot{\mathbf{r}}_i$ 线性地依赖于广义速度 \dot{q}_j :

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (2.1.6)$$

而 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ 是彼此独立的, 因此由上式便有

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots, N \\ j=1, 2, \dots, n \end{pmatrix} \quad (2.1.7)$$

将(2.1.6)式两端对 q_j 求偏导数,得:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial t} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right)\end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, N \\ j=1, 2, \dots, n \end{matrix} \quad (2.1.8)$$

等式(2.1.7), (2.1.8) 常称为 Lagrange 经典关系, 是推导 Lagrange 方程的关键公式。

将两组 Lagrange 经典关系代入(2.1.5)式,得:

$$\begin{aligned}Z_j &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\end{aligned} \quad (2.1.9)$$

其中 T 是系统的动能, 于是由(2.1.4)式便得:

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0 \quad (2.1.10)$$

因为对于完整系统而言, 所有的 δq_j ($j=1, 2, \dots, n$) 是彼此独立的, 因此仅当全体 δq_j 的系数都等于零时, (2.1.10)式才能成立, 于是得:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.1.11)$$

这就是著名的第二类 Lagrange 方程, 它是一组 n 个关于广义

坐标的二阶常微分方程,系统的运动由 $2n$ 个初始条件 $q_j(0)=q_j^0$, $\dot{q}_j(0)=\dot{q}_j^0$ ($j=1,2,\dots,n$)完全决定。和第一类 Lagrange 方程相比较可知,第二类 Lagrange 方程具有以下明显的优点:(1) 第二类 Lagrange 方程的数目由 $3N$ 降至 $n=3N-l$ (系统的自由度数),或者说,第二类 Lagrange 方程具有最低的阶—— $2n$ 阶;(2) 所有理想约束的约束反力一概不出现在方程中。从那些复杂而又未知的约束力中解脱出来,不能不认为是 Lagrange 力学的重要成就之一。为了建立第二类 Lagrange 方程,只需写出基于运动学分析的动能及基于主动力虚功的广义力,按统一步骤列出即可。

将动能的表达式(1.7.2)代入 Lagrange 方程(2.1.11),即得

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot \ddot{q}_k + (* *) = Q_j \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (2.1.12)$$

其中 $(*)$ 代表不含广义加速度 \ddot{q} 的项, a_{jk} 是动能 T_2 的系数。

因为

$$\det \|a_{jk}\| \neq 0 \quad (2.1.13)$$

因此可以解出

$$\ddot{q}_j = G_j(t, q, \dot{q}) \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (2.1.14)$$

上式称为 Lagrange 方程的显式。根据常微分方程解的存在与唯一性定理,当函数 G 满足一定条件,例如连续,且有对 q, \dot{q} 连续的一阶偏导数(对于力学问题,这些条件常是满足的),方程(2.1.14)对任何给定的初值 q_j^0, \dot{q}_j^0 ($j=1,2,\dots,n$)永远有解,而且有唯一解,即系统的运动完全决定于系统的初始状态。

2.1.2 Lagrange 函数及有势系统的 Lagrange 方程

1.7 节已指出,如果存在一个函数 $V(q, t)$,使广义力

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (2.1.15)$$

则称广义力是有势的，函数 V 称为系统的势函数。当 V 不显含时间 t 时， V 称为系统的势能。显然，如果作用在系统的主动动力 $F_i (j=1, 2, \dots, N)$ 是有势的，即

$$F_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha=1, 2, \dots, 3N) \quad (2.1.16)$$

则

$$Q_j = \sum_\alpha F_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (2.1.17)$$

即广义力 Q_j 一定是有势的，但广义力有势并不能保证主动力 F 有势。

将(2.1.17)代入 Lagrange 方程(2.1.11)，并考虑到函数 $V(q, t)$ 不含广义速度，即 $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ ，便可将它写成如下形式：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

令

$$L = T - V \quad (2.1.18)$$

则上式又可写成

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.1.19)$$

(2.1.18)式所定义的函数 L ，称为Lagrange 函数，或动势。而方程(2.1.19)则是具有理想、完整约束的有势系统的动力学方程。也称为标准形式的 Lagrange 方程。

根据(2.1.18)式，Lagrange 函数

$$L = T_2 + T_1 + T_0 - V = T_2 + T_1 + (T_0 - V) \quad (2.1.20)$$

也是广义速度 \dot{q} 的二次函数，其中含 \dot{q} 的二次项、一次项及零次项分别为

$$L_2 = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad L_1 = T_1 = \sum_i a_i \dot{q}_i,$$

$$L_0 = T_0 - V = a_0 - V \quad (2.1.21)$$

为了正确地列出一个系统的 Lagrange 方程, 应该注意以下几个基本步骤:

(1) 分析系统的约束条件及主动力性质, 对系统的类型(完整或非完整系统、定常或非定常系统、保守或非保守系统)作出正确判断。

(2) 确定系统的自由度并选定广义坐标。

(3) 用选定的广义坐标对系统作运动学分析, 并写出动能 $T(q, \dot{q}, t)$, 广义力 $Q_j(q, t)$ 或势函数 $V(q, t)$ 。

例题2.1.1 一旋转摆如图2.1所示, 摆长为 l , 摆锤质量为 m , 用光滑铰链连结在铅垂轴上, 铅垂轴则以等角速度 ω 转动。列出此旋转摆的运动方程式。

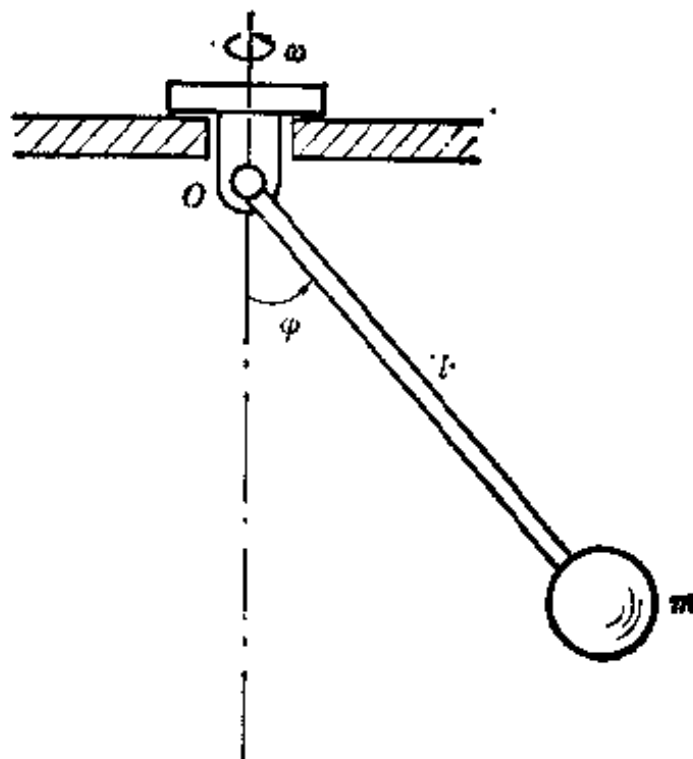


图 2.1

解 这是一个自由度的非定常系统, 已经在第一章中详细分析过。用摆和铅垂线之间的夹角 φ 可以完全决定这系统的位形,

此外,唯一的主动动力是重力,属于保守力(有势),因此系统的动能及势能表达式如下:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\varphi}^2 + \omega^2 l^2 \sin^2 \varphi) \quad (a)$$

$$V = -mgl \cos \varphi \quad (b)$$

其中势能的零位形取在 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 处,系统的 Lagrange 函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{\varphi}^2 + \omega^2 l^2 \sin^2 \varphi) + mgl \cos \varphi \quad (c)$$

代入 Lagrange 方程(2. 1. 19),得

$$\ddot{\varphi} - \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (d)$$

这就是系统的运动方程式。以下讨论几种特殊情况下方程(d)的积分。

(1) 系统在铅垂轴附近的微振动。在这种情况下 φ 为小量,于是方程(d)在略去 φ 的二阶以上的小量后可简化为以下方程:

$$\ddot{\varphi} + \left(-\omega^2 + \frac{g}{l}\right)\varphi = 0 \quad (e)$$

这是单自由度系统自由振动的标准方程,其解可表为如下形式的简谐振动:

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l} - \omega^2} t + \alpha\right) \quad (f)$$

其周期为

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \omega^2}} \quad (g)$$

这个解只有当 $\omega^2 < \frac{g}{l}$ 时才有意义,这就是说,当 $\omega^2 < \frac{g}{l}$ 时,系统才能在铅垂平衡位形附近作微振动。

(2) 求系统的相对平衡位形。在这种情况下应取 $\varphi = 0$, 方程

(f) 简化为

$$\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (h)$$

或

$$\sin \varphi \left(\omega^2 \cos \varphi - \frac{g}{l} \right) = 0 \quad (i)$$

方程 (i) 有两个解:

$$\varphi = 0, \quad \varphi = \arccos \frac{g}{l\omega^2}$$

显然, $\varphi = 0$ 就是情况 (1) 的平衡位形, 只有当 $\omega \geq \frac{g}{l}$ 时第二个解才有意义, 它也就是我们所要求的相对平衡位形。将它记作

$$\varphi_0 = \arccos \frac{g}{l\omega^2} \quad (j)$$

(3) 在定常运动状态 (j) 附近的微振动。取

$$\varphi = \varphi_0 + \xi \quad (k)$$

其中 ξ 为小量, 将它代入方程 (d), 便得到:

$$\xi + \left[-\omega^2 \cos(\varphi_0 + \xi) + \frac{g}{l} \right] \sin(\varphi_0 + \xi) = 0 \quad (l)$$

展开后变为:

$$\begin{aligned} \xi + \left[-\omega^2 (\cos \varphi_0 \cos \xi - \sin \varphi_0 \sin \xi) + \frac{g}{l} \right] (\sin \varphi_0 \cos \xi \\ + \cos \varphi_0 \sin \xi) = 0 \end{aligned} \quad (m)$$

略去 ξ 的高阶小量 (即取 $\sin \xi \approx \xi$, $\cos \xi \approx 1$), 并考虑到方程 (j), 则方程 (m) 可简化为

$$\xi + \omega^2 \sin^2 \varphi_0 \xi = 0 \quad (n)$$

这又是单自由度系统的自由振动方程 (因为 $\omega^2 \sin^2 \varphi_0$ 恒正)。所以定常运动状态按一次近似是稳定的, 其微振动周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi_0}。$$

例题 2.1.2 一质量为 m_1 的重块放在光滑水平面上, 长度为 l 、质量为 m_2 的单摆用光滑铰连接在重块上, 列出此系统的运动方程式, 并求出此系统微小摆动的周期。

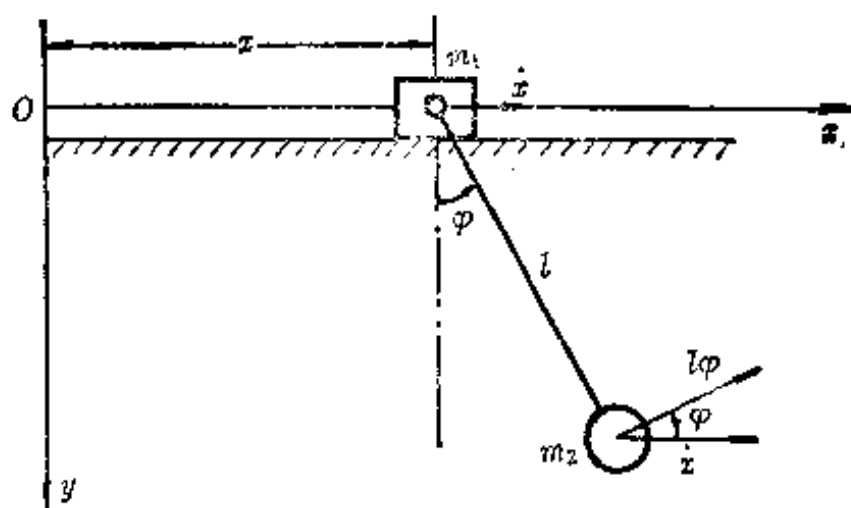


图 2.2

解 这个系统的位形可用重块在水平面上沿 Ox 轴的坐标 x (选静止状态时重块的位置为坐标原点) 及摆的转角 φ 这样两个参数来确定。系统没有非定常约束及其它预先给定的运动学条件, 因此是具有二个自由度的定常系统。我们规定坐标 x 向右为正; φ 从铅垂位置度量, 反时针方向为正。

取 x 和 φ 作为广义坐标, 则系统的动能

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[(\dot{x} + l \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (\dot{\varphi} l \sin \varphi)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l \dot{\varphi} \dot{x} \cos \varphi \end{aligned} \quad (a)$$

这是广义速度的二次齐次式 (与例题 2.1.1 不同), 因为在此例中约束是定常的。

系统的主动力只有重力, 它是有势的, 因此势能可表为

$$V = -m_2 g l \cos \varphi \quad (b)$$

则 Lagrange 函数为

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + m_2 g l \cos \varphi \quad (c)$$

将(c)式代入 Lagrange 方程(2.1.19), 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[(m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi \right] &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[m_2 l \dot{x} \cos \varphi + m_2 l^2 \dot{\varphi} \right] + m_2 l \dot{\varphi} \dot{x} \sin \varphi + m_2 g l \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

这便是系统运动的动力学方程。在给定初始条件 $x_0, \varphi_0, \dot{x}_0, \dot{\varphi}_0$ 下, 求解方程(d)便可得到系统的运动规律。但是, 因为方程(d)是非线性的, 很难求得解析形式的解, 所以常用数值积分求解。

在小摆动的条件下, 可以将(d)式线性化, 此时, x, \dot{x}, φ 及 $\dot{\varphi}$ 都是小量, 取 $\cos \varphi \approx 1, \sin \varphi \approx \varphi$, 略去二阶以上小量, 方程组(d)可简化为

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} &= 0 \\ m_2 l \ddot{x} + m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 g l \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

由这两个方程中消去变量 x , 可得到

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (f)$$

由此得到微小摆动的周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{l}{g}} \quad (g)$$

这个周期总是小于单摆悬挂点固定时的周期。当 m_1 远远大于 m_2 , 即 $m_1 \gg m_2$ 时, T 趋向于单摆的周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (h)$$

而 $m_1 \gg m_2$ 就意味着 m_1 的惯性很大, 在运动过程中它的加速度可以略去不计, 这就相当于摆的悬挂点固定不动的情况。

2.2 广义势及带电质点在电磁场中的运动

作用力依赖于速度的情况很多, 如果存在一个函数 $V^*(q, \dot{q}, t)$, 使系统的广义力 Q_i 可按公式

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V^*}{\partial q_i} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.2.1)$$

表示时, 那么 Lagrange 方程 (2.1.11) 仍有 (2.1.19) 的形式, 其中

$$L = T - V^* \quad (2.2.2)$$

含有广义速度 \dot{q} 的函数 $V^*(q, \dot{q}, t)$ 称为广义势, 以区别于不含广义速度的普通势 $V(q, t)$ 。

具有普通势 $V(q, t)$ 或广义势 $V^*(q, \dot{q}, t)$ 的系统, 有时称之为自然系统。

将 (2.2.1) 右端展开, 得:

$$Q_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V^*}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 V^*}{\partial \dot{q}_j \partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 V^*}{\partial \dot{q}_j \partial t} - \frac{\partial V^*}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.2.3)$$

由于在力学中有实际意义的力与加速度无关, 因而在 (2.2.3) 式中, 必须有

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V^*}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

即广义势 V^* 只能线性地依赖于广义速度 \dot{q} :

$$V^* = \sum_{j=1}^n V_j \dot{q}_j + V_0 = V_1^* + V_0 \quad (2.2.4)$$

其中 $V_j (j=0, 1, \dots, n)$ 是 q 和 t 的函数。

当广义势 V^* 取 (2.2.4) 的形式时, Lagrange 函数 L 仍是广义速度 \dot{q} 的二次函数:

$$L = T - V^* = T_2 + (T_1 - V_1^*) + (T_0 - V_0) \quad (2.2.5)$$

而

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1 - V_1^*, \quad L_0 = T_0 - V_0 \quad (2.2.6)$$

上述理论可用来研究带电质点在电磁场中受到 Lorentz 力作用的情形:

$$\mathbf{F} = e \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{H} \right] \quad (2.2.7)$$

其中 \mathbf{V} —— 质点速度; e —— 电荷; c —— 光速值; \mathbf{E} —— 电场强度; \mathbf{H} —— 磁场强度。向量 \mathbf{E} 及 \mathbf{H} 可用标量函数 φ 及向量函数 \mathbf{A} 按以下公式表示:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (2.2.8)$$

下面将证明 \mathbf{F} 可用广义势来表达。由 (2.2.7) 及 (2.2.8) 可得:

$$\mathbf{F} = -e \text{grad}\varphi - \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} (\mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{A}) \quad (2.2.9)$$

由以下向量恒等式

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ \frac{\partial A_y}{\partial t} \\ \frac{\partial A_z}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \dot{x} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dot{x} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_z}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{A} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

可知

$$\mathbf{F} = -e \text{grad}\varphi - \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{e}{c} \left[(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{V} \times (\text{rot} \mathbf{A}) \right] \quad (2.2.11)$$

又由于

$$\begin{aligned}
& V_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial A_x}{\partial z} + V_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - V_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\
&= V_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + V_z \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (V \cdot A)
\end{aligned}$$

及关于 y, z 轴上投影的另两个类似恒等式, 可得以下恒等式:

$$(V \cdot \nabla) A + V \times \text{rot} A = \text{grad}(V \cdot A) \quad (2.2.12)$$

于是(2.2.11)又可化为

$$F = -e \text{grad} \varphi - \frac{e}{c} \frac{dA}{dt} + \frac{e}{c} \text{grad}(V \cdot A) \quad (2.2.13)$$

取

$$V = e\varphi - \frac{e}{c} (V \cdot A) \quad (2.2.14)$$

则显然有

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{e}{c} A_x, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = e \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial x} (V \cdot A) \quad (2.2.15)$$

故有

$$\begin{aligned}
F_x &= -e \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{c} \frac{dA_x}{dt} + \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial x} (V \cdot A) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial V}{\partial x}
\end{aligned} \quad (2.2.16)$$

和 F_y 及 F_z 的类似算式。因此 Lorentz 力属于广义势力。

2.3 约束力的求法

在 Lagrange 方程中, 理想约束的约束力自动消除, 不出现在方程中。这正是 Lagrange 方程的一大优点。但在某些情况下, 往往不仅要求运动规律, 也要求约束力。为了求这种力, 可以考虑以下两种方法: 1) 解除与欲求约束力有关的约束, 将约束力显示出来, 然后按动静法或动力学普遍方程求解, 这种方法在初等动力学中是为人所熟知的, 不必赘述。2) 解除与欲求约束力有关的约

束,因而系统的自由度将增加。设所增加的自由度为 m ,约束力此时将以未知的主动力的身分出现。解除约束后的 Lagrange 方程将为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.3.1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j + Q'_j \quad (j=n+1, \dots, n+m) \quad (2.3.2)$$

其中 $L=L(q_1, q_2, \dots, q_n; q_{n+1}, \dots, q_{n+m}; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; \dot{q}_{n+1}, \dots, \dot{q}_{n+m}; t)$ 是解除约束后的系统的动势。 Q_j 为通常的广义主动力, Q'_j 为解除约束后出现的反力的广义力, 它们只能出现在(2.3.2)中, 一般说来, (2.3.1)及(2.3.2)是耦合的。为了符合原系统的实际状态, 还需引入约束条件, 即令 $q_{n+1}=q_{n+2}=\dots=q_{n+m}=0$ 。显然, 这时(2.3.1)式退化为解除约束前原系统的方程, 只含广义坐标 q_1, q_2, \dots, q_n 。由(2.3.1)式求出运动 q_1, q_2, \dots, q_n , 连同 $q_{n+1}=q_{n+2}=\dots=q_{n+m}=0$ 一起代入(2.3.2)式, 便可求得约束力 $Q'_{n+1}, Q'_{n+2}, \dots, Q'_{n+m}$ 。

例题 2.3.1 求椭圆摆(见例题 2.1.2)的摆杆拉力 N 。

解 在例题 2.1.2 中已列出未解除约束的原系统的 Lagrange 方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [m_1 \dot{x} + m_2 l \dot{x} + l \dot{\varphi} \cos \varphi] &= 0 \\ m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x} \cos \varphi &= -m_2 g l \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

为了求摆杆的约束反力, 可解除此杆的约束并以 N 表示杆的未知拉力, 解除约束后的系统有三个自由度, 可以广义坐标 x, φ , 及 r 表示其位形。新系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + m_2 \left[\dot{x}^2 + 2(r \dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{r} \sin \varphi) \dot{x} + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \right] \quad (b)$$

主动力的虚功为

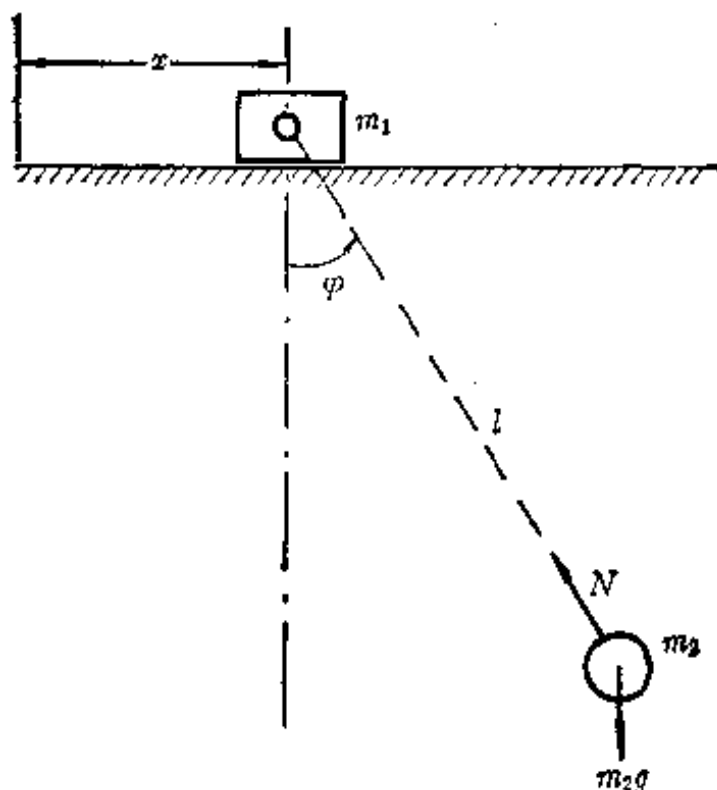


图 2.3

$$\delta'W = -m_2 g r \sin \varphi \delta \varphi + m_2 g \cos \varphi \delta r - N \delta r \quad (c)$$

对应坐标 r 的 Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt}(m_2 \dot{r} + m_2 \dot{x} \sin \varphi) - m_2(\dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + r \dot{\varphi}^2) = m_2 g \cos \varphi - N \quad (d)$$

$$\text{约束条件为: } r = l = \text{常数, 因而 } \dot{r} = \ddot{r} = 0 \quad (e)$$

代入方程(d), 化为

$$m_2 \sin \varphi \ddot{x} - m_2 l \dot{\varphi}^2 = m_2 g \cos \varphi - N \quad (f)$$

由此即得

$$N = -m_2 \sin \varphi \ddot{x} + m_2 l \dot{\varphi}^2 + m_2 g \cos \varphi \quad (g)$$

其中 x 及 φ 应由方程(a)及给定的初始条件求得。

2.4 能量积分

若系统的 Lagrange 函数 L 不显含时间 t^* , 即

$$L = L(q, \dot{q}) \quad (2.4.1)$$

* 函数 L 不显含 t 并不要求系统是定常的, 但定常系统的 Lagrange 函数一定不显含 t 。

則有以下关系

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \quad (2.4.2)$$

由 Lagrange 方程 (2.1.19), 可将上式化为

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \right] = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \quad (2.4.3)$$

或

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right) = 0 \quad (2.4.4)$$

故有

$$E \triangleq \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = h \quad (2.4.5)$$

h 是积分常数。函数 E 具有能量的量纲, 对保守系统而言, 它是系统的机械能 (见下面 (2.4.9) 式), 因而称其为系统的 广义能量。(2.4.5) 式表明, 当系统的 L 函数不显含时间 t 时, 其广义能量 E 在运动过程中不变, 即系统的广义能量守恒。(2.4.5) 式称为 广义能量积分 或 Jacobi 积分。

下面讨论广义能量积分的物理意义

1. 对于普通势的定常系统, 即保守系统, 将

$$L = T_2 - V \quad (2.4.6)$$

代入 (2.4.5) 式, 由 Euler 齐次函数定理, 可知

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T \quad (2.4.7)$$

于是我们有

$$E = 2T_2 - (T_2 - V) = T + V = h \quad (2.4.8)$$

这表明在保守系统情况下，广义能量积分就是系统的机械能守恒积分。也就是说，对于保守系统，广义能量就是系统的总机械能（动能加势能），它在运动中是不变的。

2. 对于一般自然系统，将 L 函数的表达式 (2.2.6) 代入 (2.4.5) 式，借助 Euler 齐次函数定理即得

$$E = T_2 + (V - T_0) = h \quad (2.4.9)$$

上式是 Jacobi 积分在非定常系统条件下的具体形式。将这积分和机械能守恒 (2.4.8) 式相比较，可看到它们在数学上是类似的，即在形式上也可以认为 Jacobi 积分是“动能”与“势能”之和保持不变，只不过这里的“动能”专指动能 T 中的二次齐次型 T_2 ，不包括与系统的非定常性有关的 T_1 及 T_0 ；而“势能”则包括主动力的势能 V 及与系统的非定常性有关的一部分动能 T_0 。二者之差。将方程 (2.1.19) 中的 T 换成 $T_2 + T_1 + T_0$ ，则得：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_2}{\partial q_j} = - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_1}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial (V - T_0)}{\partial q_j} \quad (2.4.10)$$

这表明 T_1 相当于广义势，而 $-T_0$ 则表示由与系统的非定常性有关的一部分动能转化而来的势能。在 L 不显含时间 t 的条件下， T_1 也不显含时间，因而

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_1}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \frac{\partial T_1}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] \\ &= \dot{T}_1 - T_1 = 0, \end{aligned}$$

即广义有势力 $\frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_1}{\partial q_j}$ 不作功。按照 Hertz 的观点， T_2 可视为“明显运动”的能量，而 $-T_0$ 可视为“隐蔽运动”的能量。 $-T_0$ 也只与广义坐标有关，和势函数 V 是类似的。

从下面的例题中将会看到，在等角速转动的非定常系统中，这部分转化的动能等价于系统在一个相当的离心力场中之势能，也

简称离心势能。

例题2.4.1 讨论人造地球卫星的运动

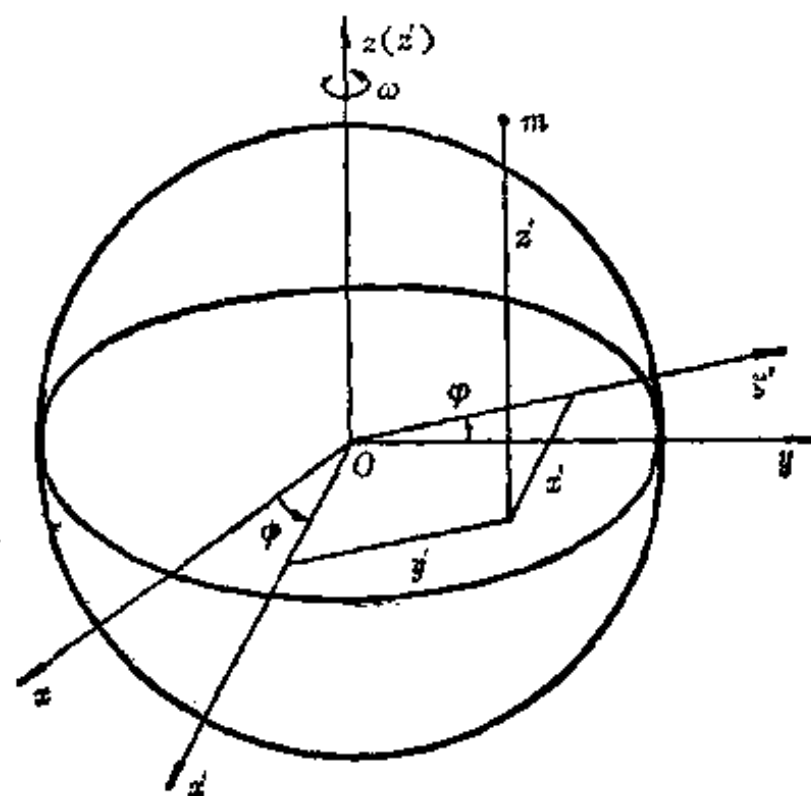


图 2.4

将随地心在相对星相空间平移的坐标系 $Oxyz$ 作为惯性参考系。令 z 轴与地球自转轴重合。卫星在此惯性系中的坐标为 x, y, z ，取坐标系 $Ox'y'z'$ 与地球固结，并使 z' 与 z 重合（见图2.4）。将地球自转角速度记作 ω ，则 $Ox'y'z'$ 的转角 $\varphi = \omega t$ 。

取 x', y', z' 为卫星的广义坐标，则有：

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \\ y &= x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \\ z &= z' \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

这是一个非定常系统，系统的动能

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) + m(x'\dot{y}' - y'\dot{x}')\omega \\
&\quad + \frac{1}{2}m\omega^2(x'^2 + y'^2) \\
&= T_2 + T_1 + T_0
\end{aligned} \tag{b}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) \\ T_1 &= m(x'\dot{y}' - y'\dot{x}')\omega \\ T_0 &= \frac{1}{2}m\omega^2(x'^2 + y'^2) \end{aligned} \right\} \tag{c}$$

主动力是地球引力, 它是有势的, 势能 $V = V(x', y', z')$ 。于是 Lagrange 函数为

$$L = T - V = T_2 + T_1 + T_0 - V = L(x', y', z') \tag{d}$$

代入 Lagrange 方程后, 得

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2x') - X' &= 0 \\ m(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2y') - Y' &= 0 \\ m\ddot{z}' - Z' &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{e}$$

其中 X', Y', Z' 是引力在 $Ox'y'z'$ 坐标轴上的投影。

这是一个非定常系统, 但 Lagrange 函数 L 并不显含 t , 因而有广义能量积分

$$T_2 + (V - T_0) = h \tag{f}$$

即

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) + V(x', y', z') - \frac{1}{2}m\omega^2(x'^2 + y'^2) = h \tag{g}$$

由 (c) 式可以看出, T_2 是卫星相对地球运动的动能; T_0 是卫星随地球转动而产生的动能。由于 $-\frac{\partial}{\partial x'}(-T_0) = m\omega^2x'$, $-\frac{\partial}{\partial y'}(-T_0) =$

$m\omega^2 y'$ 正是因坐标系转动而出现的离心力, 而“ $-T_0$ ”就是由离心惯性力形成的势能, 故称其为离心势能。至于 T_1 , 由 $\frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{x}'}$ $-\frac{\partial T_1}{\partial x'} = 2m\omega \dot{y}'$, $\frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{y}'} - \frac{\partial T_1}{\partial y'} = 2m\omega \dot{x}'$ 可知, 广义势 T_1 所产生的广义力正是相对运动的科氏惯性力, 是不作功的(见下面 2.5.2 节), 因而在 (g) 式中不涉及。

2.5 系统总能量的变化, 陀螺力和耗散力

2.5.1 总机械能的变化

我们仍考察具有理想约束的完整系统。设在此系统上, 除普通有势力外, 还作用有非有势的广义力 $Q_j (j=1, 2, \dots, n)$ 。因此 Lagrange 方程有如下的形式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.5.1)$$

因系统具有普通势 V , 所以其总机械能(动能与势能之和)为

$$E = T + V \quad (2.5.2)$$

而总机械能的变化率为

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} \quad (2.5.3)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) + \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

将动能表达式(1.7.2)代入上式, 利用 Euler 齐次函数定理及 Lagrange 方程(2.1.11), 使得

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{dV}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j \quad (2.5.5)$$

将上式代入(2.5.3)式,得

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j + \left[\frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} \right] + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.5.6)$$

由上式可知,系统总机械能的变化由三方面因素所致:其一为非有势力的功率 $\sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j$; 其二为约束的非定常性所产生的能流 $\frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{dT}{dt}$ (非定常约束的约束力在实位移上是要作功的); 其三是外场势能 V 随时输给系统的能流。

若系统是定常的,此时动能 $T = T_2$, 且 $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, 于是

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.5.7)$$

若系统不但是定常的,而且势场也是定常的,即势函数不显含 t , $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, 则有

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j \quad (2.5.8)$$

此时,系统总机械能的变化完全是由非有势力做功所致。

2.5.2 陀螺力

如果作用在系统上的一种非有势的广义力 Γ_j 不作功,即

$$\sum_{j=1}^n \Gamma_j \dot{q}_j = 0 \quad (2.5.9)$$

则称此广义力为陀螺力或回转力。由于陀螺力功率为零,它既不能使系统的能量增加,也不会使其减少,因此有时又将陀螺力称为无功力。对于只有陀螺力这样的非有势力的定常有势系统,根据(2.4.8)式可知,仍有能量积分:

$$E = h \quad (2.5.10)$$

下面是陀螺力的两个实例。

1. 计算科氏惯性力的功率

设动坐标系的角速度为 ω , 则质点 P_i 的科氏惯性力

$$F_i = -2m_i(\omega \times v_i) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.5.11)$$

m_i 是 P_i 的质量, v_i 是质点 P_i 的相对速度, 而

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n -2m_i(\omega \times v_i) \cdot v_i = 0 \quad (2.5.12)$$

可见, 科氏惯性力是一种陀螺力。

2. 计算带电粒子在磁场中运动时 Lorentz 力的功率

设粒子电荷为 e , 磁场强度为 H , 则 Lorentz 力为:

$$F = \frac{e}{c} v \times H \quad (2.5.13)$$

c 是光速, v 是粒子运动速度, Lorentz 力的功率为

$$F \cdot v = \frac{e}{c} (v \times H) \cdot v = 0 \quad (2.5.14)$$

因之, Lorentz 力也是一种陀螺力。

以上两例中的陀螺力都与质点运动的速度有关, 现在我们来考察陀螺力为广义速度 \dot{q} 的线性齐次函数的一般情形, 设

$$\Gamma_j = \sum_{k=1}^n g_{jk} \dot{q}_k \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.5.15)$$

如果 Γ_j 在任何广义速度中之功率总和为零, 即

$$\sum_{j=1}^n \Gamma_j \dot{q}_j = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n g_{jk} \dot{q}_k \dot{q}_j = 0 \quad (2.5.16)$$

则称 Γ_j 为广义陀螺力。由于 $\sum_{j=1}^n \Gamma_j \dot{q}_j$ 是广义速度的二次型, 如

恒等于零, 则要求系数矩阵 $[g_{jk}]$ 必须是反对称的, 即

$$g_{kk}=0, \quad g_{kj}=-g_{jk} \quad (k, j=1, 2, \dots, n) \quad (2.5.17)$$

反之, 如果 $[g_{jk}]$ 是反对称的, 等式(2.5.16)也一定成立。由此可知, 形如(2.5.15)式的非有势力为陀螺力的充要条件是其系数矩阵是反对称的。不难验证上两例中的系数矩阵是反对称的。

以下研究广义陀螺力的两种重要情况。

2.5.3 与非定常约束有关的广义陀螺力

设有非定常的完整系统, 其广义坐标为 q_1, q_2, \dots, q_n , 动能可表为

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \quad (2.5.18)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ T_1 &= \sum_{j=1}^n a_j \dot{q}_j \end{aligned} \right\} \quad (2.5.19)$$

a_{jk}, a_j, T_0 都是 q, t 的函数(见1.7.1)。为书写简单起见, 令

$$\mathcal{E}_j \triangleq \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \quad (2.5.20)$$

这是一个线性微分算子, 利用这个算子可将 Lagrange 方程表为

$$\mathcal{E}_j(T_2) = Q_j - \mathcal{E}_j(T_1) - \mathcal{E}_j(T_0) \quad (2.5.21)$$

其中

$$\mathcal{E}_j(T_2) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_2}{\partial q_j} \quad (2.5.22)$$

$$-\mathcal{E}_j(T_0) = \frac{\partial T_0}{\partial q_j} \quad (2.5.23)$$

$$\begin{aligned} -\mathcal{E}_j(T_1) &= -\frac{da_j}{dt} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \dot{q}_k \\ &= -\frac{\partial a_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial a_k}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

令

$$g_{jk} = \frac{\partial a_k}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_k} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5.25)$$

则显然有 $g_{jk} = -g_{kj}$ 。这表明 T_1 将导致广义陀螺力的产生。但这样的陀螺力并非真实力，它是由于系统的非定常性对以 T_2 表征的系统运动所施加的影响，故又称其为拟陀螺力。系统的运动微分方程最后归结为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_2}{\partial q_j} = Q_j + \frac{\partial T_0}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^n g_{jk} \dot{q}_k \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.5.26)$$

值得注意的是，上式右端除了广义陀螺力外，还有一项 $\frac{\partial T_0}{\partial q_j}$ ，也可以看成是一种保守力。这在研究 Jacobi 积分时已出现过。可见，系统的非定常性除表现在 T_2 的系数 a_{jk} 可能含 t 外，还表现在 T_0 及 T_1 上，在 $\frac{\partial a_i}{\partial t} = 0$ 的情况下，它们以拟保守力及拟陀螺力的面目出现在运动微分方程中，此时， T_1 全部体现为拟陀螺力。

例题2.5.1 列出摆长为 l 的傅科摆微小摆动的运动方程，并讨论其运动特点。

解 如图 2.5 所示，取固定于地球表面（纬度为 φ ）某处的坐标系 $O' \xi \eta \zeta$ ， $O' \xi$ 、 $O' \eta$ 、 $O' \zeta$ 分别指向当地正南、正东和向上。设

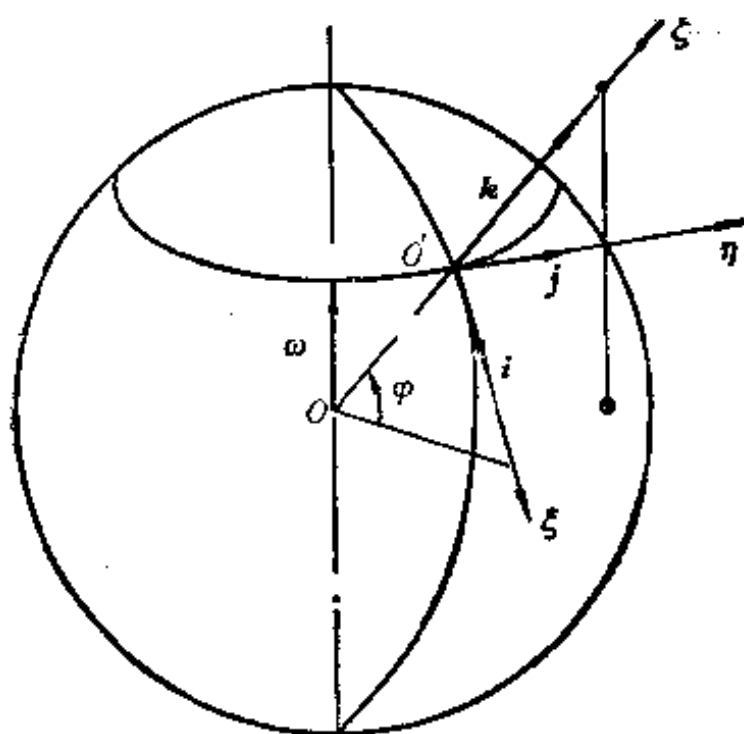


图 2.5

摆的悬点在 $O'\xi$ 轴上, 下端正好在地球表面。因而摆锤坐标必须满足约束方程

$$\xi^2 + \eta^2 + (l - \xi)^2 = l^2$$

由此得到

$$\xi = l - l\sqrt{1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{l^2}}$$

在微小摆动时, $\xi \ll l, \eta \ll l$ 。因而上式可近似化为

$$\xi \approx l - l\left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2l^2}\right) = \frac{\xi^2 + \eta^2}{2l} \quad (a)$$

摆锤的绝对速度等于随地球自转之牵连速度及对地球之相对速度的向量和:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r \quad (b)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为地球自转的角速度向量; \mathbf{r} 为自地心 O 引向摆锤的矢径; \mathbf{v}_r 为摆锤的相对速度。它们沿 $O'\xi\eta\zeta$ 坐标系的分解式为

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega \cos\varphi \mathbf{i} + \omega \sin\varphi \mathbf{k} \quad (c)$$

$$\mathbf{r} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + (\xi + R) \mathbf{k} \approx \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + R \mathbf{k} \quad (d)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_r = \dot{\xi} \mathbf{i} + \dot{\eta} \mathbf{j} + \dot{\xi} \mathbf{k} \approx \dot{\xi} \mathbf{i} + \dot{\eta} \mathbf{j} \quad (e)$$

其中 R 为地球半径, 将 (c) 式至 (e) 式代入 (b) 式可得

$$\mathbf{v} = (\dot{\xi} - \omega \eta \sin \varphi) \mathbf{i} + (\dot{\eta} + \omega R \cos \varphi + \omega \xi \sin \varphi) \mathbf{j} - \omega \eta \cos \varphi \mathbf{k} \quad (f)$$

摆的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (g)$$

将 (f) 式代入, 可得动能表达式中的三项如下:

$$T_0 = O(\omega^2) \quad (h)$$

$$T_1 = m\omega(-\dot{\xi}\eta \sin \varphi + \dot{\eta}\xi \sin \varphi + \eta R \cos \varphi) \quad (i)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) \quad (j)$$

因 ω 很小, 所以相对于 T_1 和 T_2 而言, 与 ω^2 同阶的小量 T_0 可以略去不计。

摆的势能为

$$V = mg\xi \approx mg \frac{\xi^2 + \eta^2}{2l} \quad (k)$$

将动能和势能表达式代入 Lagrange 方程, 得

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\xi} &= 2m\omega\dot{\eta} \sin \varphi - mg \frac{\xi}{l} \\ m\ddot{\eta} &= -2m\omega\dot{\xi} \sin \varphi - mg \frac{\eta}{l} \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

这就是傅科摆微小摆动的运动方程式, 方程右端的第一项由 T_1 而来, 就是科氏惯性力。 ξ 与 η 的系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 2m\omega \sin \varphi \\ -2m\omega \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (m)$$

是反对称的, 因而属于陀螺力。

为了求方程组 (l) 的解, 将前一方程乘以 η , 后一方程乘以 ξ ,

然后相减即得:

$$\eta \dot{\xi} - \xi \dot{\eta} = 2\omega \sin \varphi (\eta \dot{\eta} + \xi \dot{\xi})$$

或

$$\frac{d}{dt}(\eta \dot{\xi} - \xi \dot{\eta}) = \omega \sin \varphi \frac{d}{dt} r_1^2 \quad (n)$$

式中 $r_1^2 = \xi^2 + \eta^2$, 上式左边表示单位质量对 $O'\xi$ 轴的动量矩对 t 的导数, 如改用极坐标表达, (n) 式经积分成为:

$$r_1^2 \dot{\theta} = \omega r_1^2 \sin \varphi + C \quad (o)$$

式中 $\operatorname{tg} \theta = \frac{\xi}{\eta}$, C 为积分常数。现在考虑初始条件为 $t=0$, $r_1=0$ 的情形, 此时有 $C=0$, 方程(o)成为

$$\dot{\theta} = \omega \sin \varphi = \text{常数} \quad (p)$$

再积分得:

$$\theta = \theta_0 + (\omega \sin \varphi) t \quad (q)$$

其中 θ_0 为 θ 的初值。

(p) 或(q)式表明摆锤的摆动平面以角速度 $\omega \sin \varphi$ 绕 $O'\xi$ 轴旋转, 摆动平面旋转一周所需时间为

$$T' = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi} \quad (r)$$

为了求另一坐标 r_1 的解, 可以利用 Jacobi 积分, 由于 T_0 项可略去不计, Jacobi 积分(2.4.6)可写为

$$T_2 + V = h$$

或

$$\frac{m}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + mg \frac{\xi^2 + \eta^2}{2l} = h$$

用极坐标表示, 变为

$$r_1^2 + r_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} r_1^2 = h \left(= \frac{2h}{m} \right)$$

将(p)式的 θ 代入,得

$$\ddot{r}_1 + \left(\omega^2 \sin^2 \varphi + \frac{g}{l} \right) r_1 = k'$$

将两端对 t 求导,可得

$$\ddot{r}_1 + \left(\omega^2 \sin^2 \varphi + \frac{g}{l} \right) r_1 = 0 \quad (s)$$

它的解是我们熟知的简谐振动

$$r_1 = r_0 \sin(kt + \alpha) \quad (t)$$

其中 r_0, α 为积分常数, k 由下式表示:

$$k = \sqrt{\omega^2 \sin^2 \varphi + \frac{g}{l}} \quad (u)$$

r_1 的周期为

$$T'' = 2\pi \frac{1}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \varphi + \frac{g}{l}}} \quad (v)$$

可以看出,由于地球自转使摆动周期变短,但这种变化很小,是 ω^2 量级的。

2.5.4 扰动微分方程中的广义陀螺力

本节限于讨论 n 自由度的定常完整系统,其动能仅为广义坐标及广义速度的函数,而不显含 t :

$$T = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (2.5.27)$$

所谓“扰动”是指动力学方程某一特解 $q_j(t)$ 与邻近的另一特解 $q_j^*(t)$ 之差,也称原运动 $q(t)$ 的偏离,以 ξ_j 表示:

$$\xi_j(t) \approx q_j^*(t) - q_j(t) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.5.28)$$

扰动微分方程是指小偏离 ξ_j 应满足的方程,对于研究原运动的稳定性是有重要意义的。为此,列出系统动能及广义力的偏离如下:

$$\left. \begin{aligned} \Delta T &= T(\dot{q} + \dot{\xi}, q + \xi) - T(\dot{q}, q) \\ \Delta Q &= Q(\dot{q} + \dot{\xi}, q + \xi, t) - Q(\dot{q}, q, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.29)$$

显然, ΔT 与 ΔQ 应满足 Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Delta T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \Delta T}{\partial q_j} = \Delta Q_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.5.30)$$

在小偏离条件下, 可将 ΔT 及 ΔQ 的幂级数展开式中只取到 ξ_j 及 $\dot{\xi}_j$ 的一阶小量, 今分别运算如下:

$$\begin{aligned} \Delta T &= T(\dot{q} + \dot{\xi}, q + \xi) - T(\dot{q}, q) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{\xi}_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \xi_k \right) \end{aligned} \quad (2.5.31)$$

故有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \Delta T \right) &= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \dot{\xi}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} \xi_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \dot{\xi}_k + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^3 T}{\partial q_\alpha \partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \dot{q}_\alpha \xi_k \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} \dot{\xi}_k + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^3 T}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_j \partial q_k} \dot{q}_\alpha \xi_k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^3 T}{\partial q_\alpha \partial \dot{q}_j \partial q_k} \dot{q}_\alpha \xi_k \right) \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j} (\Delta T) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q_j \partial \dot{q}_k} \dot{\xi}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial q_j \partial q_k} \xi_k \right) \quad (2.5.33)$$

$$\Delta Q_j = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_k} \dot{\xi}_k + \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \xi_k \right) \quad (2.5.34)$$

将以上三式代入方程 (2.5.30) 后, 得到以下结果:

$$\sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{\xi}_k + b_{jk} \dot{\xi}_k + g_{jk} \xi_k + d_{jk} \xi_k) = X_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.5.35)$$

其中各系数由下列各式表示:

$$a_{jk} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \quad (2.5.36)$$

$$b_{jk} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^3 T}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \dot{q}_\alpha - \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_k} \quad (2.5.37)$$

$$g_{jk} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} - \frac{\partial^2 T}{\partial q_j \partial \dot{q}_k} \quad (2.5.38)$$

$$d_{jk} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^3 T}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_j \partial q_k} \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^3 T}{\partial q_\alpha \partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \dot{q}_\alpha - \frac{\partial^2 T}{\partial q_j \partial q_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \quad (2.5.39)$$

由以上结果可知, g_{jk} 对于指标具有反对称性, 因之在列出扰动方程时, 会出现广义陀螺力; 至于 b_{jk} 对于指标 j, k 一般既不具有对称性也不具有反对称性, 但矩阵 $\|b_{jk}\|$ 总可以分解为对称矩阵 $\|b'_{jk}\|$ 与反对称矩阵 $\|b''_{jk}\|$ 之和, 即

$$\sum_{k=1}^n b_{jk} \xi_k = \sum_{k=1}^n b'_{jk} \xi_k + \sum_{k=1}^n b''_{jk} \xi_k \quad (2.5.40)$$

显然, $\sum_{k=1}^n b''_{jk} \xi_k$ 属于广义陀螺力, 可以和与 g_k 有关之项合并, 至于

$\sum_{k=1}^n b'_{jk} \xi_k$ 则可视为一种广义耗散力(见下节)。

例题 2.5.2 列出旋转摆的受扰运动方程。

解 在例题 2.1.1 中我们曾研究过摆的定常运动及在定常运动状态附近的受扰运动, 不过前提是 $\omega = \text{常数}$, 现在我们把 ω 也看成是可变的, 即

$$\omega = \theta \quad (a)$$

再来重新研究其受扰运动。此时, 系统的动能及势能分别为

$$T = \frac{m}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \sin^2 \varphi \dot{\theta}^2) \quad (b)$$

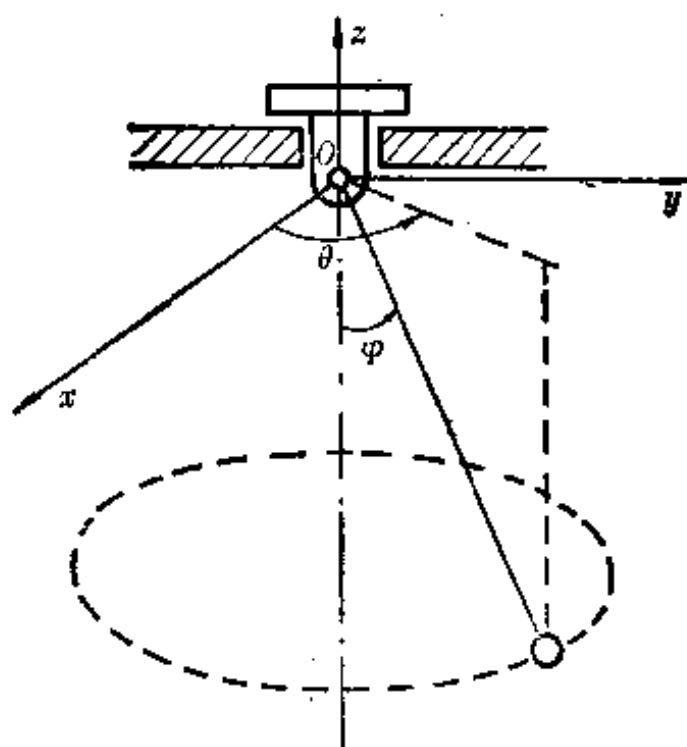


图 2.6

$$V = -mgl \cos \varphi \quad (c)$$

Lagrange 方程为

$$\left. \begin{aligned} ml^2 \ddot{\varphi} - ml^2 \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi &= -mgl \sin \varphi \\ ml^2 \frac{d}{dt} (\dot{\theta} \sin^2 \varphi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

显然, 此方程存在相当于前述定常运动的特解:

$$\dot{\theta} = \omega = \text{常数}, \quad \varphi = \varphi_0 = \text{常数} \quad (e)$$

ω 与 φ_0 的相应关系为

$$(\omega^2 l \cos \varphi - g) \sin \varphi = 0 \quad (f)$$

现在研究在定常运动状态

$$\omega^2 l \cos \varphi_0 - g = 0 \quad (g)$$

附近的受扰运动, 取

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \xi \\ \sin(\varphi_0 + \xi) &= \sin \varphi_0 + \xi \cos \varphi_0 + \dots \\ \cos(\varphi_0 + \xi) &= \cos \varphi_0 - \xi \sin \varphi_0 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

$$\dot{\theta} = \omega + \eta$$

代入方程(d)后,得到

$$\left. \begin{aligned} & m l^2 \ddot{\xi} - m l^2 (\omega + \eta)^2 (\sin \varphi_0 + \xi \cos \varphi_0) (\cos \varphi_0 - \xi \sin \varphi_0) \\ & = -m g l (\sin \varphi_0 + \xi \cos \varphi_0) \\ & \frac{d}{dt} [(\omega + \eta) (\sin \varphi_0 + \xi \cos \varphi_0)] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

经整理后,略去二阶以上小量,并约掉定常运动应满足的方程(d),即得扰动方程如下:

$$\left. \begin{aligned} & \ddot{\xi} - \underline{\omega \sin 2\varphi_0} \cdot \eta - \omega^2 \xi \cos 2\varphi + \frac{g}{l} \xi \cos \varphi_0 = 0 \\ & \eta \sin^2 \varphi_0 + \underline{\omega \sin 2\varphi_0} \cdot \xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

显而易见,方程中划线的项形成了广义陀螺力。

2.5.5 耗散力及耗散函数

如果非有势力的功率 P 恒小于零,即

$$P = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i < 0 \quad (2.5.41)$$

则称这种力 \mathbf{F}_i 为耗散力。在定常系统情况下,上式也可以用广义坐标的形式表示为

$$P = \sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j < 0 \quad (2.5.42)$$

这是因为

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) \dot{q}_j \\ &= \sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j \end{aligned} \quad (2.5.43)$$

当系统存在耗散力时,由(2.5.8)可知,系统的总机械能将不断耗

散(即减少)。“耗散力”一词即由此而来。

工程中经常遇到的各种阻尼都是耗散力的实例。以下先讨论粘性阻尼的情况, 设作用在第 i 个质点上的粘性阻力为

$$\mathbf{F}_i = -c_i \mathbf{v}_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (2.5.44)$$

其中 c_i 为一正数, 称为粘性阻尼系数, 此时恒有

$$P = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i = - \sum_{i=1}^N c_i \cdot \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = - \sum_{i=1}^N c_i v_i^2 < 0 \quad (2.5.45)$$

所以粘性阻尼属于耗散力。由粘性阻尼所形成的广义力为

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} = - \sum_{i=1}^N c_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \dot{q}_k = - \sum_{k=1}^n b_{jk} \dot{q}_k \quad (2.5.46)$$

其中

$$b_{jk} = \sum_{i=1}^N c_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_k} \quad (2.5.47)$$

换言之, 广义粘性阻尼是广义速度的线性型, 其功率恒小于零, 即

$$P = \sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k < 0 \quad (2.5.48)$$

由此可知, 系数矩阵 $[b_{jk}]$ 必是正定的(这从(2.5.47)式与惯性系数

$a_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_k}$ 的比较中也可得知)。推而广之, 不论力之

机理如何, 只要广义力 Q_j 是广义速度的线性型:

$$Q_j = - \sum_{k=1}^n b_{jk} \dot{q}_k \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.5.46)$$

而且 $[b_{jk}]$ 是正定的, 则 $Q_j (j=1, 2, \dots, n)$ 一定是耗散力。令

$$F = - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (2.5.49)$$

则广义耗散力又可表为

$$Q_j = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.5.50)$$

F 称分 Rayleigh 耗散函数。比较 (2.5.48) 式及 (2.5.49) 式, 可知, Rayleigh 耗散函数正好是耗散力的功率 (即能量耗散率) 的两倍取负值, 即

$$\frac{dE}{dt} = P = -2F \quad (2.5.51)$$

对于有线性粘滞阻尼的系统, 其 Lagrange 方程有如下的简单形式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.5.52)$$

或

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.5.53)$$

由此可知, 对于既有保守力也有耗散力的系统, 为了列出运动方程, 只要建立动力学量 T 、 V 及 F 即可。

例题 2.5.3 如图所示的二自由度系统, 其中两质点之质量分别为 m_1 及 m_2 , 弹簧刚度分别分 k_1 及 k_2 , 阻尼器的阻尼系数分别为 c_1 及 c_2 , 列出此系统的 Lagrange 方程。

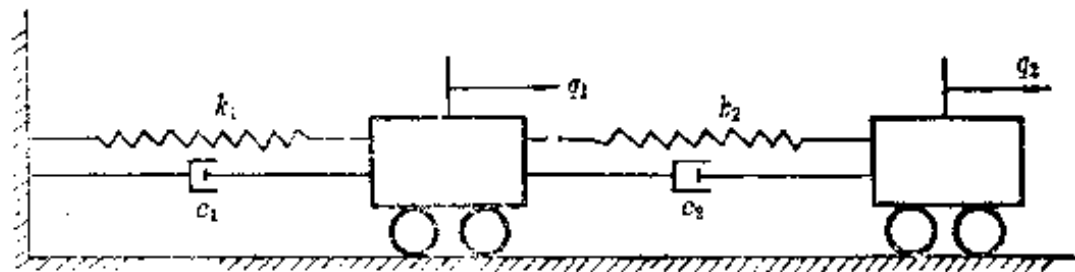


图 2.7

解 取质点偏离各自的静平衡位置的位移 q_1 , q_2 作为广义坐标, 于是系统的动能和势能分别为:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) \quad (a)$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_2 - q_1)^2 \quad (b)$$

按(2.5.45)式,可得耗散函数

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i (\Delta v_i)^2 = \frac{1}{2} [c_1 \dot{q}_1^2 + c_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2] \quad (c)$$

将 T 、 V 及 F 之值代入 Lagrange 方程,得到:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + (c_1 + c_2) \dot{q}_1 - c_2 \dot{q}_2 + (k_1 + k_2) q_1 - k_2 q_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{q}_2 - c_2 \dot{q}_1 + c_2 \dot{q}_2 - k_2 q_1 + k_2 q_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

这组方程可用多种方法求解,例如用 Laplace 变换式按复模态迭加法求解等,详见振动理论的专著*。

对于更广泛的一类阻尼力,还可由 Лурье 所提出的阻尼公式来概括:

$$F_i = -k_i f_i(v_i) \frac{v_i}{v} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (2.5.54)$$

其中 F_i 是第 i 个质点所受的阻力, k_i 是坐标和时间的正值函数, $f_i(v_i)$ 也是正值函数, v_i 为该质点的速度向量, v_i 为 v_i 的模。显然,它符合耗散力的定义:

$$P = \sum_{i=1}^N F_i \cdot v_i = - \sum_{i=1}^N k_i f_i(v_i) v_i < 0 \quad (2.5.55)$$

相应的广义耗散力为

$$Q_j = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N k_i f_i(v_i) \frac{v_i}{v_i} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (2.5.56)$$

利用关系式 $\frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}$ 可将上式化为

* 见参考文献[18]

$$\begin{aligned}
Q_j &= - \sum_{i=1}^N k_i f_i(v_i) \frac{v_i}{v_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \\
&= - \sum_{i=1}^N k_i f_i(v_i) \frac{1}{v_i} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial (v_i \cdot v_i)}{\partial \dot{q}_j} \\
&= - \sum_{i=1}^N k_i f_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N k_i \int_0^{v_i} f_i(v) dv
\end{aligned} \tag{2.5.57}$$

令

$$\Phi = \sum_{i=1}^N k_i \int_0^{v_i} f_i(v) dv \tag{2.5.58}$$

则

$$Q_j = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \quad (j=1, 2, \dots, n) \tag{2.5.59}$$

Φ 称为 Лурье耗散函数，它也是一个恒为正值的函数。前面所述的 Rayleigh 耗散函数是它的一个特例。对于单项速度幂函数的阻尼力，它仍有耗散功率的涵义。例如，若取

$$f(v_i) = v_i^m \tag{2.5.60}$$

其中 m 为正整数，则由 (2.5.58) 式可得：

$$\Phi = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^N k_i v_i^{m+1} = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^N k_i \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right|^{m+1} \tag{2.5.61}$$

由此可见， Φ 是广义速度 \dot{q}_j 的 $m+1$ 次齐次函数（假定系统是定常的），因而耗散函数的功率为：

$$P = \sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \tag{2.5.62}$$

再由 Euler 齐次函数定理可得

$$P = -(m+1) \Phi \tag{2.5.63}$$

上式表明,耗散力的总功率和耗散函数 Φ 成正比; $m=0$ 相当于干摩擦, $m=1$ 相当于线性粘滞阻尼, $m=2$ 相当于与速度平方成正比的流体阻尼。

对于同时受到保守力及耗散力作用的系统, 其运动方程可表为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.5.64)$$

2.6 循环积分

若 n 自由度系统的 Lagrange 函数 L 中不含某个坐标 q_r , 即

$$\frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \quad (2.6.1)$$

对称 q_r 为系统的循环坐标。显然, 对应的速度 \dot{q}_r 必须包含在 L 中, 否则系统将与广义坐标 q_r 无关, 而是 $(n-1)$ 个自由度的。当然, 循环坐标可以不止一个, 如果 q_1, q_2, \dots, q_n 均为循环坐标, 即 Lagrange 函数具有以下形式:

$$L = L(q_{k+1}, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, \dot{q}_{k+1}, \dots, \dot{q}_n; t) \quad (2.6.2)$$

此时, 函数 L 对于每个循环坐标的偏导数都等于零:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (2.6.3)$$

如果系统是有势的, 即除有势力外不存在非有势力, 则对应每个循环坐标的 Lagrange 方程变为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (2.6.4)$$

由此立即得到 k 个首次积分:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = C_j \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (2.6.5)$$

其中 C_j 为积分常数; 形如(2.6.5)式的积分称为循环积分。显然,

系统有多少个循环坐标,便有多少个循环积分,引入记号

$$p_j \triangleq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.6.6)$$

并称 p_j 为第 j 个广义动量。于是循环积分(2.6.5)可以解释为:
在存在循环坐标 q_j 的情况下,对应的广义动量 p_j 不变,或广义动量守恒。从下面所述的两种运动情况,可以说明循环积分或广义动量守恒的含义:

(一) 系统沿 x 轴可以作刚体式的平移,而且外力的主向量在 x 轴上的投影为零。

此时可取 x 作为一个广义坐标,且应有 $\frac{\partial L}{\partial x} = Q_x = 0$ 。因此 x 是循环坐标,而循环积分为

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = C_x \quad (2.6.7)$$

又

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{x}} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{x}} \right) \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

利用关系 $\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial r_i}{\partial x}$ 可将上式化为

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial x} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial x} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial x} \right) \quad (2.6.9)$$

由于各点的坐标 x_i 可表为

$$x_i = x + \xi_i$$

其中 x 表示各质点共同的刚体位移, ξ_i 表示各质点在刚体位移之外的附加位移,这种附加位移与其它广义坐标有关,而与 x 无关。

因此, 我们有

$$\frac{\partial x_i}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y_i}{\partial x} = \frac{\partial z_i}{\partial x} = 0$$

(2. 6. 9) 式可化为

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i$$

这正是系统的动量沿 x 轴的投影。而循环积分 (2. 6. 7) 则成为

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i = C_x \quad (2. 6. 10)$$

这正是熟知的动量守恒定理: 当外力主向量在 x 轴上的投影等于零 ($\frac{\partial L}{\partial x} = 0$) 时, 系统的动量在 x 轴上的投影保持不变。

(二) 系统绕 z 轴可作刚体式的转动, 且对于 z 轴之外力主矩等于零。

此时可取绕 z 轴的转角 φ 作为一个广义坐标, 从而有 $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_\varphi = 0$, 因此 φ 是循环坐标, 循环积分为

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C_\varphi \quad (2. 6. 11)$$

和情形 (一) 相似, 我们有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial \dot{\varphi}} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial \dot{\varphi}} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial \dot{\varphi}} \right) \quad (2. 6. 12)$$

以 r_i, φ_i, z_i 表示各质点的柱坐标, 则

$$x_i = r_i \cos \varphi_i, \quad y_i = r_i \sin \varphi_i$$

因而

$$d\varphi_i = d\varphi$$

于是有以下关系:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \varphi} = \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_i} = -r_i \sin \varphi_i = -y_i$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial \varphi} = \frac{\partial y_i}{\partial \varphi_i} = r_i \cos \varphi_i = x_i$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial \varphi} = 0$$

代入(2.6.12)式后,得到

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \sum_{i=1}^N m_i (-\dot{x}_i y_i + \dot{y}_i x_i) \quad (2.6.13)$$

这正是系统对 z 轴之动量矩;因而循环积分(2.6.11)成为

$$\sum_{i=1}^N m_i (-\dot{x}_i y_i + \dot{y}_i x_i) = C_p \quad (2.6.14)$$

这正是熟知的动量矩守恒定理:当外力对 z 轴之主矩等于零 ($\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$) 时,系统对 z 轴之动量矩保持不变。

由以上的讨论可以看出广义动量

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

的意义:它概括了我们在牛顿力学中所熟悉的两个物理量——动量和动量矩。当 q_j 表示整个系统沿某轴作刚体式平移时,相应的广义动量就是系统的总动量在该轴上的投影;当 q_j 表示整个系统绕某轴作刚体式转动时,相应的广义动量就是系统对该轴之总动量矩。当 q_j 不具有上述两个广义坐标的几何意义时,广义动量 p_j 不一定有明显的物理意义,要作具体分析。牛顿力学中的两个守恒定理——动量守恒及动量矩守恒定理都是循环积分的特例。循环积分都表示某运动量的守恒,有些有明显的物理意义,有些则没有。但是,不管有没有明显的物理意义,它们都能使运动微分方程降阶。因此在选取广义坐标时应对系统有无运动守恒进行分析,

以便得到尽可能多的循环坐标,从而得到尽可能多的循环积分。

如果系统是有势的,则存在广义能量积分(或机械能守恒积分)。能量积分和循环积分都是系统的首次积分,都可以使系统降阶(描述系统运动的微分方程组各方程阶数之和,称为系统的阶)。

例题 2.6.1 一光滑圆管可绕竖直轴转动,其转动惯量为 I ,在圆管内放置一质点,其质量为 m ,圆环半径为 r ,列出此系统的 Lagrange 方程,并通过首次积分求解。

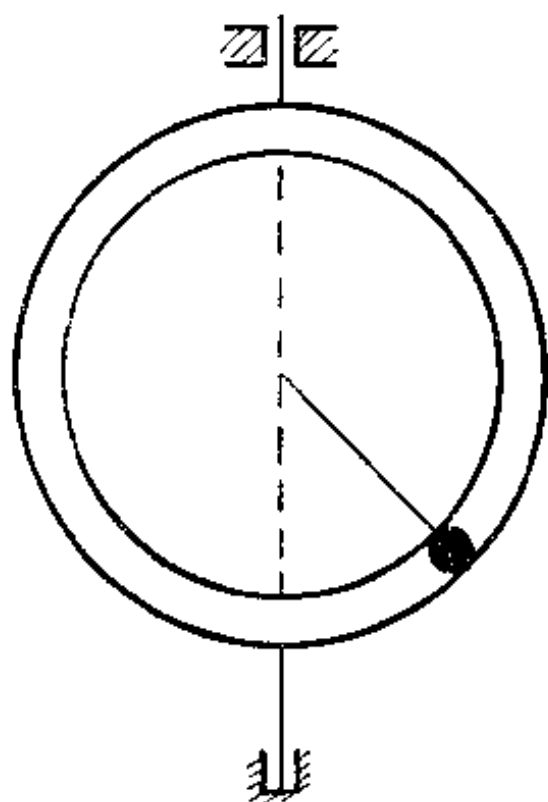


图 2.8

解 系统的位形由圆环绕竖直轴之转角 φ_1 及质点在圆环内的角坐标 φ_2 表示。系统的动能及势能分别为

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m (r^2 \dot{\varphi}_2^2 + r^2 \dot{\varphi}_1^2 \sin^2 \varphi_2) \quad (a)$$

$$V = -mg \cos \varphi_2 \quad (b)$$

系统的 Lagrange 方程为

$$\left. \begin{aligned} I\dot{\varphi}_1 + mr^2(\sin^2\varphi_2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2\cos\varphi_2) &= 0 \\ mr^2\dot{\varphi}_2 - mr^2\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_2\cos\varphi_2 &= -mg\sin\varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

由于 Lagrange 函数 $L(=T-V)$ 不显含 φ_1 , 所以存在一个循环积分

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = I\dot{\varphi}_1 + mr^2\dot{\varphi}_1^2\sin^2\varphi_2 = C_1 \quad (d)$$

不难看出, 广义动量 p_1 就是系统对 z 轴之总动量矩。这个广义动量之所以守恒是因为外力对 z 轴之矩为零。

由于系统是保守的, 还有一个能量积分:

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}mr^2(\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_1^2\sin^2\varphi_2) - mg\cos\varphi_2 = h \quad (e)$$

现在解 (d)、(e) 两个一阶微分方程, 即得系统的运动 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, 也就是说, 两个首次积分降低两阶。

例题 2.6.2 在水平面内的均质圆盘可绕过形心的竖轴转动, 在圆盘边缘用铰连结一个摆。设圆盘的转动惯量为 I_1 , 半径为 R , 摆长为 r , 摆锤质量为 m , 列出此系统的 Lagrange 方程, 并通过首次积分求解。

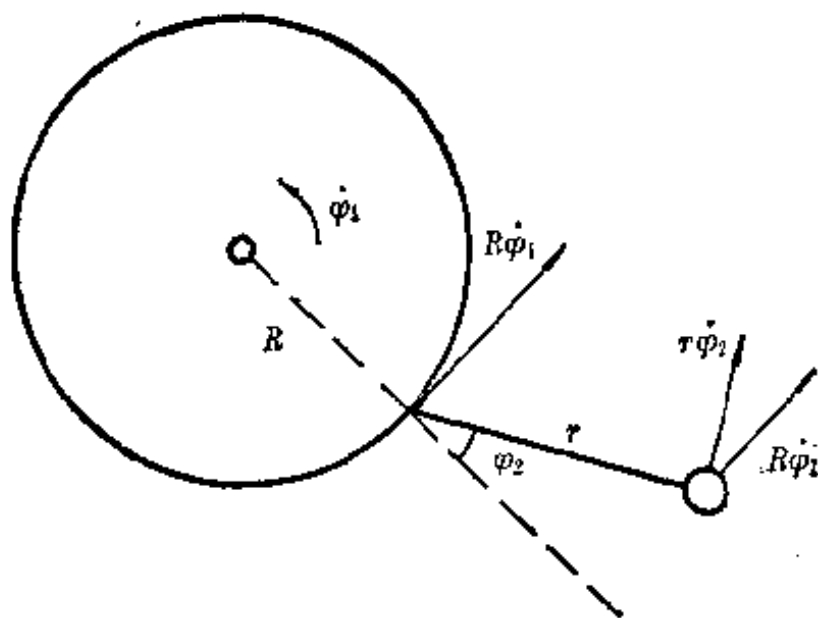


图 2.9

解 取圆盘之转角 φ_1 及摆杆相对圆盘之摆角 φ_2 为系统的广义坐标, 由于没有广义力, 系统的 Lagrange 函数 L 即系统的动能为

$$\begin{aligned} L = T &= \frac{1}{2} I \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m [(R\dot{\varphi}_1 + r\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2)^2 + (r\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2)^2] \\ &= \frac{1}{2} I \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m [R^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2Rr\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + r^2 \dot{\varphi}_2^2] \end{aligned} \quad (a)$$

系统的 Lagrange 方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (I\dot{\varphi}_1 + mR^2\dot{\varphi}_1 + mRr\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2) &= 0 \\ mr^2\ddot{\varphi}_2 + mRr\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2 - mRr\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

由于是保守系统, 存在能量积分:

$$\frac{1}{2} I \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m [R^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2Rr\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + r^2 \dot{\varphi}_2^2] = h \quad (c)$$

由于 L 不显含 φ_1 , 存在循环积分:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = C_1$$

或

$$I\dot{\varphi}_1 + mR^2\dot{\varphi}_1 + mRr\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 = C_1 \quad (d)$$

能量积分(c)及循环积分(d)都是问题的首次积分, 由(d)式解出 $\dot{\varphi}_1$ 代入(c)式, 积分后可得 $\varphi_2(t)$, 再回到(d)式, 可解得 $\varphi_1(t)$ 。

值得注意的是, 在这个问题中虽然 φ_1 是循环坐标, 但

$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}$ 并不具有对 O 轴的总动量矩那样的含义 (读者可计算系统对 O 轴的总动量矩并与(d)式比较)。

2.7 Noether 定理

设系统的 Lagrange 函数为 $L = L(t, q, \dot{q})$ 。若另有一组函数。

$$T = T(t, q, \dot{q}, \varepsilon) \quad (2.7.1)$$

$$Q_j = Q_j(t, q, \dot{q}, \varepsilon) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.7.2)$$

其中 ε 是独立参数, 而且

$$(T)_{\varepsilon=0} = t \quad (2.7.3)$$

$$(Q_j)_{\varepsilon=0} = q_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.7.4)$$

令

$$\dot{Q}_j = \frac{dQ_j}{dT} = \frac{dQ_j/dt}{dT/dt} = \dot{Q}_j(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \varepsilon) \quad (2.7.5)$$

当以 $T, Q_j, \dot{Q}_j (j=1, 2, \dots, n)$ 分别代替 L 函数中的 t, q 及 \dot{q} 后, 若所得之函数

$$L(t, q, \dot{q}) = L[T(t, q, \dot{q}, \varepsilon), Q(t, q, \dot{q}, \varepsilon), \dot{Q}_j(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \varepsilon)] \quad (2.7.6)$$

能使下面等式成立:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \{ L[T(t, q, \dot{q}, \varepsilon); Q(t, q, \dot{q}, \varepsilon), \dot{Q}_j(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \varepsilon)] \cdot \dot{T}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \varepsilon) \} \right]_{\varepsilon=0} = \dot{F} \quad (2.7.7)$$

其中 \dot{F} 是函数 $F(t, q, \dot{q})$ 对时间的导数, 则系统有首次积分:

$$L\xi + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j} (\eta_j - \dot{q}_j) - F = h \quad (2.7.8)$$

其中 h 是积分常数, 且

$$\xi \triangleq \left[\frac{\partial T(t, q, \dot{q}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} \quad (2.7.9)$$

$$\eta_j \triangleq \left[\frac{\partial Q_j(t, q, \dot{q}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.7.10)$$

证明:

先写出 (2.7.7) 式左端的偏导数:

$$\left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\partial L(T, Q, \dot{Q})}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j(t, q, \dot{q}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L(T, Q, \dot{Q})}{\partial \dot{Q}_j} \right\}$$

$$\left. \frac{\partial \dot{Q}_j(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L(T, Q, \dot{Q})}{\partial T} \cdot \frac{\partial T(t, q, \dot{q}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right] T + L(T, Q, \dot{Q}) \left. \frac{\partial T(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right\}_{\varepsilon=0} = P \quad (2.7.11)$$

再将 T 和 Q_j 按 ε 的幂展开:

$$T = (T)_{\varepsilon=0} + \left[\frac{\partial T(t, q, \dot{q}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} \varepsilon + \dots \quad (2.7.12)$$

$$Q_j = (Q_j)_{\varepsilon=0} + \left[\frac{\partial Q_j(t, q, \dot{q}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} \varepsilon + \dots \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.7.13)$$

由 (2.7.3)、(2.7.4) 及 (2.7.9), (2.7.10) 式, 得

$$T = t + \xi \varepsilon + \dots \quad (2.7.14)$$

$$Q_j = q_j + \eta_j \varepsilon + \dots \quad (2.7.15)$$

因而

$$\dot{T} = 1 + \xi \varepsilon + \dots \quad (2.7.16)$$

$$\dot{Q}_j = \dot{q}_j + \eta_j \varepsilon + \dots \quad (2.7.17)$$

由此得:

$$(\dot{T})_{\varepsilon=0} = 1 \quad (2.7.18)$$

$$(\dot{Q}_j)_{\varepsilon=0} = \dot{q}_j \quad (2.7.19)$$

$$(\ddot{Q}_j)_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\dot{Q}_j}{\dot{T}} \right)_{\varepsilon=0} = \dot{q}_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.7.20)$$

$$\left[\frac{\partial T(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \xi \quad (2.7.21)$$

$$\left[\frac{\partial Q_j(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \eta_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.7.22)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \dot{Q}_j(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\dot{Q}_j(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \varepsilon)}{\dot{T}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \varepsilon)} \right] \right\}_{\varepsilon=0} \\ &= \left[\frac{1}{\dot{T}} \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \varepsilon} - \frac{\dot{Q}_j}{\dot{T}^2} \frac{\partial \dot{T}}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} \end{aligned}$$

$$= \eta_j - \dot{q}_j \xi \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.7.23)$$

将(2.7.3), (2.7.4)及(2.7.18)至(2.7.23)式代入(2.7.11)式,并考虑到

$$\left[\frac{\partial L(T, Q, \dot{Q})}{\partial Q_j} \right]_{t=0} = \frac{\partial L(t, q, \dot{q})}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.7.24)$$

$$\left[\frac{\partial L(T, Q, \dot{Q})}{\partial T} \right]_{t=0} = \frac{\partial L(t, q, \dot{q})}{\partial t} \quad (2.7.25)$$

$$[L(T, Q, \dot{Q})]_{t=0} = L(t, q, \dot{q}) \quad (2.7.26)$$

便得到

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L(t, q, \dot{q})}{\partial q_j} \eta_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j} (\eta_j - \dot{q}_j \xi) + \frac{\partial L(t, q, \dot{q})}{\partial t} \xi \\ + L(t, q, \dot{q}) \xi = \dot{F} \end{aligned} \quad (2.7.27)$$

又因为 L 作为 t, q 及 \dot{q} 的函数, 应有

$$\frac{\partial L}{\partial t} = L - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \quad (2.7.28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \eta_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \eta_j \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \eta_j \quad (2.7.29)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \xi = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \xi \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \xi \quad (2.7.30)$$

将(2.7.29)至(2.7.31)式代入(2.7.28)式,整理后可得:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] (\eta_j - \dot{q}_j \xi) + \frac{d}{dt} \left[L \xi + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\eta_j - \dot{q}_j \xi) - F \right] \\ = 0 \end{aligned} \quad (2.7.31)$$

根据 Lagrange 方程(2.1.19), 上式左边第一项等于零, 因而

$$\frac{d}{dt} \left[L\xi + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (\eta_j - \dot{q}_j \xi) - F \right] = 0 \quad (2.7.32)$$

即

$$L\xi + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (\eta_j - \dot{q}_j \xi) - F = h \quad (2.7.33)$$

证毕

Noether 定理是一个更广泛的定理, 能量积分与循环积分都是它的特例。例如:

1) 如 L 函数不显含 t , 即 $L = L(q, \dot{q})$, 则当取

$$\left. \begin{aligned} T &= t + \varepsilon \\ Q &= q \\ F &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7.34)$$

时, (2.7.7) 式得以满足, (因恒有 $\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = 0$) 此时

$$\xi = \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 1$$

$$\eta_j = \frac{\partial Q_j}{\partial \varepsilon} = 0$$

$$\dot{Q}_j = \dot{q}$$

因而, 由 Noether 定理, 有如下首次积分存在:

$$L + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (-\dot{q}_j) = h$$

即

$$L - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = h \quad (2.7.35)$$

这就是广义能量积分[见 (2.4.6) 式]。

2) 设 L 函数有循环坐标 q_1 , 则当取

$$\left. \begin{aligned} T &= t \\ Q_1 &= q_1 + e \\ Q_j &= 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ F &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7.36)$$

时, (2.7.7) 式被满足, 并且有

$$\begin{aligned} \xi &= 0, \eta_1 = 1, \eta_j = 0 \quad (j=2, 3, \dots, n), \dot{Q}_1 = \dot{q}_1, \dot{Q}_j = 0 \\ &\quad (j=2, 3, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.7.37)$$

因此由 Noether 定理, 存在首次积分:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = h \quad (2.7.38)$$

这就是循环积分。

例题 2.7.1 两个半径相等的圆轮, 质量各为 m_1 及 m_2 , 中心回转半径各为 ρ_1 及 ρ_2 , 放在粗糙水平面上, 而且两个轮面保持在同一竖直平面内, 轮心间用刚度 k 的弹簧相连, 假定两轮都只能作无滑动的滚动, 求此问题的解。

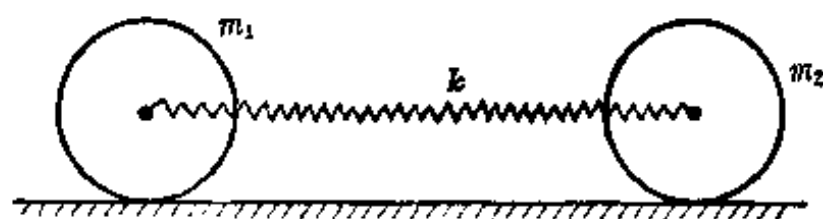


图 2.10

解 本系统有两个自由度, 广义坐标可取两轮轴各自对其静平衡位置的水平偏移 x_1 及 x_2 。于是, 系统的动能及势能分别为:

$$T = \frac{m_1}{2} \left(1 + \frac{\rho_1^2}{R^2} \right) \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left(1 + \frac{\rho_2^2}{R^2} \right) \dot{x}_2^2 \quad (a)$$

$$V = \frac{k}{2} (x_1 - x_2)^2 \quad (b)$$

这是保守系统，但所有外力的主向量及对任一点的主矩都不可能为零。因此除能量积分

$$\frac{m_1}{2} \left(1 + \frac{\rho_1^2}{R^2} \right) \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left(1 + \frac{\rho_2^2}{R^2} \right) \dot{x}_2^2 + \frac{k}{2} (x_1 - x_2)^2 = h \quad (c)$$

外，不存在动量守恒或动量矩守恒这类积分，此外，由 Lagrange 函数的构造可知，也不存在循环坐标及循环积分。然而根据 Noether 定理还可以找到一个积分。为此，取 $T = t$, $Q = x_1 + \varepsilon$, $Q_2 = x_2 + \varepsilon$, $F = 0$, (2.7.7) 式恰好能满足，而且此时

$$\xi = 0, \quad \eta_1 = 1, \quad \eta_2 = 1 \quad (d)$$

于是由 (2.7.33) 式立即得到一个积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = C \text{ (常数)} \quad (e)$$

或

$$m_1 \left(1 + \frac{\rho_1^2}{R^2} \right) \dot{x}_1 + m_2 \left(1 + \frac{\rho_2^2}{R^2} \right) \dot{x}_2 = C \quad (f)$$

(这个积分也可以由分别写出两轮的质心运动微分方程，然后消去弹簧力再积分而得到。) 积分方程 (c) 及 (f) 便给出了本系统问题的解。两个首次积分 (c) 及 (f) 使问题降低了两阶。

2.8 Lagrange 方程的降阶

由常微分方程理论可知，对于 n 个一阶常微分方程的方程组 (一个二阶微分方程可以化为二个一阶微分方程)，如果有 m 个首次积分，则原方程组的求解问题可化为 $n - m$ 个方程进行。这个过程称为微分方程的降阶。前面我们已经见过一些利用首次积分使 Lagrange 方程降阶的例题。下面我们将看到，利用能量积分和循环积分不仅可使 Lagrange 方程降阶，而且降阶后的方程仍

能保持 Lagrange 方程的形式,这是一般微分方程所没有的。

2.8.1 Whittaker 方程——利用广义能量积分降阶

设 n 自由度的 Lagrange 系统有能量积分

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = h \quad (2.4.5)$$

这个积分存在的条件是函数 L 不显含时间 t , 即

$$L = L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \quad (2.4.1)$$

令

$$q'_r = \frac{dq_r}{dq_1} \quad (r=2, \dots, n) \quad (2.8.1)$$

则

$$\dot{q}_r = \frac{dq_r}{dq_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} = q'_r \dot{q}_1 \quad (2.8.2)$$

将上式代入函数 L , 得到一个只含 q_1 及 \dot{q}_1 , 而不含 q'_i 的函数, 将其记作 Ω , 即

$$L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_1 q'_2, \dots, \dot{q}_1 q'_n) = \Omega(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, q'_2, \dots, q'_n) \quad (2.8.3)$$

将上式分别对 q 及 q 求偏导数, 得:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} - \frac{1}{\dot{q}_1^2} \sum_{r=2}^n \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} \dot{q}_r \quad (2.8.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} \frac{\partial q'_r}{\partial \dot{q}_r} = \frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} \quad (r=2, \dots, n) \quad (2.8.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.8.6)$$

将(2.8.5)式代入(2.8.4)式得:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \sum_{r=2}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1} \quad (2.8.7)$$

将(2.8.2)式代入能量积分 (2.4.5), 便得到一个 $q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ 的关系式, 由此可以解出 \dot{q}_1 , 得:

$$\dot{q}_1 = f(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \quad (2.8.8)$$

将 \dot{q}_1 的这个表达式代入(2.8.7)式, 便可使 $\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}$ 中不再含 \dot{q}_1 , 即

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} = W(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \quad (2.8.9)$$

函数 W 称为 Whittaker 函数。以下的推导, 目的在于将原方程用函数 W 表示, 以实现降阶。

将(2.8.9)式两边对 q'_r 及 q_r 求偏导数, 可得

$$\frac{\partial W}{\partial q'_r} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q'_r \partial \dot{q}_1} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} \quad (r=2, \dots, n) \quad (2.8.10)$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_r} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_r \partial \dot{q}_1} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_r} \quad (r=2, \dots, n) \quad (2.8.11)$$

借助(2.8.7)和(2.8.3)式可将能量积分(2.4.5)改写成

$$\dot{q}_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} = \Omega + h \quad (2.8.12)$$

上式两边都是 $q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ 的函数, 求其对 q'_r 的偏导数, 得:

$$\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_1 \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q'_r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} \right) = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} + \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} \quad (r=2, \dots, n)$$

整理后得

$$\frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q'_r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} \quad (r=2, \dots, n) \quad (2.8.13)$$

与(2.8.10)比较便得到

$$\frac{\partial W}{\partial q'_r} = \frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} \quad (r=2, \dots, n) \quad (2.8.14)$$

再将(2.8.12)式的两边对 q_r 求偏导数:

$$\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_r} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_1 \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_r \partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_r} + \frac{\partial \Omega}{\partial q_r} \quad (r=2, \dots, n)$$

整理后得

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial q_r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q_r} = \frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial \Omega}{\partial q_r} \quad (r=2, \dots, n) \quad (2.8.15)$$

与(2.8.11)式相比较,便得到

$$\frac{\partial W}{\partial q_r} = \frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial \Omega}{\partial q_r} \quad (r=2, \dots, n) \quad (2.8.16)$$

最后再比较(2.8.5), (2.8.6), 与(2.8.14), (2.8.15) 式便得到了下列等式:

$$\frac{\partial W}{\partial q'_r} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}; \quad \dot{q}_1 \frac{\partial W}{\partial q_r} = \frac{\partial L}{\partial q_r} \quad (r=2, \dots, n) \quad (2.8.17)$$

将(2.8.17)式代入 Lagrange 方程(2.1.19), 即得:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial q'_r} - \dot{q}_1 \frac{\partial W}{\partial q_r} = 0 \quad (r=2, \dots, n)$$

$$\text{或} \quad \frac{d}{dq_1} \frac{\partial W}{\partial q'_r} - \frac{\partial W}{\partial q_r} = 0 \quad (r=2, \dots, n) \quad (2.8.18)$$

方程组(2.8.18)称为 Whittaker 方程。它是 Lagrange 型方程, W 函数相当于 L , q_1 相当于 t , 未知函数由 n 个减为 $n-1$ 个。由 Whittaker 方程可以将这 $n-1$ 个未知函数解出。将它们代入(2.8.8)。便得到求 q_1 的方程, 即

$$\frac{dq_1}{dt} = f(q_1) \quad (2.8.19)$$

积分上式可得 $q_1(t)$ 。将 $q_1(t)$ 代入由 Whittaker 方程得到的 $q_r(q_1)$, 便最后得到了所要求的时间函数 $q_r(t)$ ($r=2, \dots, n$), 问题也就全解决了。因为(2.8.19)式可以分离变量直接求积分, 所以可以说广义能量积分能使问题降低两阶。

2.8.2 Legendre 变换

为了利用循环积分对 Lagrange 方程实行降阶, 需要一点数学上的准备知识, 即 Legendre 变换。这个变换不仅在分析力学, 而且在弹性力学及热力学中都有重要应用。

设给定一函数 $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 它的 Hess 行列式不等于零:

$$\det\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^n \neq 0 \quad (2.8.20)$$

由函数 $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 按下列方式生成的变换, 称为 Legendre 变换:

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.8.21)$$

下面是关于 Legendre 变换的一个定理——Donkin 定理:

(1) Legendre 变换 (2.8.21) 的逆变换存在, 并且由函数

$$Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - X \quad (2.8.22)$$

生成, 即逆变换为:

$$x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.8.23)$$

(2.8.22) 式右边的 x_i 及 X 中的 x_i 均应为 y_1, y_2, \dots, y_n 的函数, 它们由 (2.8.20) 式反解而得。

(2) 如果生成 Legendre 变换 (2.8.21) 的函数 X 含有参数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 即

$$X = X(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (2.8.24)$$

则函数 Y 也含有同样的参数:

$$Y = Y(y_1, y_2, \dots, y_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (2.8.25)$$

而且有

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j} \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (2.8.26)$$

证明:

因为函数 X 的 Hess 行列式就是方程 (2.8.21) 右端的 Jacobi 行列式, 按条件 (2.8.20), 它不等于零, 即

$$\frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n \neq 0 \quad (2.8.27)$$

于是由 (2.8.21) 式可以解出 x_1, x_2, \dots, x_n 表成 y_1, y_2, \dots, y_n 的函数:

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.8.28)$$

将 x_i 的这个表达式代入 Y 的表达式 (2.8.22) 的右端, 求偏导数 $\frac{\partial Y}{\partial y_i}$, 并考虑到 (2.8.21) 式, 即得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial y_i} &= \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\sum_{s=1}^n x_s y_s - X \right) \\ &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial x_s}{\partial y_i} y_s + x_i - \sum_{s=1}^n \frac{\partial X}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y_i} \\ &= x_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.8.29)$$

于是定理的第一部分成立。

若函数 X 含有参数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 那么正变换 (2.8.21) 必含有这些参数, 因而逆变换 (2.8.28) 也必含有这些参数, 即

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \dots, y_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (2.8.30)$$

将上式代入 (2.8.22) 式右端, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - X \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} y_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial X}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial X}{\partial \alpha_j} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j} \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (2.8.31)$$

于是定理的第二部分成立，定理证毕。

2.8.3 Routh 变换与 Routh 方程——利用循环积分降阶

利用 Donkin 定理，可以完成有循环积分时 Lagrange 方程组的降阶。

设 Lagrange 函数 L 有 $n-m$ 个循环坐标，不失一般性，可取它们为 $q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_n$ ，即

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_m; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) \quad (2.8.32)$$

对照 (2.8.24) 式，将 L 函数看作 X ，将 $\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \dots, \dot{q}_n$ 看作 x_1, x_2, \dots, x_{n-m} ；将 $q_1, \dots, q_m; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m; t$ 看作 $2m+1$ 个参数，则 Hess 行列式为：

$$\det \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_{m+i} \partial \dot{q}_{m+j}} \right]_{i,j=1}^{n-m} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_{m+1}^2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_{m+1} \partial \dot{q}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_{m+1}} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_{m+1}^2} & \dots & \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_{m+1} \partial \dot{q}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_{m+1}} & \dots & \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_n^2} \end{vmatrix} \quad (2.8.33)$$

这正是系统动能表达式中齐二次部分 T_2 的系数矩阵的一个 $n-m$ 阶主子式，由此系数矩阵的正定性可知它必大于零。因此有

$$\det \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_{m+i} \partial \dot{q}_{m+j}} \right]_{i,j=1}^{n-m} \neq 0 \quad (2.8.34)$$

于是由广义动量所定义的变换

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \quad (r = m+1, \dots, n) \quad (2.8.35)$$

是 Legendre 变换。根据 Donkin 定理, 其逆变换由函数 $\sum_{r=m+1}^n \dot{q}_r p_r$

— L (相当于定理中的 Y 函数见 (2. 8. 22) 式) 生成, 将此函数记作 $-R$, 即

$$-R(q_1, \dots, q_m; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m; t, p_{m+1}, \dots, p_n) = \sum_{r=m+1}^n p_r \dot{q}_r - L \quad (2. 8. 36)$$

则逆变换为:

$$\dot{q}_\alpha = -\frac{\partial R}{\partial p_\alpha} \quad (\alpha = m+1, \dots, n) \quad (2. 8. 37)$$

并且对参数 $q_j, \dot{q}_j (j=1, 2, \dots, m)$ 和 t 的偏导数有如下关系 (见 (2. 8. 26) 式):

$$\frac{\partial R}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (j=1, 2, \dots, m), \quad \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} \quad (2. 8. 38)$$

由于 p_r 是循环坐标 $q_r (r=m+1, \dots, n)$ 对应的广义动量, 它在运动中保持不变, 即

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \beta_r \quad (r=m+1, \dots, n) \quad (2. 8. 39)$$

因此, 函数 R 中的 p_r 可用常数 β_r 代替, 即

$$R = R(q_1, \dots, q_m; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m; t, \beta_{m+1}, \dots, \beta_n) \quad (2. 8. 40)$$

因而 (2. 8. 37) 式也可以改写成

$$\dot{q}_\alpha = -\frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha} \quad (2. 8. 37)'$$

根据关系式 (2. 8. 38) 及 Lagrange 方程便得到决定非循环坐标的封闭方程组:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (2. 8. 41)$$

称为 Routh 方程。函数 R 称为 Routh 函数。解 Routh 方程

可得

$$q_j = q_j(t, \beta_{m+1}, \dots, \beta_n; C_1, \dots, C_{2m}) \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.8.42)$$

其中 C_1, \dots, C_{2m} 是积分常数。将 $q_j(t)$ ($j=1, \dots, m$) 代入 (2.8.37)' 式的右端, 并将所有的循环动量 p_r 换成 β_r , 右端便是 t 的已知函数了 (含有 $n-2m+m=n-m$ 个任意常数), 积分后即得循环坐标

$$q_\alpha = - \int \frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha} dt + e_\alpha \quad (\alpha=m+1, \dots, n) \quad (2.8.43)$$

其中 e_{m+1}, \dots, e_n 是新的积分常数, 连同 C_1, \dots, C_{2m} 及 $\beta_{m+1}, \dots, \beta_n$ 共 $2n$ 个积分常数。(2.8.42) 和 (2.8.43) 式就是系统动力学问题的通解。

利用循环积分, 导出了 Routh 方程 (2.8.41), 由于 Routh 函数 R 只含有非循环坐标 q_1, \dots, q_m 及其导数 $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m$, 所以它是 $2m$ 阶的, 与系统原来的 Lagrange 方程相比降低了 $2(n-m)$ 阶。从这个意义上说, 存在一个循环积分可以使方程降低两阶。

值得一提的是, 为了将循环速度 $\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n$ 分离开, 我们利用了 Legendre 变换与 Donkin 定理。为什么不能由循环积分 (2.8.35) 解出循环速度 $\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n$ 作为非循环坐标与速度 $q_1, \dots, q_m; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m$ 以及 $\beta_{m+1}, \dots, \beta_n$ 的函数, 即

$$\dot{q}_\alpha = \dot{q}_{\alpha+1}(q_1, \dots, q_m; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m; t, \beta_{m+1}, \dots, \beta_n) \quad (\alpha=m+1, \dots, n) \quad (2.8.44)$$

再代入 Lagrange 函数 (2.8.32) 来消去 $\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n$ 然后用 Lagrange 方程 (2.1.19) 得到 m 个决定非循环坐标的方程呢? 这是因为, 在作为 Lagrange 系统的 L 函数中, q 都是独立的, 如果将 (2.8.44) 式代入 L 函数, 就相当于将循环积分当作约束条件引入函数 L 中, 这就改变了原来系统的力学性质, 自然是不可以的。下面的一个简单例子可以说明这一点:

对于在中心力场中运动的质点,用极坐标表示的 Lagrange 函数为:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r) \quad (2.8.45)$$

$V(r)$ 是势能函数,它只和 r 有关,与 ϕ 无关, ϕ 是循环坐标,相应的循环积分为

$$mr^2\dot{\phi} = C_\phi \quad (2.8.46)$$

Routh 函数为

$$\begin{aligned} R = L - C_\phi\dot{\phi} &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{C_\phi^2}{2mr^2} - V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{C_\phi^2}{2mr^2} - V(r) \end{aligned} \quad (2.8.47)$$

如果由 (2.8.46) 式解出 ϕ 直接代入 Lagrange 函数,则有

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2 \cdot \frac{C_\phi^2}{m^2r^4} - V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{C_\phi^2}{2mr^2} - V(r) \end{aligned} \quad (2.8.48)$$

比较 (2.8.47) 及 (2.8.48) 两式,可以看出二者是不相同的。

由以上的讨论可知,当系统的 Lagrange 函数有循环坐标时,借助循环积分,便产生了一个用 Routh 函数描述的新系统,我们称它为原系统的“导出系统”。由于导出系统的动力学方程与 Lagrange 方程有着同一的形式 (Routh 函数 R 起着 Lagrange 函数 L 的作用)。因此导出系统仍是一个 Lagrange 系统。因而以前对 Lagrange 方程所作的讨论,对导出系统仍然有效:

(1) 如果 R 函数中不显含时间 t , 即 $\frac{\partial R}{\partial t} = 0$, 那么对导出系统

便存在能量积分:

$$\sum_{r=1}^m \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r - R = h' \quad (2.8.49)$$

h' 是新的积分常数, 这个积分称为 Routh 能量积分。

(2) 若原系统除有势力外还有非有势力 $\tilde{Q}_i (i=1, 2, \dots, n)$, 只要与循环坐标 q_{m+1}, \dots, q_n 对应的非有势力 $\tilde{Q}_{m+1}, \dots, \tilde{Q}_n$ 为零, 而且与非循环坐标 $q_i (i=1, 2, \dots, m)$ 对应的非有势力 $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_m$ 又不含循环坐标, 即

$$\tilde{Q}_j = \tilde{Q}_j(q_1, \dots, q_m) \quad (2.8.50)$$

那么 Routh 方程仍取如下形式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = \tilde{Q}_j \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.8.51)$$

(3) 将 Routh 函数分解为非循环广义速度的二次项、一次项及零次项:

$$R = R_2 + R_1 + R_0 \quad (2.8.52)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m a_{jk}^* \dot{q}_j \dot{q}_k \\ R_1 &= \sum_{j=1}^m a_j^* \dot{q}_j \\ R_0 &= R_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8.53)$$

仿照 2.5 节中的讨论, 有以下关系:

$$-\mathcal{E}_j(R_0) = \frac{\partial R_0}{\partial q_j} \quad (2.8.54)$$

$$\begin{aligned} -\mathcal{E}_j(R_1) &= -\frac{\partial a_j^*}{\partial t} + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial a_k^*}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j^*}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k \\ &= -\frac{\partial a_j^*}{\partial t} + \sum_{k=1}^m g_{jk} \dot{q}_k \end{aligned} \quad (2.8.55)$$

其中 $g_{jk} = -g_{kj}$, 换言之, R_1 项中隐含有广义陀螺力。Routh 方程可表为如下形式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R_2}{\partial q_j} = Q_j + \frac{\partial R_0}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j^*}{\partial t} + \sum_{k=1}^n g_{jk} \dot{q}_k \quad (j=1, \dots, m)$$

(2.8.56)

当 $m > 1$ 时, Routh 方程中一般会出现广义陀螺力。这是出现广义陀螺力的又一种情形。

例题 2.8.1 具有三个自由度的陀螺仪如图所示, 转子的三个中心主惯性矩分别为 A 、 A 及 C , 内环轴在水平面内, 外环轴保持铅垂位置, 自转轴与外环轴之间的夹角为 θ , 作用在内、外环轴上的转动力矩为 M_ϕ 及 M_ψ 。内外环质量不计, 试列出陀螺的运动方程式, 并求当 $M_\phi = M_\psi = 0$ 时的首次积分。

解 系统的位形由三个欧拉角组成: 自转角 φ 、内环相对外环

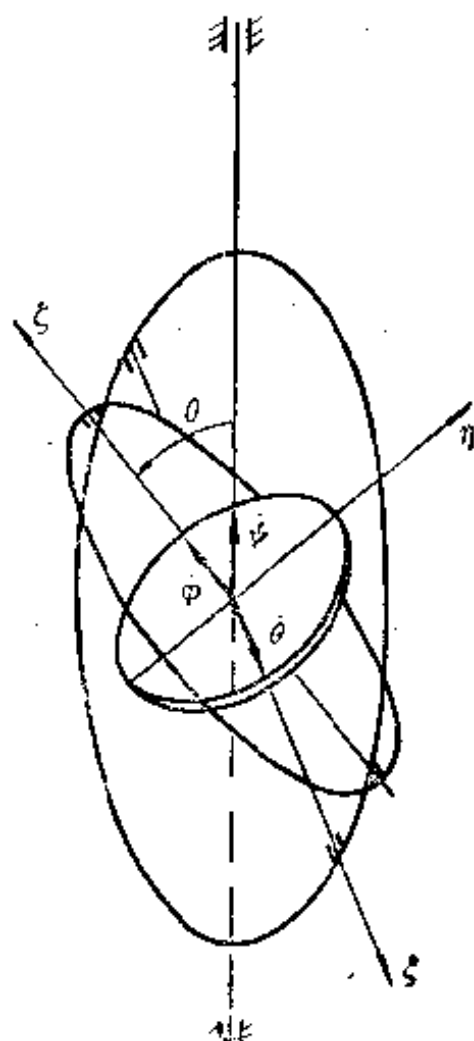


图 2.11

的章动角 θ 及外环绕竖轴之进动角 ψ 。三个角速度分量 $\dot{\varphi}$ 、 $\dot{\theta}$ 、 $\dot{\psi}$ 如图 2.11 所示。角速度向量在三个主轴 $O\xi$ 、 $O\eta$ 、 $O\zeta$ 上的投影分别为:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\xi} &= \dot{\theta} \\ \omega_{\eta} &= \dot{\psi} \sin \theta \\ \omega_{\zeta} &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

系统的动能, 即转子的动能为

$$T = \frac{1}{2} A (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 \quad (b)$$

动能中不显含 φ , 所以 φ 是循环坐标, 有循环积分

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = C \omega_{\zeta} \quad (c)$$

其中 $C \omega_{\zeta}$ 为积分常数。由 (c) 式解出循环变量 φ :

$$\dot{\varphi} = \omega_{\zeta} - \dot{\psi} \cos \theta \quad (d)$$

作 Routh 函数

$$\begin{aligned} R &= L - p_{\varphi} \dot{\varphi} = \frac{A}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{C}{2} \omega_{\zeta}^2 - C \omega_{\zeta} (\omega_{\zeta} - \dot{\psi} \cos \theta) \\ &= \frac{A}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) - \frac{C}{2} \omega_{\zeta}^2 + C \omega_{\zeta} \dot{\psi} \cos \theta \end{aligned} \quad (e)$$

代入 Routh 方程, 得系统运动方程:

$$\left. \begin{aligned} A \ddot{\theta} - A \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta &= -C \omega_{\zeta} \dot{\psi} \sin \theta + M_{\theta} \\ A \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \sin^2 \theta) &= C \omega_{\zeta} \dot{\theta} \sin \theta + M_{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

这里出现两个广义陀螺力: $-C \omega_{\zeta} \dot{\psi} \sin \theta$ 及 $C \omega_{\zeta} \dot{\theta} \sin \theta$ 。第一个表示转子由于两个角速度 $\dot{\varphi}$ 及 $\dot{\psi}$ 同时存在而产生的陀螺力矩; 第二个表示 $\dot{\varphi}$ 及 $\dot{\theta}$ 同时存在而产生的陀螺力矩。

当 $M_{\theta} = M_{\psi} = 0$ 时, 存在 Routh 能量积分:

$$R_2 - R_0 = h \quad (g)$$

即(见(e)式)

$$\frac{A}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{C}{2} \omega_i^2 = h \quad (h)$$

在这个问题中, Routh 能量积分的意义就是机械能守恒。

2.9 保守系统的微振动理论

2.9.1 平衡位置的稳定性

设有 n 自由度的完整系统 S , q_1, \dots, q_n 为其广义坐标, 其上的作用力是有势的, 势能函数为 V , 并假定约束和势场都是定常的。广义坐标形式的虚位移原理

$$\sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = 0 \quad (2.9.1)$$

给出决定平衡位置的一组方程:

$$Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

或

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.9.2)$$

由此可解出平衡位置的 n 个坐标 q^0 。我们也可以改变各广义坐标的原点使 $q_i^0 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

如果系统受到足够小的撞击 (即在平衡位置处有一个足够小的初速度) 或稍微偏离平衡位置 (即有足够的初位移), 偏离平衡位置 ($q^0 = 0$) 的坐标 q 永远保留在一个任意限定的小范围之内, 则这个平衡位置称为稳定平衡位置; 反之称为不稳定的。

判别平衡位置的稳定性有如下定理:

Dirichlet 定理: 对于定常、完整的保守系统, 势能在平衡位置具有极小值是此平衡位置稳定的充分条件。

这个定理可用能量守恒定律

$$T + V = E_0 \quad (2.9.3)$$

来证明。为简单计,取平衡位置为势能的零点(因为势能的零点可以任意选取),即 $V(0, \dots, 0) = 0$ 。而 V 在平衡位置有极小值这一条件表明,在平衡位置的 ε 邻域内, $V > 0$, 即存在正数 ε , 使 $|q_i| < \varepsilon$ ($i = 1, \dots, n$) 时, 有 $V(q) > 0$ 。将 $V(q)$ 在此邻域边界 (n 个 $|q_i|$ 中至少有一个等于 ε) 上的最小值记作 V' (显然 $V' > 0$)。现给定初始位移 q^0 和初始速度 \dot{q}^0 使 $T_0 = T(q^0, \dot{q}^0)$ 和 $V_0 = V(q^0)$ 满足条件

$$T_0 + V_0 < V' \quad (2.9.4)$$

下面用反证法来证明定理。设在条件 (2.9.4) 下系统于某时刻 t 越过了上述 ε 邻域, 则由函数 $V(q_1, \dots, q_n)$ 的连续性, 系统必将于 t 前某时刻 t' 到达此邻域的边界, 在 t' 时刻的 $V \geq V'$, 因而动能

$$T = T_0 + V_0 - V < V' - V < 0$$

这与动能 T 的正定性矛盾。定理证毕。

显然, 如果势能在平衡位置有极大值, 则平衡位置是不稳定的 (因为场力恒由高势能处指向低势能处)。

如果系统处于稳定平衡位置, 则在受到微小扰动后将会在此位置附近作微振动。研究这种振动有重要的实际意义。

2.9.2 稳定平衡位置附近的微振动

设保守系统的动能和势能分别为

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \\ V &= V(q_1, \dots, q_n) \end{aligned} \right\} \quad (2.9.5)$$

其中系数矩阵 $[m_{ij}]$ 是对称的。今取平衡位置为广义坐标的原点及势能的零点, 即在平衡位置有

$$q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$$

$$V(0, \dots, 0) = 0$$

将系数 $m_{ij}(q)$ 按 q 的幂展开:

$$m_{ij}(q) = m_{ij}(0) + \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_s} \right)_0 q_s \quad (2.9.6)$$

式中 $m_{ij}(0)$ 是常数, 记作 m_{ij} . 将 (2.9.6) 式代入动能表达式 (2.9.5) 式中第一式, 得

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + (q, \dot{q} \text{ 三次以上的项}) \quad (2.9.7)$$

将势能也按坐标 q 之幂展开:

$$V = V(0) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + \dots$$

因已规定 $V(0) = 0$, 并且在平衡位置广义力

$$Q_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

因此, 若令

$$k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (2.9.8)$$

则势能 V 可写成

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n k_{ij} q_i q_j + (q \text{ 的三次以上的项}) \quad (2.9.9)$$

我们只限于讨论稳定平衡位置附近的微振动, 因而 q, \dot{q} 均可看作一阶小量。略去 q, \dot{q} 二次以上的项, 动能和势能的表达式都是正定二次型:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n k_{ij} q_i q_j \quad (2.9.10)$$

将以上表达式代入 Lagrange 方程, 得系统的运动方程

有 n 个主振动。因为这 n 个振幅向量是线性无关的 (证明见后), 所以这些主振动都是线性微分方程 (2.9.11) 的独立解。将它们叠加, 便得到方程的通解

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (2.9.21)$$

上式包含有 $2n$ 个待定常数 (φ_i 和 \mathbf{U}_i 中一个比例常数 ($i=1, \dots, n$)), 它们由系统的初位移 \mathbf{q}^0 和初速度 $\dot{\mathbf{q}}^0$ 决定。也就是说, 系统对初始条件所产生的振动是由各阶主振动叠加而成。

2.9.3 主振型向量的正交性

设系统与固有频率 ω_i, ω_j 相应的主振型分别为 $\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j$, 于是由方程 (2.9.14) 有

$$\mathbf{K}\mathbf{U}_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\mathbf{U}_i \quad (2.9.22)$$

$$\mathbf{K}\mathbf{U}_j = \omega_j^2 \mathbf{M}\mathbf{U}_j \quad (2.9.23)$$

将 (2.9.22) 式两边左乘以 \mathbf{U}_j^T , (2.9.23) 式两边左乘以 \mathbf{U}_i^T , 则有

$$\mathbf{U}_j^T \mathbf{K}\mathbf{U}_i = \omega_i^2 \mathbf{U}_j^T \mathbf{M}\mathbf{U}_i \quad (2.9.24)$$

$$\mathbf{U}_i^T \mathbf{K}\mathbf{U}_j = \omega_j^2 \mathbf{U}_i^T \mathbf{M}\mathbf{U}_j \quad (2.9.25)$$

由于 \mathbf{K}, \mathbf{M} 的对称性, 故有

$$\mathbf{U}_j^T \mathbf{K}\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}\mathbf{U}_j$$

$$\mathbf{U}_j^T \mathbf{M}\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_i^T \mathbf{M}\mathbf{U}_j$$

将 (2.9.24)、(2.9.25) 式相减, 得

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \mathbf{U}_i^T \mathbf{M}\mathbf{U}_j = 0 \quad (2.9.26)$$

所以, 当 $\omega_i \neq \omega_j$ 时, 便有

$$\mathbf{U}_i^T \mathbf{M}\mathbf{U}_j = 0 \quad (2.9.27)$$

由 (2.9.25) 式便有

$$U_i^T K U_j = 0 \quad (2.9.28)$$

公式(2.9.27)及(2.9.28)表明,与固有频率 ω_i, ω_j 相应的主振型 U_i, U_j 具有关于质量矩阵 M 、刚度矩阵 K 的加权正交性。这种正交性是 M, K 的对称性所决定的。如果 M, K 不对称,就没有这种正交性。令

$$\left. \begin{aligned} U_i^T M U_i &= M_i \\ U_i^T K U_i &= K_i \end{aligned} \right\} \quad (2.9.29)$$

则(2.9.21)式可写成

$$\omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i} \quad (2.9.30)$$

$M_i, K_i (i=1, \dots, n)$ 分别称为系统的第*i*阶主质量和第*i*阶主刚度。它们的值并不确定,取决于第*i*阶主振型 U_i 是如何归一化的。若使相应于主振型的主质量 M_i 等于1,则这种特定的归一化称为正则化。所得到的主振型称为正则振型(正则模态)。

由主振型的正交性,还可以证明 n 个振型向量是线性无关的。若不然,设有关系式

$$c_1 U_1 + c_2 U_2 + \dots + c_i U_i + \dots + c_n U_n = 0$$

且其中至少有一个 $c_i \neq 0$ 。于是,当以 $U_i^T M$ 左乘上式时,便有

$$c_1 U_i^T M U_1 + \dots + c_i U_i^T M U_i + \dots + c_n U_i^T M U_n = 0$$

但由振型的正交性,则得

$$c_i U_i^T M U_i = 0$$

而 $U_i^T M U_i = M_i \neq 0$, 所以必有 $c_i = 0$, 与假设矛盾, 所以 n 个主振型 $U_i (i=1, \dots, n)$ 是线性无关的。因此 U_1, \dots, U_n 构成 n 维振型空间的一组基底, 任何一个振型 U (n 维向量) 都可以表为 n 个主振型 U_1, \dots, U_n 的线性组合。这便是所谓的振型展开定理。

以上的讨论都假定了频率方程(2.9.15)有 n 个不相等的单根, 但当频率方程出现重根时, 以上结论仍然正确。这是因为频率

方程

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (2.9.15)$$

中的 K 、 M 都是正定矩阵，当 ω_r^2 是方程 (2.9.15) 的 s 重根时，齐次方程组

$$|K - \omega^2 M| U = 0 \quad (2.9.14)$$

有 s 个线性无关的振型向量*。它们可按关于 M 、 K 的正交性来选定： $U_{r1}, U_{r2}, \dots, U_{rs}$ 。这时

$$q_{r1} = U_{r1} \sin(\omega_r t + \varphi_{r1})$$

$$q_{r2} = U_{r2} \sin(\omega_r t + \varphi_{r2})$$

.....

$$q_{rs} = U_{rs} \sin(\omega_r t + \varphi_{rs})$$

仍是方程 (2.9.11)' 的 s 个独立解（每一方程仍包含两个任意常数，即振型中的一个比例常数及 φ ）。因此通解仍取 (2.9.20) 的形式。

2.9.4 主振型矩阵, 主坐标变换

前已说明，不论频率方程是否有重根，都存在 n 个线性无关的振型向量

$$U_1 = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ \vdots \\ u_n^{(1)} \end{bmatrix}, \dots, U_n = \begin{bmatrix} u_1^{(n)} \\ \vdots \\ u_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

而且它们还是加权正交的。以振型向量为列构成的矩阵

$$P = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} & \dots & u_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ u_n^{(1)} & \dots & u_n^{(n)} \end{bmatrix} = [U_1, \dots, U_n] \quad (2.9.31)$$

称为主振型矩阵。以 P^T 、 P 前、后乘质量矩阵 M 和刚度矩阵 K ,

* 张远达, 熊全淹编,《线性代数》, 人民教育出版社, p. 321, 1962 年

得

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^T \mathbf{M} \mathbf{U}_1 & \cdots & \mathbf{U}_1^T \mathbf{M} \mathbf{U}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{U}_n^T \mathbf{M} \mathbf{U}_1 & \cdots & \mathbf{U}_n^T \mathbf{M} \mathbf{U}_n \end{bmatrix} \quad (2.9.32)$$

$$\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^T \mathbf{K} \mathbf{U}_1 & \cdots & \mathbf{U}_1^T \mathbf{K} \mathbf{U}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{U}_n^T \mathbf{K} \mathbf{U}_1 & \cdots & \mathbf{U}_n^T \mathbf{K} \mathbf{U}_n \end{bmatrix} \quad (2.9.33)$$

于是, 由主振型的正交性便有

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_n \end{bmatrix} = \text{diag}[M_i] \quad (2.9.32)'$$

$$\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} K_1 & & \\ & \ddots & \\ & & K_n \end{bmatrix} = \text{diag}[K_i] \quad (2.9.33)'$$

用正则振型 Ψ_i ($i=1, \dots, n$) 所组成的振型矩阵称为正则振型矩阵, 并记作 Ψ , 即

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1^{(1)} & \cdots & \Psi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \Psi_n^{(1)} & \cdots & \Psi_n^{(n)} \end{bmatrix} = [\Psi_1 \cdots \Psi_n] \quad (2.9.34)$$

Ψ_i 可用如下方法求得, 设

$$\Psi_i = c_i \mathbf{U}_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.9.35)$$

由正则振型定义, 有

$$\Psi_i^T \mathbf{M} \Psi_i = 1 \quad (2.9.36)$$

将(2.9.35)式代入(2.9.36)式, 得

$$\Psi_i^T \mathbf{M} \Psi_i = c_i^2 \mathbf{U}_i^T \mathbf{M} \mathbf{U}_i = 1$$

由上式求得 c_i 再代入(2.9.35)式, 可知

$$\Psi_i = \frac{1}{\sqrt{M_i}} \mathbf{U}_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.9.37)$$

其中 M_i 是与振型 U_i 对应的主质量。因此, 只要求出任一组主振型向量 U , 便可借 (2. 9. 37) 式得到正则振型。

若将正则振型 Ψ^T, Ψ 前、后乘 M 和 K , 则得

$$\Psi^T M \Psi = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = E_{(n \times n)} \text{ (单位矩阵)} \quad (2. 9. 38)$$

$$\Psi^T K \Psi = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{bmatrix} = \Lambda \quad (2. 9. 39)$$

矩阵 $\Lambda = \text{diag}[\omega_i^2]$ 又称为谱矩阵。

在运动方程 (2. 9. 11)' 中, 用主振型矩阵 P 作变换

$$q = Pz \quad (2. 9. 40)$$

其中 $z = [z_1, \dots, z_n]^T$, 再左乘以 P^T , 即得

$$\begin{bmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_n \end{bmatrix} \ddot{z} + \begin{bmatrix} K_1 & & \\ & \ddots & \\ & & K_n \end{bmatrix} z = 0 \quad (2. 9. 41)$$

或写成分量形式:

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{z} + K_1 z &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ M_n \ddot{z} + K_n z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2. 9. 41)'$$

这就是说, 利用主振型矩阵作坐标变换, 可以使原来耦合的运动微分方程 (2. 9. 11)' 解耦, 变成互不耦合的方程 (2. 9. 41)'。坐标 z 称为系统的主坐标, 变换 (2. 9. 40) 称为主坐标变换。

如果用正则振型矩阵 Ψ 作坐标变换, 即令

$$q = \Psi \xi \quad (2. 9. 42)$$

将 (2. 9. 42) 式代入方程 (2. 9. 11) 并左乘以 Ψ^T , 得

$$\ddot{\xi} + \Lambda \xi = 0 \quad (2. 9. 43)$$

或写成分量形式:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 + \omega_1^2 \xi &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \xi_n + \omega_n^2 \xi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9.43)'$$

ξ 称为正则坐标。可见用正则坐标描述系统的运动, 能得到最简单形式的运动方程。

显然, 方程组 (2.9.41)' 或 (2.9.43)' 可以逐个求解。

例题 2.9.1 三层建筑刚架结构模型如图 2.9.1 所示。各层楼板的质量均为 m , 可视为刚性板。立柱长为 l , 各柱抗弯刚度由

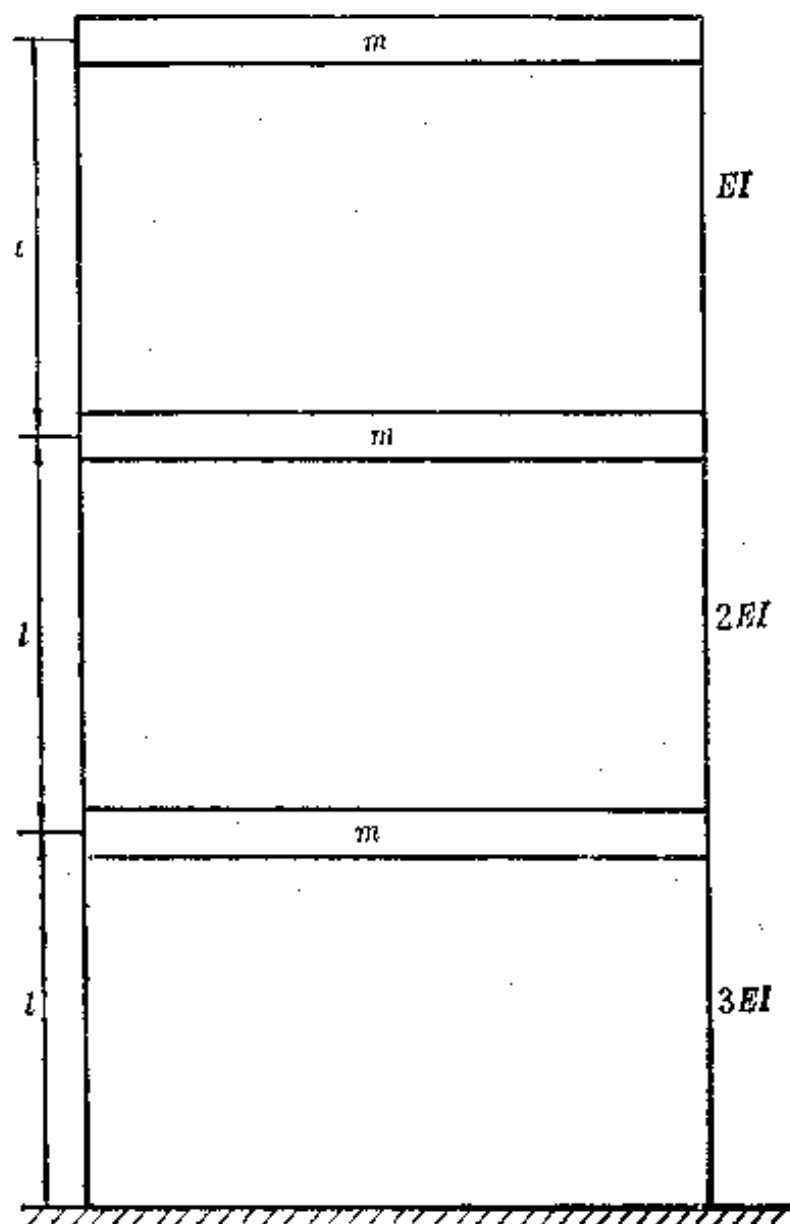


图 2.12

上至下依次为 $EI, 2EI, 3EI$ 。柱的质量不计。求结构侧向振动的固有频率和主振型。

解 因层间主柱是两端固定的梁, 由结构力学可知, 其横向相对位移 δ 与剪力 P 的关系为 $\delta = \frac{Pl^3}{12EI}$ 。现每层有二根主柱, 故知每层柱的刚度

$$k = 2 \frac{P}{\delta} = \frac{24EI}{l^3} \quad (a)$$

取结构各层的横向位移 x_1, x_2, x_3 为广义坐标, 则系统的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) \quad (b)$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_3 - x_2)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{24EI}{l^3} \right] [3x_1^2 + 2(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{24EI}{l^3} \right] [5x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 3x_2^2 - x_3x_2 - x_2x_3 + x_3^2] \end{aligned} \quad (c)$$

代入 Lagrange 方程, 并写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} m \\ m \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \frac{24EI}{l^3} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (d)$$

引入符号 $\lambda = \frac{24EI}{ml^3}$, 则振型方程和频率方程为

$$\begin{bmatrix} 5\lambda - \omega^2 & -2\lambda & 0 \\ -2\lambda & 3\lambda - \omega^2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (e)$$

$$\begin{vmatrix} 5\lambda - \omega^2 & -2\lambda & 0 \\ -2\lambda & 3\lambda - \omega^2 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (f)$$

展开方程, 得

$$\omega^6 - 9\lambda\omega^4 + 18\lambda^2\omega^2 - 6\lambda^3 = 0 \quad (g)$$

解得

$$\omega_1^2 = 9.9786 \frac{EI}{ml^3}, \quad \omega_2^2 = 55.0627 \frac{EI}{ml^3}, \quad \omega_3^2 = 150.959 \frac{EI}{ml^3} \quad (h)$$

由此求得

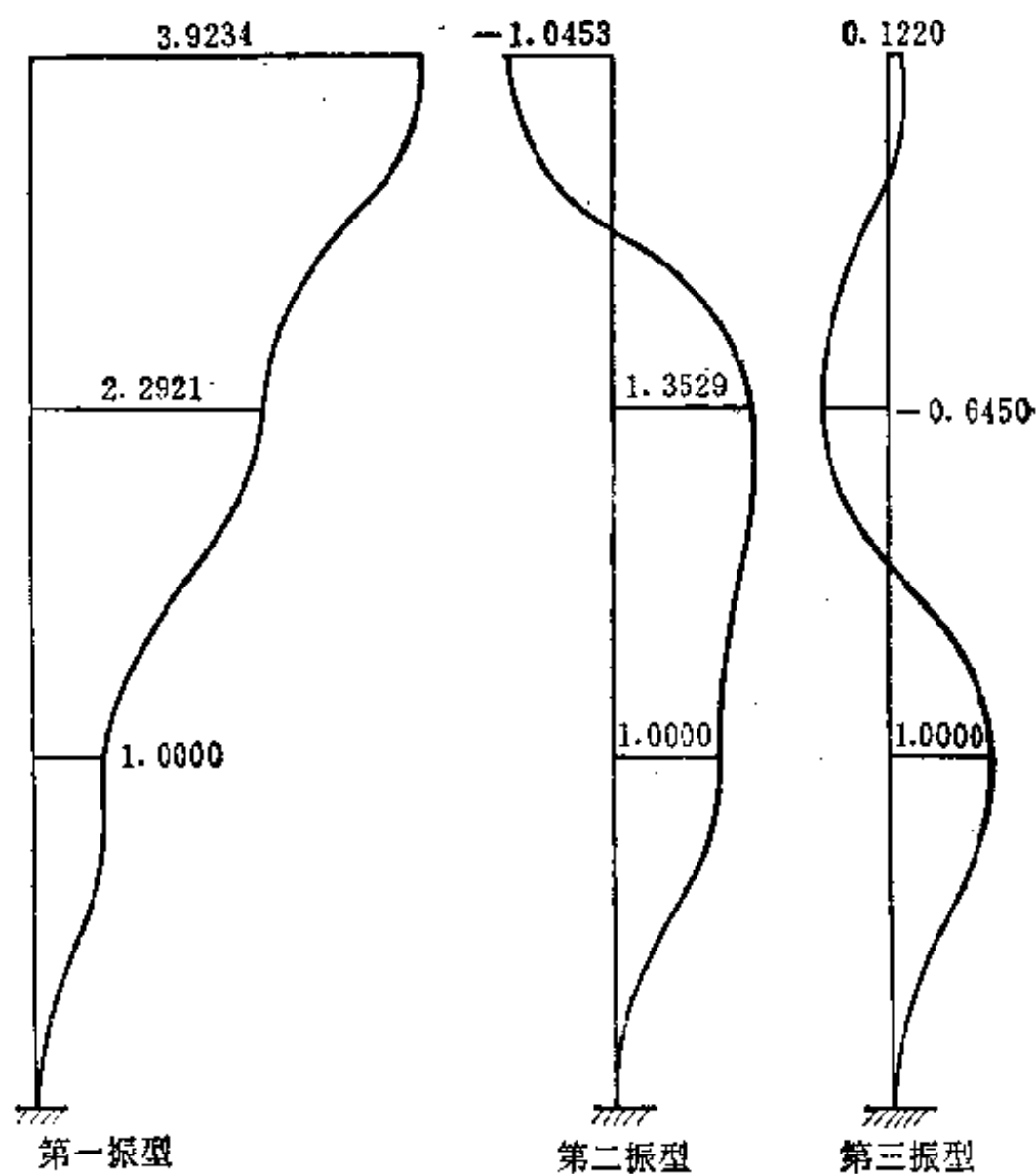


图 2.13

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 3.1589\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, \quad \omega_2 = 7.4204\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, \\ \omega_3 &= 12.2865\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}\end{aligned}\quad (i)$$

将 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 的值代入振型方程(e), 依次得到主振型:

$$U_1 = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 2.2921 \\ 3.9234 \end{Bmatrix}, \quad U_2 = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.3529 \\ -1.0453 \end{Bmatrix}, \quad U_3 = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -0.6450 \\ 0.1220 \end{Bmatrix} \quad (j)$$

2.9.5 系统对外扰力的响应

如果在系统上除有势力外, 还作用有随时间而变的外力, 则运动方程(2.9.11)'变成

$$M\ddot{q} + Kq = F(t) \quad (2.9.44)$$

其中 $F(t) = [f_1(t), \dots, f_n(t)]^T$ 称为干扰力。为求出上式的解, 可利用系统自由振动的主振型矩阵 P , 作变换 $q = Pz$, 使其解耦, 得

$$\text{diag}[M_i]\ddot{z} + \text{diag}[K_i]z = P^T F \quad (2.9.45)$$

或写成分量形式:

$$M_i \ddot{z}_i + K_i z_i = Q_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.9.45)'$$

其中 $Q_i (i=1, \dots, n)$ 是 $P^T F$ 列阵的元素。利用 Duhamel 积分可将(2.9.45)'的解表示为:

$$\begin{aligned}z_i &= c_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t Q_i(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \\ (i &= 1, \dots, n)\end{aligned} \quad (2.9.46)$$

再返回到原坐标 q , 即得:

$$q_i = \sum_{k=1}^n u_i^{(k)} z_k$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n u_i^{(k)} \left\{ c_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\omega_k} \int_0^t Q_k(\tau) \sin \omega_k(t - \tau) d\tau \right\} \quad (i=1, \dots, n)
\end{aligned}
\tag{2.9.47}$$

这便是原方程(2.9.44)的解——原系统的动力响应。其中 c_k 及 φ_k 与初始条件有关,含这两类参数的项属于自由振动,当阻尼存在时,这类项很快衰减而失去意义,只有用Duhamel积分表示的部分才代表动力响应的主要结果。

微振动理论是 Lagrange 力学的重要组成部分之一,也是力学问题中用 Lagrange 方法得到全面、彻底解决的典型范例。本书限于篇幅只能讨论其中若干基本问题,详尽论述可参阅振动理论专著。

2.10 保守陀螺系统的微振动

我们已经不止一次接触到各种形式的广义陀螺力,现在要研究保守系统在陀螺力作用下的自由振动问题。如果保守系统具有稳定平衡位形,那么在陀螺力作用下这个平衡位形能否继续保持稳定呢?这得由运动稳定性的一般理论来回答。保守陀螺系统的运动微分方程可表为

$$M\ddot{q} + G\dot{q} + Kq = 0 \tag{2.10.1}$$

其中 $G = -G^T$ 为陀螺力的系数矩阵,其余记号同前,根据 Ляпунов 稳定性判据*有以下定理:

若原保守系统的平衡位形是稳定的,引入陀螺力后不会破坏系统的稳定性。

* 见参考文献[5]。

以下介绍 Meirovitch 将保守陀螺系统的振动问题化为特征值问题的方法*, 引入 $2n$ 维状态向量

$$\mathbf{u}(t) = [\dot{\mathbf{q}}(t)^T; \mathbf{q}(t)^T]^T \quad (2.10.2)$$

于是(2.10.1)可写为以下形式:

$$\mathbf{M}^\wedge \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{G}^\wedge \mathbf{u}(t) = 0 \quad (2.10.3)$$

其中

$$\mathbf{M}^\wedge = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^\wedge = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{K} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10.4)$$

为 $2n$ 维非奇异方阵。由于 \mathbf{M}^* 是正定对称方阵, 而 \mathbf{G}^\wedge 是反对称方阵, 应该寻求方程(2.10.3)的以下形式的解:

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{x} \quad (2.10.5)$$

其中 λ 为常数组成的复数, \mathbf{x} 为 $2n$ 维常复向量, 将(2.10.5)代入(2.10.3)式, 消除 $e^{\lambda t}$ 后, 得到以下特征值问题:

$$\lambda \mathbf{M}^\wedge \mathbf{x} + \mathbf{G}^\wedge \mathbf{x} = 0 \quad (2.10.6)$$

方程(2.10.6)有非零解的条件是

$$\det(\lambda \mathbf{M}^\wedge + \mathbf{G}^\wedge) = 0 \quad (2.10.7)$$

以下探讨特征值 λ 的性质。由于矩阵转置后其行列式不变, 应有:

$$\det(\lambda \mathbf{M}^{\wedge T} + \mathbf{G}^{\wedge T}) = \det(\lambda \mathbf{M}^\wedge - \mathbf{G}^\wedge) = 0 \quad (2.10.8)$$

所以, 若 λ 是特征值, $-\lambda$ 也是特征值。

进一步要论证特征值是纯虚数。为此, 设某一特征对** λ_r, \mathbf{x}_r , 适合以下方程:

$$\lambda_r \mathbf{M}^\wedge \mathbf{x}_r + \mathbf{G}^\wedge \mathbf{x}_r = 0 \quad (2.10.9)$$

前乘以共轭向量 $\bar{\mathbf{x}}_r$ 后, 得到

* 见参考文献[30]。

** 特征对指某特征值及其所属的特征向量二者构成的总体。

$$\lambda_r \bar{x}_r^T M^\wedge x_r + \bar{x}_r G^\wedge x_r = 0 \quad (2.10.10)$$

再取以下记号

$$x_r = y_r + iz_r, \quad \bar{x}_r = y_r - iz_r \quad (2.10.11)$$

实向量 y_r, z_r 分别表示复向量 x_r 的实部及虚部, 将(2.10.11)代入(2.10.10)式后, 便得到以下式子:

$$\lambda_r (y_r^T M^\wedge y_r + z_r^T M^\wedge z_r) + 2iy_r^T G^\wedge z_r = 0 \quad (2.10.12)$$

由于 $y_r^T M^\wedge y_r + z_r^T M^\wedge z_r$ 及 $y_r^T G^\wedge z_r$ 都是实数, 因此上式能成立时, 必须要求 λ_r 是虚数。综上所述可知, 保守陀螺系统的特征根由 n 对共轭虚数 $\pm i\omega_r (r=1, \dots, n)$ 组成, 相应的特征向量也是由 n 对共轭复向量 x_r 及 $\bar{x}_r (r=1, \dots, n)$ 组成。如令 $\lambda = i\omega_r$, $x_r = y_r + iz_r$, 其中 y_r 及 z_r 均为实向量, 则代入(2.10.9)式后, 分别令等式左端的实部及虚部为零, 便可得到以下关系:

$$K^\wedge y_r = \omega_r^2 M^\wedge y_r, \quad K^\wedge z_r = \omega_r^2 M^\wedge z_r \quad (2.10.13)$$

其中

$$K^\wedge = G^{\wedge T} M^{\wedge -1} G^\wedge \quad (2.10.14)$$

可见, $2n$ 个向量 y_r 及 z_r 都是同一个特征值问题

$$K^\wedge \phi = \omega^2 M^\wedge \phi \quad (2.10.15)$$

的解。由于 K^\wedge, M^\wedge 都是对称矩阵, 所以适当选择的 y_r 及 z_r 应能满足以下正则化正交条件:

$$\left. \begin{aligned} y_r M^\wedge y_s &= \delta_{rs}, & z_r M^\wedge z_s &= \delta_{rs} \\ y_r M^\wedge z_s &= \delta_{rs}, & z_r M^\wedge y_s &= \delta_{rs} \end{aligned} \right\} \quad (r \neq s) \quad (2.10.16)$$

又由于 $2n$ 维特征值问题(2.10.15)只有 n 个特征值 $\omega_r (r=1, \dots, n)$, 每个特征值 ω_r 都是二重根, 所属的二个特征向量经适当线性组合后仍能保持彼此正交(见2.9节), 因此, (2.10.16)式中的后两式可不受 $r \neq s$ 的限制, 即对于任何 r 与 s , 应有

$$y_r M^\wedge z_s = \delta_{rs}, \quad z_r M^\wedge y_s = \delta_{rs} \quad (2.10.17)$$

于是特征值问题(2.10.15)含有 $2n$ 个彼此正交的特征向量 $y_1, \dots,$

$y_n; z_1, \dots, z_n$ 。读者不难证明, 类似于保守系统微振动的展开定理仍然成立: 陀螺系统的任意状态向量 v 都可表为 $2n$ 个特征向量的线性组合:

$$v = \sum_{r=1}^n a_r y_r + \sum_{r=1}^n b_r z_r \quad (2.10.18)$$

有了展开定理, 就可研究任意扰动力作用下的动力响应问题。这里值得指出的是, 对应第 r 个主频率 ω_r 的主振动 v 应是由复向量 x_r 及其共轭向量 \bar{x}_r 组成(见(2.9.63)式):

$$u_r = a_r e^{i\omega_r t} x_r + \bar{a}_r e^{-i\omega_r t} \bar{x}_r$$

但 u_r 是实向量, 因之, 上式应化为实数形式如下:

$$u_r(t) = c_r [\cos(\omega_r t + \alpha_r) y_r + \sin(\omega_r t + \alpha_r) z_r] \\ (\tau = 1, \dots, n) \quad (2.10.19)$$

其中 c_r 及 α_r 应由初始条件决定, 这表明: 对应同一主频率 ω_r 的自由振动由以 y_r 及 z_r 为振型的两种振动组合而成, 而这两个振动的相位恒相差 $\frac{\pi}{2}$ 。

知道了以上保守陀螺系统的基本特性后, 在解决具体问题时, 如果仅对固有频率感兴趣, 可以仍在位形空间中进行, 不必在状态空间中进行, 这样做可能简单一些。

例题 2.10.1 一圆环绕其中心 O 点以等角速 ω_0 转动, 在圆环内将质量为 m 的质点用 4 根弹簧相联结, 每根 x 方向弹簧刚度为 $\frac{1}{2}k_1$, 每根 y 方向弹簧刚度为 $\frac{1}{2}k_2$, (Oxy 为固结在圆环上的转动标架)。试列出质点的相对运动方程, 并研究相对自由振动的解。

解 在微振动情况下系统的动能表达式为

$$T = \frac{1}{2} [(\dot{x} - \omega_0 y)^2 + m(\dot{y} + \omega_0 x)^2] \quad (a)$$

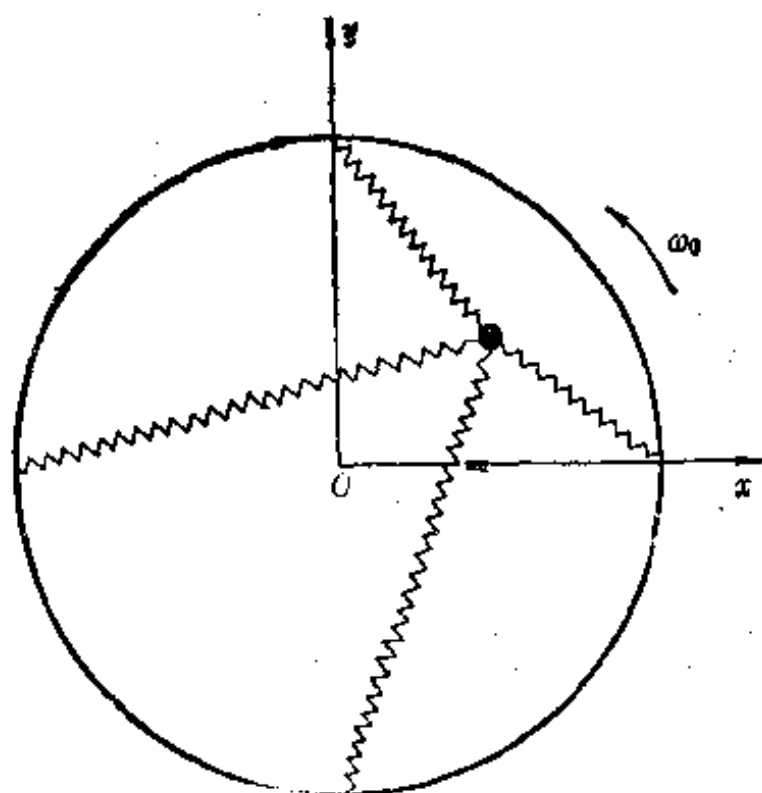


图 2.14

弹簧的势能表达式为

$$V = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 y^2 \quad (b)$$

将 T, V 代入 Lagrange 方程后, 得到相对运动方程为

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} - 2m\omega_0\dot{y} + (k_1 - m\omega_0^2)x &= 0 \\ m\ddot{y} + 2m\omega_0\dot{x} + (k_2 - m\omega_0^2)y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

所以, 当 ω_0^2 小于 $\frac{k_1}{m}$ 和 $\frac{k_2}{m}$ 中的最小者时, 坐标原点仍能满足稳定平衡位形的条件, 这条件是充分的, 但不必要。进一步的研究表明: 原来不稳定的状态也可能通过陀螺力使其稳定。

令

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k_2}{m} \quad (d)$$

分别代表质点在无转动情况下的固有频率平方, 于是方程(c) 简化为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega_0 \dot{y} + (\omega_1^2 - \omega_0^2)x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\omega_0 \dot{x} + (\omega_2^2 - \omega_0^2)y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

这是一个典型的保守陀螺系统，根据这种系统的解的性质 (2.10.19)，应取以下形式的特解：

$$x = C \sin(pt + \alpha), \quad y = D \cos(pt + \alpha) \quad (f)$$

代入方程 (e) 后，得到

$$\left. \begin{aligned} [(\omega_1^2 - \omega_0^2) - p^2]C + 2\omega_0 p D &= 0 \\ 2\omega_0 p C + [(\omega_2^2 - \omega_0^2) - p^2]D &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

这组方程有非零解的条件为：

$$[(\omega_1^2 - \omega_0^2) - p^2][(\omega_2^2 - \omega_0^2) - p^2] - 4\omega_0^2 p^2 = 0 \quad (h)$$

由此得到 (h) 的两个解为：

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_0^2) \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(\omega_1^2 - \omega_0^2)(\omega_2^2 - \omega_0^2)}{(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_0^2)}} \right) \quad (i)$$

由 (g) 可知：

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } p = p_1 \text{ 时, } D_1 &= -\frac{(\omega_1^2 - \omega_0^2) - p_1^2}{2\omega_0 p_1} C_1 = -\beta_1 C_1 \\ \text{当 } p = p_2 \text{ 时, } D_2 &= -\frac{(\omega_2^2 - \omega_0^2) - p_2^2}{2\omega_0 p_2} C_2 = -\beta_2 C_2 \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

β_1, β_2 为不依赖于初始条件的振型系数。

自由振动的一般解具有以下形式：

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(p_2 t + \alpha_2) \\ y &= -\beta_1 C_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) - \beta_2 C_2 \cos(p_2 t + \alpha_2) \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

由此可知，每一主振动都是以 x, y 轴为主轴的椭圆运动，每个主振型的椭圆形状，即长短轴的比例由系统的固有参数 β_1, β_2 决定，每个主振动的固有频率由系统另一对固有参数 p_1, p_2 决定。我们看到，这和非转动情况下的主振型有显著的区别，后者的两个主振动分别是沿 x 轴及 y 轴的直线振动。

设 $\omega_1^2 = 2\omega_0^2$, $\omega_2^2 = 4\omega_0^2$, 由方程(i)求得固有频率平方如下:

$$p_1^2 = 0.39444\omega_0^2, \quad p_2^2 = 7.60556\omega_0^2 \quad (l)$$

代入(g)中任一方程, 可求得振型系数如下:

$$\beta_1 = 1.535, \quad \beta_2 = -0.8685 \quad (m)$$

于是每一主振动的方程为:

$$\begin{cases} x_1 = \sin(p_1 t + \alpha_1) \\ y_1 = -1.535 \cos(p_1 t + \alpha_1) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \sin(p_2 t + \alpha_2) \\ y_2 = 0.8685 \cos(p_2 t + \alpha_2) \end{cases} \quad (n)$$

每个主振动的示意图如下:

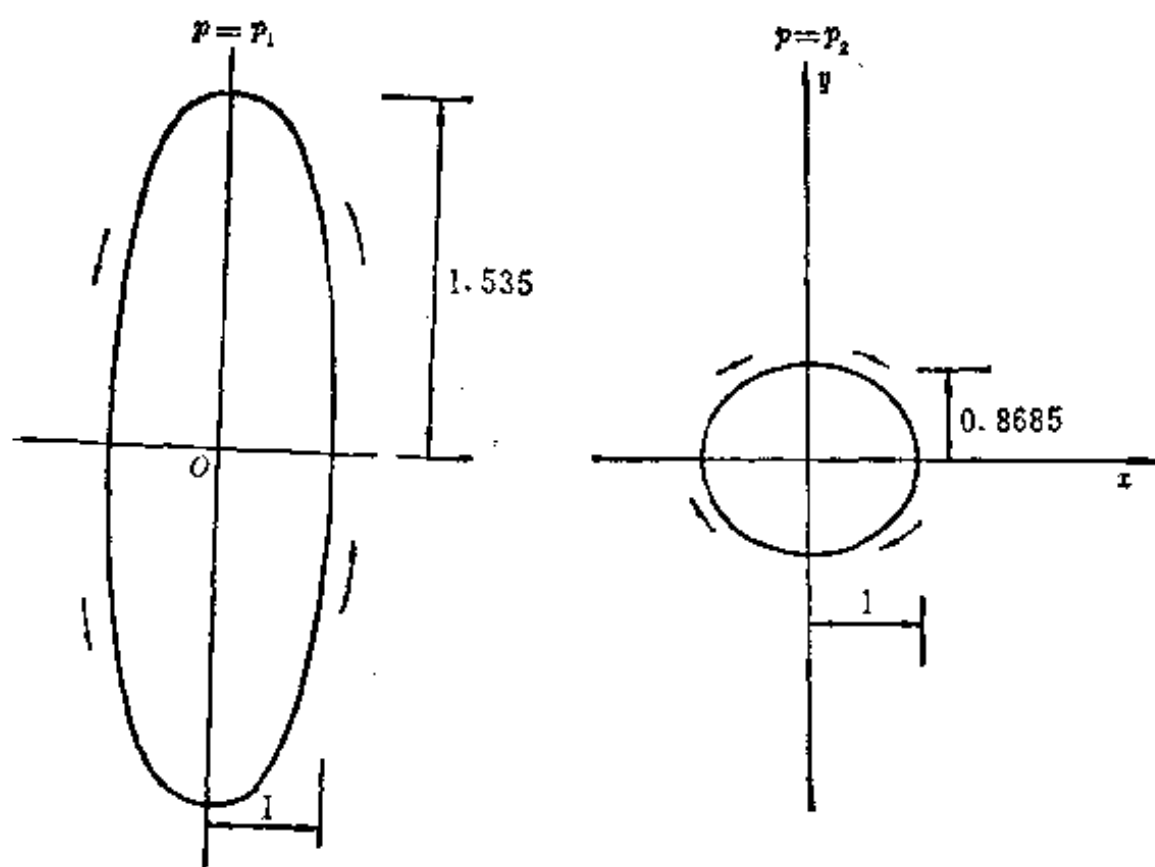


图 2.15

由上图可见, 每个主振动不仅频率不同, 轨迹形状不同, 而且运动的转向也不相同。保守陀螺系统用广义坐标表示的振型一般不保持正交, 要想得到正交振型, 必须在状态空间中进行, 这就留给读者作为练习。

2.11 几个具体的工程系统动力学问题

以下讨论 Lagrange 力学在几个典型工程系统动力学问题中的应用。本节所讨论的问题,和本章曾列举过的几个例题的不同之处在于:(1)如何从工程技术中提炼出离散系统动力学问题,并建立力学模型(2)综合运用 Lagrange 力学的原理和方法处理这些力学模型,包括方程的建立,方程的降阶,以及在问题所允许的范围内进行数学上的简化(包括略去高阶小量的线性化等),直到求得最后的解答。(3)探讨所得结果在工程实际中的价值和意义。通过这些典型问题的讨论我们将能站在更高的水平上来理解 Lagrange 力学在处理各种现代工程力学问题中所发挥的重要作用。

2.11.1 陀螺摆的动力学问题

陀螺通常是指高速旋转的对称转子在空间自由地绕另一轴或另两个轴转动的系统。这种系统既有天然的也有人造的,地球及所有发生自转的天体就是巨大的陀螺,人造的陀螺则要借助于 Cardan 环架来实现,这种装置种类繁多,并在航空、航海工程中得到广泛的应用,本节着重讨论其中一种被称为陀螺摆的装置。

设陀螺外环轴为水平方向,外环平面的原始位置是水平的(xy 平面)。内环平面的原始位置为铅垂的(yz 平面)。外环平面和内环平面分别从原始位置绕 Ox 和 Oy 轴反时针方向转 α 和 β 角,转子绕自转轴反时针方向转 φ 角得到系统的任意位形,如图 2.16 所示。固结在内环上的动坐标轴 $Ox'y'z'$ 原来和定坐标轴 $Oxyz$ 相重合。已知系统各部分的惯性矩如下:

外环: $I_x = A_2$;

内环: $I_{y'} = I_{z'} = A_1$; $I_{x'} = C_1$;

转子: $I_{x'} = I_{y'} = A$; $I_{z'} = C$;

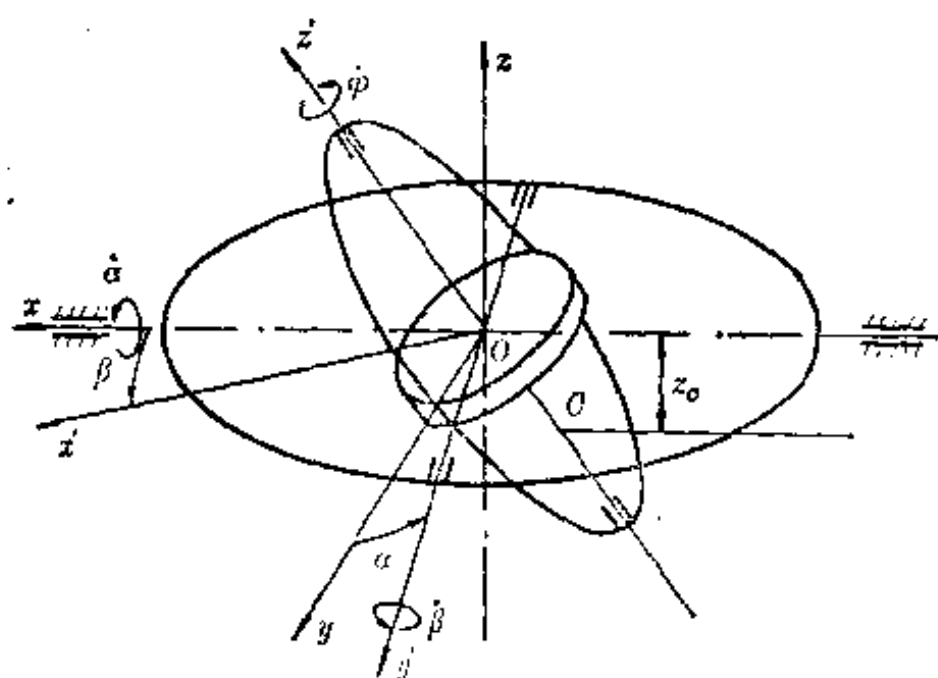


图 2.16

设外环及转子的重心都在 O 点, 但内环的重心在 z' 轴上 O 点下面的 C 点处, $CO=l$ 。内环的质量为 M 。

首先作运动学分析。如图 2.17 所示, 外环绕 x 轴转动 α 角使固结在内环上的坐标系变至 $Oxy'z_1$ 位置, 内环再绕 y' 轴转过 β 角后又将 $Oxy'z_1$ 变至 $Ox'y'z'$ 位置。外环、内环、及转子的角速度

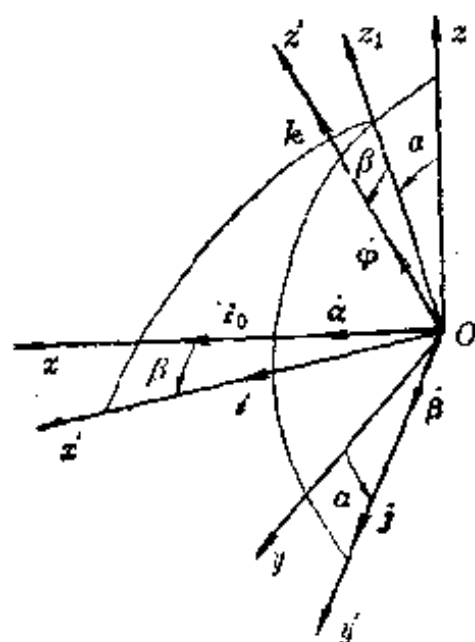


图 2.17

向量分别为 $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\phi}$ 。沿 x', y', z' 方向取单位向量 i, j, k , 沿 x 轴方向取单位向量 i_0 , 各部分的角速度向量可表达为

$$\text{外环: } \omega_1 = \dot{\alpha} i_0 \quad (2.11.1)$$

$$\text{内环: } \omega_2 = \dot{\alpha} \cos \beta i + \dot{\beta} j + \dot{\alpha} \sin \beta k \quad (2.11.2)$$

$$\text{转子: } \omega_3 = \dot{\alpha} \cos \beta i + \dot{\beta} j + (\dot{\phi} + \dot{\alpha} \sin \beta) k \quad (2.11.3)$$

各部分动能为

$$\text{外环: } T_1 = \frac{1}{2} A_2 \dot{\alpha}^2 \quad (2.11.4)$$

$$\begin{aligned} \text{内环: } T_2 &= \frac{1}{2} A_1 (\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta) + \frac{1}{2} C_1 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta \\ &= \frac{1}{2} [A_1 + (C_1 - A_1) \cos^2 \beta] \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} A_1 \dot{\beta}^2 \end{aligned} \quad (2.11.5)$$

$$\begin{aligned} \text{转子: } T_3 &= \frac{1}{2} A (\dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} C (\dot{\phi} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2 \\ &\quad (2.11.6) \end{aligned}$$

为了方便, 令

$$\left. \begin{aligned} a &= A_2 + A_1, b = C_1 - A_1 + A \\ c &= A_1 + A \end{aligned} \right\} \quad (2.11.7)$$

则系统的总动能可表达为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (a + b \cos^2 \beta) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} c \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} C (\dot{\phi} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2 \\ &\quad (2.11.8) \end{aligned}$$

如不计轴承摩擦, 系统所受唯一主动力为内环偏心的重力。内环重心 C 点的坐标为

$$z_C = -l \cos \alpha \cos \beta \quad (2.11.9)$$

系统的势能为:

$$V = Mgl \cos \alpha \cos \beta \quad (2.11.10)$$

Lagrange 函数为

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2} (a + b \cos^2 \beta) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} C \dot{\beta}^2 \\ &\quad + C (\phi + \dot{\alpha} \sin \beta)^2 + Mgl \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (2.11.11)$$

由于动能和广义力都不显含 ϕ , ϕ 为循环坐标。为了消去循环积分, 先列出循环积分。

$$p_\phi = C(\phi + \dot{\alpha} \sin \beta) = H \quad (2.11.12)$$

其中 H 为动量矩常数。然后列出 Routh 函数:

$$\begin{aligned} R &= L - p_\phi \phi \\ &= \frac{1}{2} (a + b \cos^2 \beta) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} c \dot{\beta}^2 + H \dot{\alpha} \sin \beta - \frac{H^2}{2C} \\ &\quad + Mgl \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (2.11.13)$$

系统的运动方程可由 Routh 方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial R}{\partial \alpha} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial R}{\partial \beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11.14)$$

给出

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [(a + b \cos^2 \beta) \dot{\alpha}] + H \dot{\beta} \cos \beta + \\ + Mgl \sin \alpha \cos \beta &= 0 \\ c \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} \cos \beta - b \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta + \\ + Mgl \cos \alpha \sin \beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11.15)$$

当 α, β 为小量时 (2.10.15) 式简化为

$$\left. \begin{aligned} (a+b)\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + Mgl\alpha &= 0 \\ c\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + Mgl\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11.16)$$

这是一个具有稳定平衡位形的保守陀螺系统, 方程(2.11.16)相当于以下矩阵形式的方程:

$$M\ddot{q} + G\dot{q} + Kq = 0 \quad (2.11.17)$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & H \\ -H & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} Mgl & 0 \\ 0 & Mgl \end{bmatrix} \quad (2.11.18)$$

因此按保守陀螺系统的振动理论, (2.11.16)的解应是包含二个固有频率 ω_1, ω_2 的微振动, 且应设其特解为以下形式:

$$\alpha = C \sin(\omega t + \theta), \quad \beta = D \cos(\omega t + \theta) \quad (2.11.19)$$

代入(2.11.16)式后, 得到以下特征方程:

$$\left. \begin{aligned} [Mgl - (a+b)\omega^2]C - H\omega D &= 0 \\ -H\omega C + [Mgl - c\omega^2]D &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11.20)$$

方程(2.11.20)具有非零解的条件为

$$[Mgl - (a+b)\omega^2][Mgl - c\omega^2] - H^2\omega^2 = 0 \quad (2.11.21)$$

或

$$(a+b)c\omega^4 - [Mgl(a+b+c) + H^2]\omega^2 + M^2g^2l^2 = 0 \quad (2.11.22)$$

$$\text{取记号} \quad k = Mgl(a+b+c) + H^2, \quad (2.11.23)$$

于是特征方程(2.11.22)的根为

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4(a+b)cM^2g^2l^2}}{2(a+b)c} \quad (2.11.24)$$

我们注意其判别式

$$\begin{aligned} & k^2 - 4(a+b)cM^2g^2l^2 \\ & > M^2g^2l^2(a+b+c)^2 - 4(a+b)cM^2g^2l^2 \\ & = M^2g^2l^2(a+b-c)^2 > 0 \end{aligned} \quad (2.11.25)$$

所以 ω_1^2 及 ω_2^2 一定大于零, 对应 ω_1 及 ω_2 的振型系数可求得如下:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{D_1}{C_1} = \frac{Mgl - (a+b)\omega_1^2}{H\omega_1} \\ k_2 &= \frac{D_2}{C_2} = \frac{Mgl - (a+b)\omega_2^2}{H\omega_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.11.26)$$

方程(2.11.16)的一般解为:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= C_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) \\ \beta &= k_1 C_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) + k_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.11.27)$$

其中 $C_1, C_2, \theta_1, \theta_2$ 由初始条件决定。

值得注意的是, 当转子转速很高时, H^2 比 $Mgl(a+b+c)$ 要大得多, 这时 $k \approx H^2$; 同时 k^2 也比 $4(a+b)cM^2g^2l^2$ 大得多, (2.11.24)可简化为

$$\omega_1 \approx \frac{Mgl}{H}, \quad \omega_2 = \frac{H}{\sqrt{(a+b)c}} \quad (2.11.28)$$

在陀螺理论中, 称低频 ω_1 为进动频率, 称高频 ω_2 为章动频率, 所以陀螺自转轴的运动是由低频进动与高频章动两种运动的组合, 类似于 Lagrange 陀螺的伪规则进动*。由(2.11.28)还可看出, 低频进动频率 ω_1 与力矩参数 Mgl 有关, 高频章动频率 ω_2 则与惯性参数 a, b, c 有关。当 ω_1, ω_2 与外界扰动频率相差愈大时, 陀螺摆抗干扰的能力愈强。以上分析对船用陀螺稳定器和航空陀螺水平仪的设计均有实用意义。

2.11.2 带有单圆盘的旋转轴的振动问题

在航空燃气轮机、发电厂汽轮机、以及电机、陀螺仪中都存在一个共同性问题, 即在一定转速条件下, 转子连同其柔性轴会产生危险的振动, 并导致系统的毁坏, 这就是所谓临界转速问题。临

* 见参考文献[35]。

界转速问题理论上归结为带有一个或多个刚性圆盘的弹性轴作横向振动时的固有频率问题。本书只限于讨论临界转速的最简单问题——带有单圆盘的弹性轴的横向振动问题。

质量为 m 的圆盘和弹性轴固结如图 2.18 所示。轴的两端用圆柱形轴承支承, 由于轴承长度远小于轴的长度, 可视为铰支承。

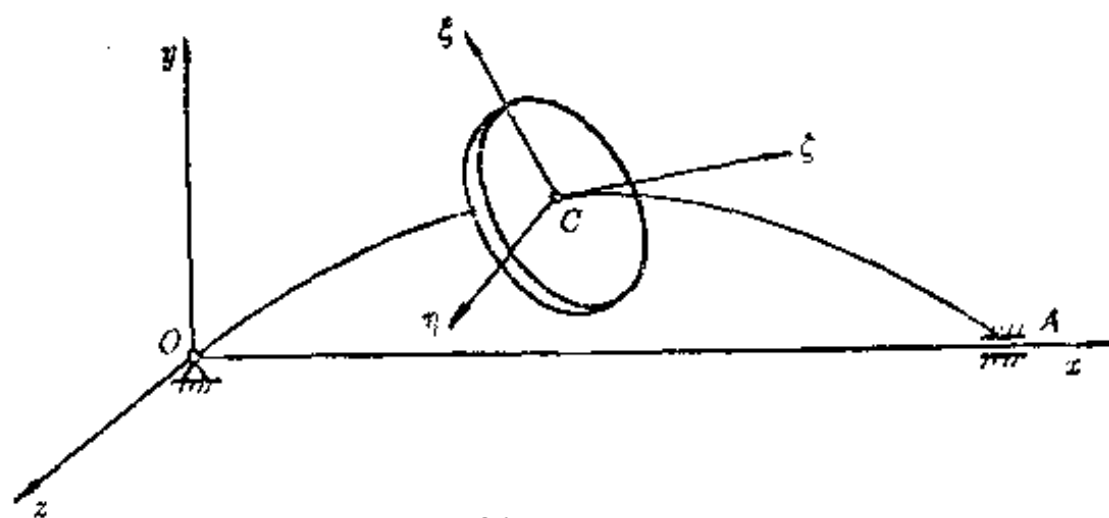


图 2.18

现在研究在小扰动情况下系统的运动方程。为此, 作以下三点假设: (1) 轴的变形属于小挠度弯曲, 圆盘中心的水平位移 (沿 x 轴方向) 可略去不计; (2) 轴的质量远小于圆盘质量, 可略去不计; (3) 圆盘刚性地固结于轴上, 因之运动过程中圆盘轴线方向总是和连结处弹性轴切线方向一致。

设圆盘对自身轴线及赤道面内轴线之转动惯量分别为 I_0 及 I 。圆盘的任意位置示于图 2.19 中。此时固结在圆盘上的动坐标系 $C\xi\eta\zeta$ (原来和 $Cx'y'z'$ 重合) 的位置可认为经过三次转动得到: 绕 y' 轴转动 α 角; 绕 η 轴转动 β 角, 再绕 ζ 轴转动 φ 角。相应的角速度向量 $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}$ 示于图中。在轴的变形很小时, β 可近似地认为沿 η 轴方向。圆盘的角速度沿 $C\xi', C\eta', C\zeta$ 三个轴的分量为

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\xi'} &= \dot{\alpha} \cos \beta \\ \omega_{\eta'} &= \dot{\beta} \\ \omega_{\zeta} &= \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (2.11.29)$$

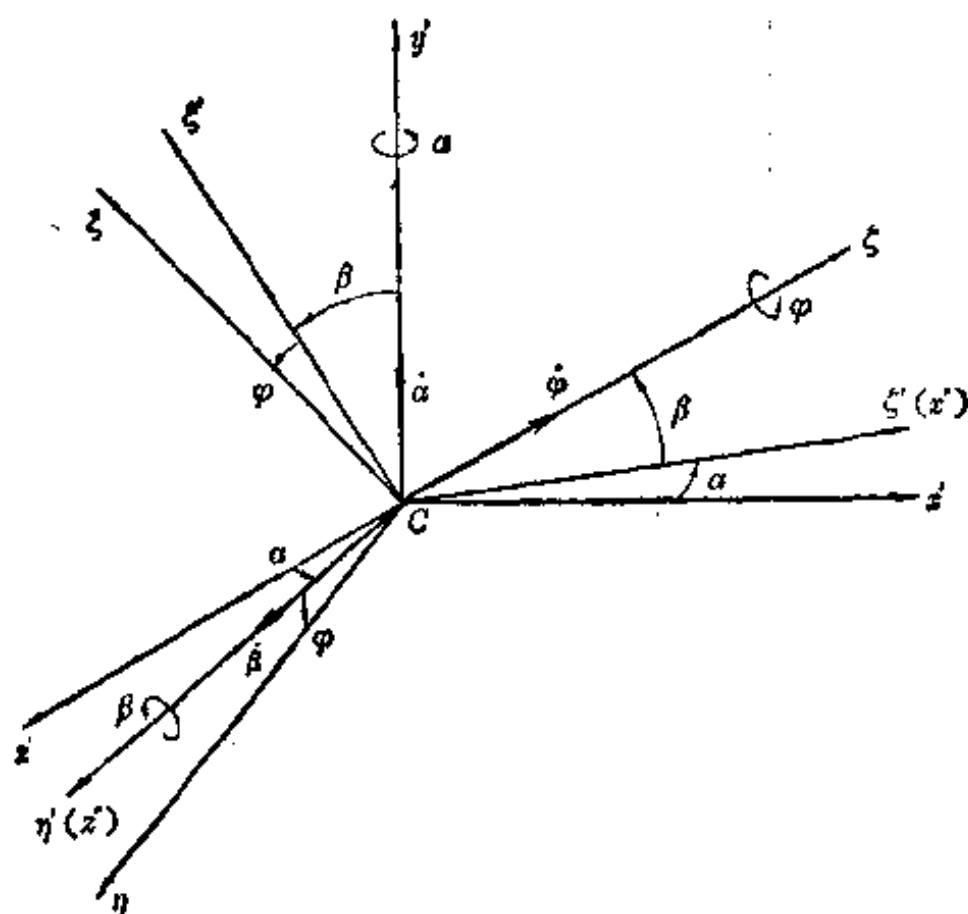


图 2.19

由于圆盘沿 x 轴方向位移可略去不计, 圆盘具有五个自由度: 两个移动自由度 y, z , 及三个转动自由度 α, β, φ 。又由于轴的质量略去不计, 圆盘的动能就是系统的动能。

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta) \\
 & + \frac{1}{2}I_0(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2
 \end{aligned} \quad (2.11.30)$$

为了求系统的势能, 先分析弹性轴上 C 点的受力与位移的关系。如图 2.20 所示, C 点受到四个广义力 P_y, P_z, M_α 和 M_β 的共同作用, 它们的正方向与相应广义坐标正方向相一致。由材料力学可知广义坐标与广义力的关系为

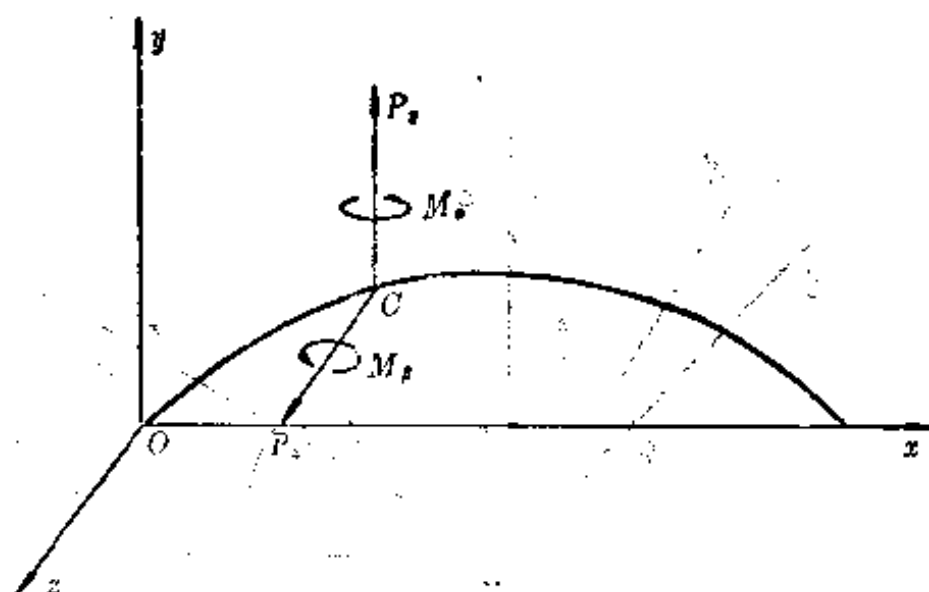


图 2.20

$$\left. \begin{aligned} y &= \delta_{11}P_y + \delta_{12}M_y \\ z &= \delta_{11}P_z + \delta_{12}M_z \\ \beta &= \delta_{12}P_y + \delta_{22}M_y \\ \alpha &= -\delta_{12}P_z + \delta_{22}M_z \end{aligned} \right\} \quad (2.11.31)$$

其中 δ_{ij} ($i, j=1, 2$) 为柔度系数, 可用材料力学方法计算得到。

由方程(2.11.31)反演, 可得广义力表达式:

$$\left. \begin{aligned} P_y &= c_{11}y - c_{12}\beta \\ P_z &= c_{11}z + c_{12}\alpha \\ M_y &= -c_{12}y + c_{22}\beta \\ M_z &= c_{11}z + c_{22}\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.11.32)$$

其中 c_{ij} 为刚度系数, 且 $c_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}$ 。于是轴的势能, 即系统的势能为

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}P_y y + \frac{1}{2}P_z z + \frac{1}{2}M_y \beta + \frac{1}{2}M_z \alpha \\ &= \frac{1}{2}(c_{11}y - c_{12}\beta)y + \frac{1}{2}(-c_{12}y + c_{22}\beta)\beta \\ &\quad + \frac{1}{2}(c_{11}z + c_{12}\alpha)z + \frac{1}{2}(c_{12}z + c_{22}\alpha)\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}c_{11}(y^2 + z^2) + c_{12}(-\beta y + z\alpha) \\
&\quad + \frac{1}{2}c_{22}(\alpha^2 + \beta^2)
\end{aligned} \tag{2.11.33}$$

动能表达式(2.11.30)式及势能表达式(2.11.33)式中都不显含 φ , 故 φ 是循环坐标。其循环积分为

$$p_\varphi = I_0(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) = I_0 \omega_z \tag{2.11.34}$$

ω_z 是圆盘角速度沿 ζ 轴的分量, (以下式中为方便只以 ω 表示), ω 等于常数, 它表示系统对 ζ 轴之动量矩守恒。

Routh 函数为

$$\begin{aligned}
R &= L - p_\varphi \dot{\varphi} \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta) \\
&\quad + \frac{1}{2}I_0 \omega^2 - I_0 \omega(\omega - \dot{\alpha} \sin \beta) - V \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta) \\
&\quad - \frac{1}{2}I_0 \omega^2 + I_0 \omega \dot{\alpha} \sin \beta - V
\end{aligned} \tag{2.11.35}$$

将(2.11.33)式代入对应坐标 y, z, α, β 的 Routh 方程中去, 便得到系统的运动方程:

$$\left. \begin{aligned}
m\ddot{y} + c_{11}y - c_{12}\beta &= 0 \\
m\ddot{z} + c_{11}z + c_{12}\alpha &= 0 \\
\frac{d}{dt}(I\dot{\alpha} \cos^2 \beta) + I_0 \omega \dot{\beta} \cos \beta + c_{12}z + c_{22}\alpha &= 0 \\
I\ddot{\beta} - I_0 \omega \dot{\alpha} \cos \beta - c_{12}y + c_{22}\beta &= 0
\end{aligned} \right\} \tag{2.11.36}$$

考虑到在微振动时, β 是小量, 在略去 β 的二阶以上的量后, 可取 $\cos \beta = 1$, 于是(2.11.36)可简化为

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y} + c_{11}y - c_{12}\beta &= 0 \\ m\ddot{z} + c_{11}z + c_{12}\alpha &= 0 \\ I\ddot{\alpha} + I_0\omega\dot{\beta} + c_{12}z + c_{22}\alpha &= 0 \\ I\ddot{\beta} - I_0\omega\dot{\alpha} - c_{21}y + c_{22}\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11.37)$$

这是 4 个自由度的保守陀螺系统的自由振动问题。

考虑到运动时 y, z 及对 α, β 的对称性, 可以按以下方式求解,

$$w = y + iz, \quad \psi = \alpha + i\beta \quad (2.11.38)$$

方程(2.11.37)归结为以下两个方程:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{w} + c_{11}w - ic_{12}\psi &= 0 \\ I\ddot{\psi} - iI_3w\dot{\psi} + c_{22}\psi - ic_{12}w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11.39)$$

设复变量 w, θ 为以下形式的解:

$$w = We^{ip t}, \quad \psi = \Psi e^{ip t} \quad (2.11.40)$$

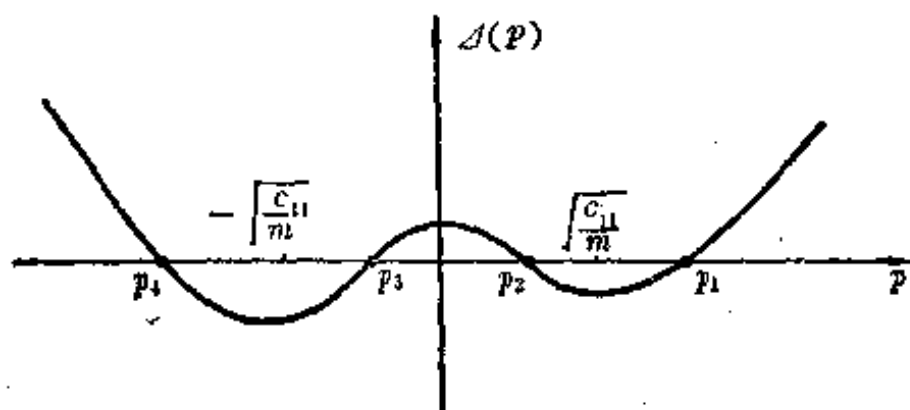
代人(2.11.39)后,得到

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - mp^2)W + ic_{12}\Psi &= 0 \\ -ic_{12}W + (c_{22} + I_3\omega p - Ip^2)\Psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11.41)$$

以上方程组有非零解之条件为:

$$\Delta(p) = (c_{11} - mp^2)(c_{22} + I_0 \omega p - Ip^2) - c_{12}^2 = 0 \quad (2.11.42)$$

由保守陀螺系统的基本理论, 可以肯定以上特征方程一定存在 4 个实根, 研究 $\Delta(p)$ 依赖于 p 的函数变化, 可得到以下曲线:



2.21

由图可见, $\Delta(p) = 0$ 存在两个正根 p_1, p_2 及两个负根 p_3, p_4 。由保守陀螺系统理论又知 x, y 之间及 α, β 之间不可能同位相, 其位相差为 $\frac{\pi}{2}$ 。所以每个主振型都相当于轴心以角速度 p_i 作圆周运动, 由于 p_1, p_2 和 ω 同号, 所以在对应的主振型中轴心和 ω 的转向相同, 称为正进动, 由于 p_3, p_4 和 ω 反号, 所以在对应的主振型中轴心和 ω 转向相反, 称为逆进动。此外, 进一步分析振型, 还可发现两个正进动和两个逆进动之间表现为 W 与 Ψ 之间的位相相同或相反, 详见转子动力学有关专著*。

2.10.3 圆形限制三体问题

三体问题是三个天体在相互之间的万有引力作用下的动力学问题, 是天体力学中的困难问题之一。但是, 在某些特殊情况下求解是较容易的, 例如圆型限制三体问题。所谓限制三体问题是指其中一物体的质量 m 很小, 不影响另外两物体 m_1 及 m_2 原有的运动; 而另两物体的运动可作为二体问题解出。圆型限制三体问题又是指这两物体在同一平面绕它们的质心以常角速度 ω 作圆周运动。在这种情况下, 小质量 m 在 m_1 及 m_2 的引力作用下的运动就归结为三个自由度的问题。这个古老的问题在航天工程中又重新发现其重要意义, 这是由于地球及月球的轨道偏心率很小, 在初步分析中可以近似地认为它们的轨道是圆周, 又由于航天器的质量远远小于地球和月球, 它对于地球和月球的运动影响完全可以略去不计。因之航天器-地球-月球系统的运动可以近似地作为圆型限制三体问题来分析。

在 m_1 及 m_2 的共同轨道面上建立坐标系 $Oxyz$, 坐标原点在

* 参阅: Ф. М. Диментберг, *Изгибные колебания вращающихся валов*, Изд-во АН СССР, 1959

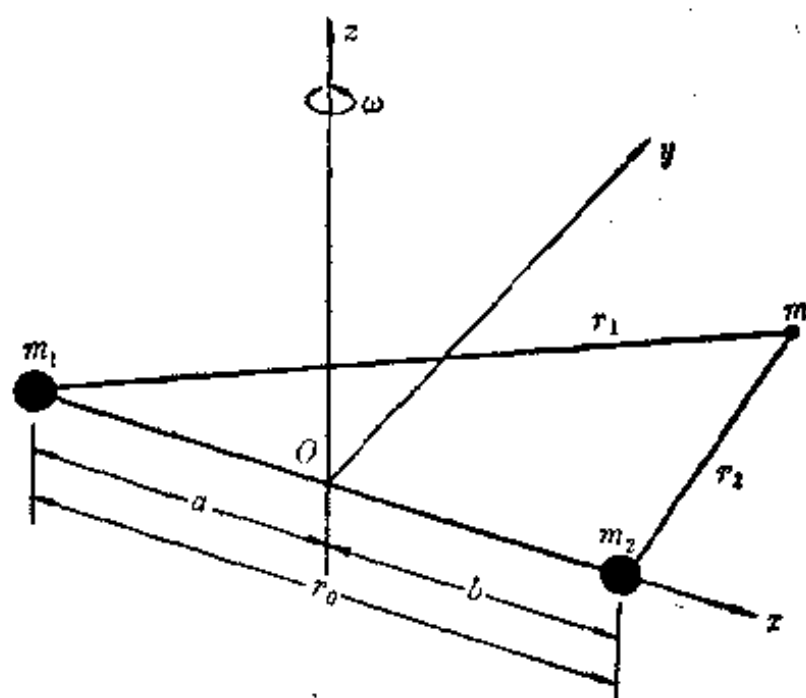


图 2.22

它们的质心上, Oxy 平面和轨道平面重合, 整个坐标系 Oz 轴以共同角速度 ω 转动。在这个转动坐标系中 m_1 及 m_2 处于相对静止状态, 它们到 O 点的距离分别用 a, b 表示。坐标系的角速度 ω 可对任一物体用动静法求得。对 m 有:

$$m_1 a \omega^2 = \frac{G m_1 m_2}{r_0^2} \quad (2.11.44)$$

但 $a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r_0$, 代入上式后, 可求得 ω^2 :

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{r_0^3} \quad (2.11.45)$$

其中 G 为万有引力常数, r_0 为 m_1 与 m_2 之间的距离。以下我们研究 m 在惯性空间(恒星坐标系)中的运动, m 的绝对运动的动能为

$$T = \frac{1}{2} m [(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + \dot{z}^2] \quad (2.11.46)$$

其中除 \dot{x}, \dot{y} 外, 还包含 \dot{z} , 表示 m 的运动不仅仅限制在 Oxy 平面内。将动能表达式分解出 T_2, T_1 , 及 T_0 项如下:

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ T_1 &= m\omega(x\dot{y} + y\dot{x}) \\ T_0 &= \frac{1}{2} m\omega^2(x^2 + y^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.11.47)$$

m 的势能为

$$V = -Gm\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) \quad (2.11.48)$$

其中 r_1 及 r_2 是 m 至 m_1 及 m 至 m_2 的距离。

$$r_1 = [(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}, \quad r_2 = [(x-b)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.11.49)$$

由 (2.11.47) 及 (2.11.48) 可列出 Lagrange 方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} &= -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} &= -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.11.50)$$

其中 U 为修正的势能函数:

$$\begin{aligned} U = V - T_0 &= -Gm\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} m\omega^2(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (2.11.51)$$

U 表示引力势能与离心势能之和。

我们不准备研究任意起始条件下方程 (2.11.48) 的积分, 只着重研究初积分。由于 Lagrange 函数 $L = T - V$ 中不含时间 t , 所以存在广义能量积分。

$$T_2 + (V - T_0) = T_2 + U = h \quad (2.11.52)$$

或

$$v^2 = \frac{2}{m} (h - U) \quad (2.11.53)$$

其中 h 为能量常数, 由初始条件决定。由于 v^2 不能小于零, 因之 m 的运动只能发生在以下不等式

$$h - U > 0 \quad (2.11.54)$$

所给定的区域内。方程

$$h = U(x, y, z) = \text{常数} \quad (2.11.55)$$

表示由一系列常数 h 所决定的曲面族, 也叫做零速度曲面。图 2.23 画出了零速度面和 Oxy 平面的截线, 每一条截线对应一定的 h

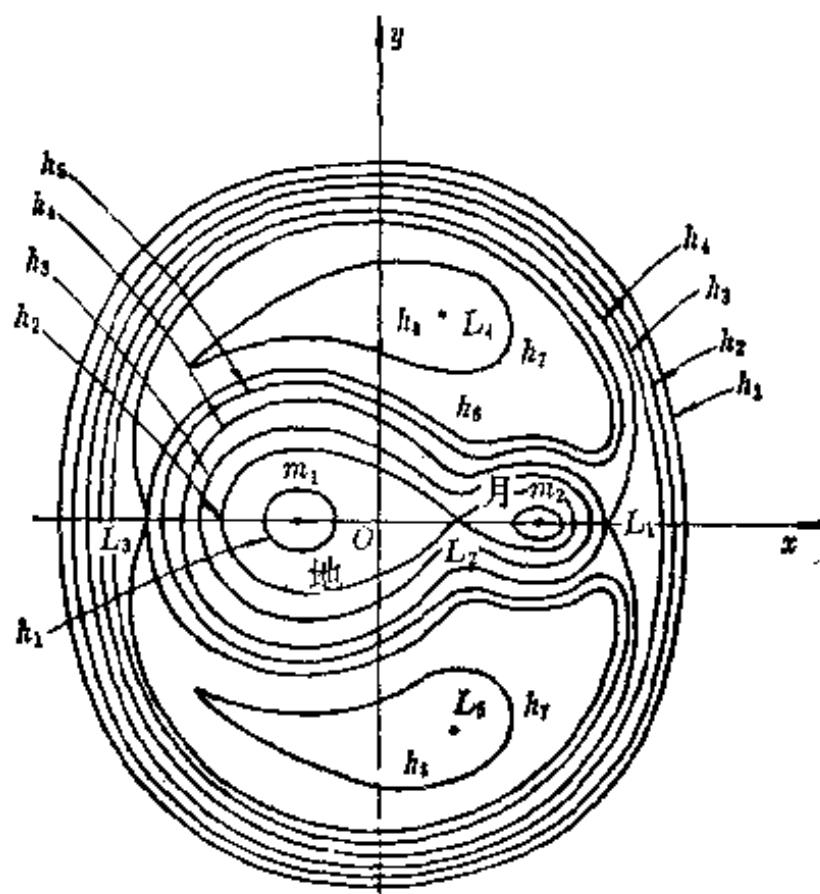


图 2.23

值。每一个零速度面 $U(x, y, z) = h$ 表示总能量为 h 的航天器所能达到的边界。例如, 在地球及月球附近的卵形零速度面 $U = h_1$ 表示总能量为 h_1 的航天器不能超出这个曲面之外。随着能量 h 的不断增大, 卵形零速度面的范围也逐渐增大, 当 h 增至一定值 h_2 时, 两族零速度面开始接通, 其截线呈 ∞ 形。这个 h_2 是地球表面发射的航天器能够绕月球飞行所必需的最小能量。

现在我们来讨论质点 m 处于相对平衡的位置。由 (2.11.50) 式可知, 当速度 $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 及加速度 $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ 恒等于零时, 必须满足以下条件:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= Gm \left[\frac{m_1(x+a)}{r_1^3} + \frac{m_2(x-b)}{r_2^3} \right] - m\omega^2 x = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= Gm \left(\frac{m_1 y}{r_1^3} + \frac{m_2 y}{r_2^3} \right) - m\omega^2 y = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= Gm \left(\frac{m_1 z}{r_1^3} + \frac{m_2 z}{r_2^3} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11.56)$$

将 (2.11.45) 式中的 ω^2 代入上式, 相对平衡条件可简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_1(x+a)}{r_1^3} + \frac{m_2(x-b)}{r_2^3} - \frac{(m_1+m_2)x}{r_0^3} &= 0 \\ y \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} - \frac{m_1+m_2}{r_0^3} \right) &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11.57)$$

上式中的第三方程表明平衡位置都在 xy 平面内。第二方程有两个解: $y=0$ 及 $r_1=r_2=r_0$ 。后者显然不能满足第一方程, 因此只有令 $y=0$ 及 $z=0$, 代入第一方程, 得

$$\frac{m_1(x+a)}{(x+a)^3} + \frac{m_2(x-b)}{(x-b)^3} - \frac{(m_1+m_2)x}{(a+b)^3} = 0 \quad (2.11.58)$$

这个方程的解对应于图 2.23 的 L_1, L_2 及 L_3 三个点。至于 $r_1=r_2=r_0$ 则对应于图 2.23 中的 L_4, L_5 两个点, 即 L_4 或 L_5 和 m_1, m_2 形成等边三角形。 L_1 至 L_5 这五个特解又叫做 Lagrange 称动点。进一步的研究指出: L_1, L_2, L_3 三个平衡位置是不稳定的。 L_4 及 L_5 按一阶近似是稳定的。

Lagrange 于 1772 年在研究圆型限制三体问题中即指出了称动点 L_4, L_5 的存在, 直至 1906 年才通过天文观测证实了称动点 L_4 和 L_5 的稳定性。有人发现了与木星和太阳成等边三角形的“称动点”处存在小行星群, 这个小行星群被命名为 Trojans 行星群。

观测的结果发现小行星群总是在 L_4 及 L_5 点附近作微振动, 这就证实了在 L_4 及 L_5 两点的小范围内的稳定性。称动点的研究对于宇航工程中建立星际航行站有重要意义。

2.11.4 轨道卫星的姿态运动问题

轨道和姿态运动是人造卫星动力学的两大重要问题。轨道问题的重要性已为人们所熟知, 姿态问题则是随通讯、侦察、太阳帆板等要求而提出的对地定向或对日定向的姿态稳定性问题。一种稳定姿态的方法是利用重力梯度, 即在卫星及其伸展系统有较大尺度时, 作用在卫星体上各点重力分布的不均匀性会形成与姿态偏角有关的力矩, 在适当选择卫星形体及质量分布后, 这个力矩可以起到稳定姿态的作用。通常姿态变化对轨道影响很小, 可以略去不计, 因此, 所谓轨道卫星的姿态运动, 是指轨道已经确定后的卫星姿态运动。

我们考虑一个绕地球作圆形轨道运行的卫星。设卫星具有旋转对称轴(形体轴), 在正常情况下要求卫星的形体轴指向地球中心。在图2.24中画出以引力中心(地球中心)为圆心的轨道, 在轨道

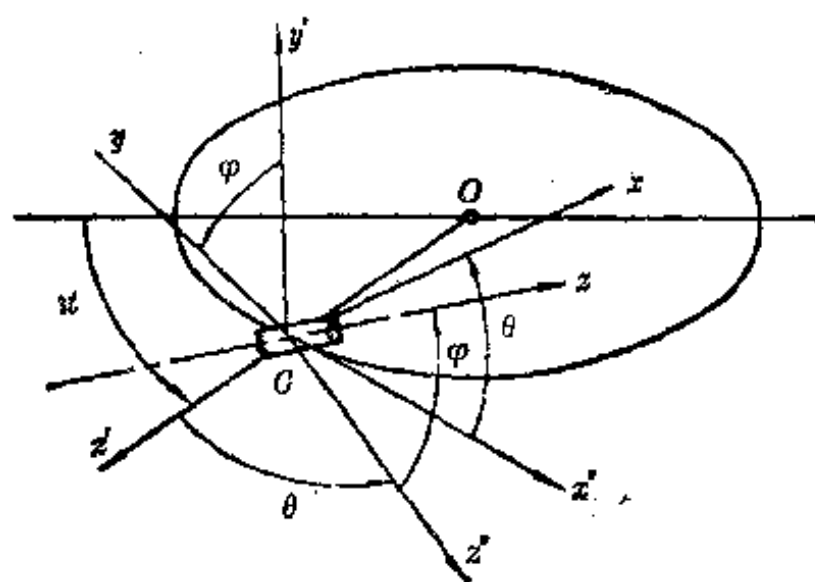


图 2.24

平面内通过卫星重心 G 作直角坐标: Gx' 轴沿轨道切线方向, Gz' 轴沿矢径方向, Gy' 轴和轨道平面正交。卫星在动坐标系 $Gx'y'z'$ 内之相对平衡位形相当于形体轴沿 Gz' 方向。卫星姿态稳定的问题是这样提出来的: 由于某种偶然的微小外界扰动使卫星位形偏离其相对平衡位形时, 其偏角是否限制在一个微小值的范围内。用两个参数 θ 及 φ 表示偏离平衡位形后的卫星的任意位形: $Gx'y'z'$ 绕 Gy' 轴转过 θ 角至 $Gxy'z''$, 然后令 $Gxy'z''$ 绕 Gx 轴转过 φ 角至 $Gxyz$ 。

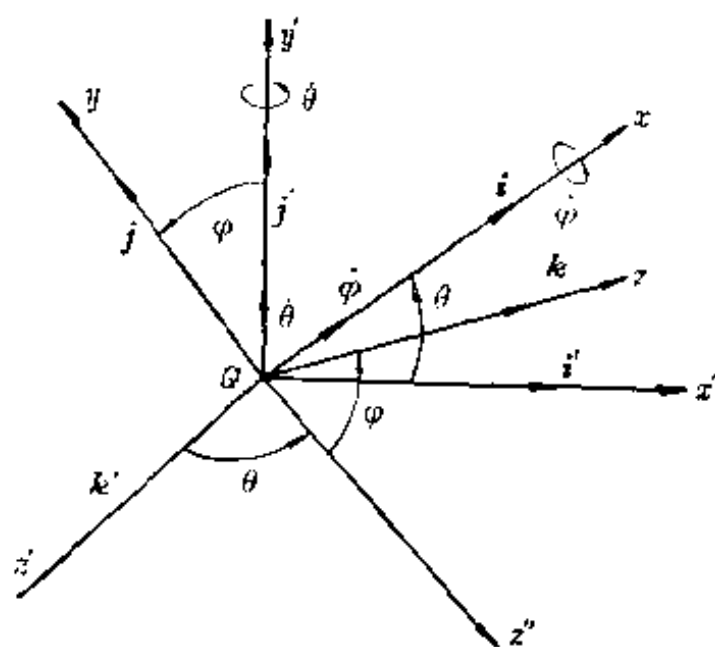


图 2.25

设卫星绕对称轴之转动惯量为 C , 绕通过重心且垂直于对称轴之任何轴的转动惯量为 A , 卫星的动能为:

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{A}{2}[\dot{\varphi}^2 + (\dot{\theta} + n)^2 \cos^2 \varphi] + \frac{C}{2}[\dot{\psi} + (\dot{\theta} + n) \sin \varphi]^2 \quad (2.11.59)$$

式中 $\frac{1}{2}mv_0^2$ 是卫星平动的动能, 后两项是卫星绕重心转动的动能。

$\dot{\psi}$ 为卫星的自转角速度, n 为卫星在轨道平面内运动中矢径的角

速度。

现在来求卫星在中心引力场内的势能。设卫星内任一质量元素 dm 在 $Gxyz$ 系内之坐标为 x, y, z , 引力中心 O 点在这个坐标系内之坐标为 x_0, y_0, z_0 。势能函数可表达为

$$V(x_0, y_0, z_0) = - \int \frac{k dm}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}} \quad (2.11.60)$$

式中 k 为引力常数。令

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ R^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.11.61)$$

在例题 1.7.3 中已证明：在 $r \ll R$ 的情况下势能函数可简化为

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0, z_0) &= - \frac{km}{R} - \frac{k}{R^3} \int \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x_0^2 x^2 + y_0^2 y^2 + z_0^2 z^2}{R^2} \right) - \frac{r^2}{2} \right] dm \\ &\quad (2.11.62) \end{aligned}$$

由于卫星具有旋转对称轴, 有

$$\int x^2 dm = \int y^2 dm \quad (2.11.63)$$

利用(2.11.61)和上式, (2.11.62)式可进一步简化为

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0, z_0) &= - \frac{km}{R} - \frac{k}{R^3} \int \left[\frac{3}{2R^2} (R^2 x^2 - z_0^2 x^2 + z_0^2 z^2) - \frac{1}{2} (2x^2 + z^2) \right] dm \\ &= - \frac{km}{R} - \frac{k}{R^3} \int \left[\frac{3z_0^2}{2R^2} - \frac{1}{2} \right] dm = - \frac{km}{R} + \frac{k(C-A)}{2R^3} \left(3 \frac{z_0^2}{R^2} - 1 \right) \\ &\quad (2.11.64) \end{aligned}$$

式中 z_0 表示由 G 向 O 所引向量 R 在 Gz 轴上的投影, z_0/R 表示 R 与 Gz 轴之间的夹角 β 的余弦, 如图 2.26 所示。由图可知

$$\cos \beta = -\cos \theta \cos \varphi \quad (2.11.65)$$

于是(2.11.61)式可改以球坐标 R, θ, φ 表达为

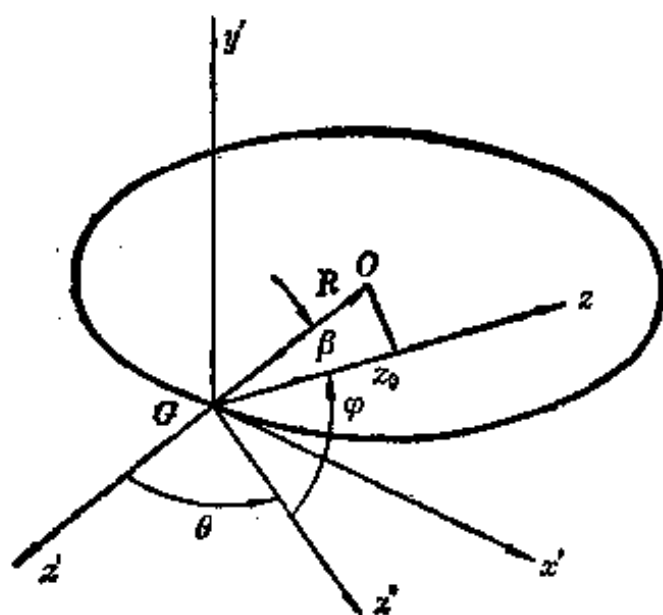


图 2.26

$$V(R, \theta, \varphi) = -\frac{km}{R} + \frac{k(C-A)}{2R^3} (3\cos^2\theta\cos^2\varphi - 1) \quad (2.11.66)$$

在我们的具体问题中 R 不变, 还有 $k = n^2 R^3$ 。为了书写方便, 以 c 代表上式中的常数项, 势能可表达为

$$V(\theta, \varphi) = \frac{3}{2}n^2(C-A)\cos^2\theta\cos^2\varphi + c \quad (2.11.67)$$

在 θ 和 φ 是小量的情况下, 卫星的动能与势能可近似地表达为

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{A}{2}[\dot{\varphi}^2 + (\dot{\theta} + n)^2] + \frac{C}{2}\dot{\psi}^2 \\ V &= \frac{3}{2}n^2(C-A)\left(1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\varphi^2}{2}\right) + c \end{aligned} \right\} \quad (2.11.68)$$

于是卫星的 Lagrange 方程为

$$C\ddot{\psi} = 0 \quad (2.11.69)$$

$$A\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}n^2(A-C)\varphi = 0 \quad (2.11.70)$$

$$A\ddot{\theta} + \frac{3}{2}n^2(A-C)\theta = 0 \quad (2.11.71)$$

由(2.11.69)式给出 $\dot{\psi} = \text{常数}$, 表明卫星自转角速度不受扰动影响, 保持不变。这是显而易见的, 因为 ψ 是循环坐标, 必存在循环积分, 即对 z 轴之动量矩守恒。(2.11.70)和(2.11.71)两式给出 φ 和 θ 的简谐振动解:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha_1) \quad (2.11.72)$$

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \alpha_2) \quad (2.11.73)$$

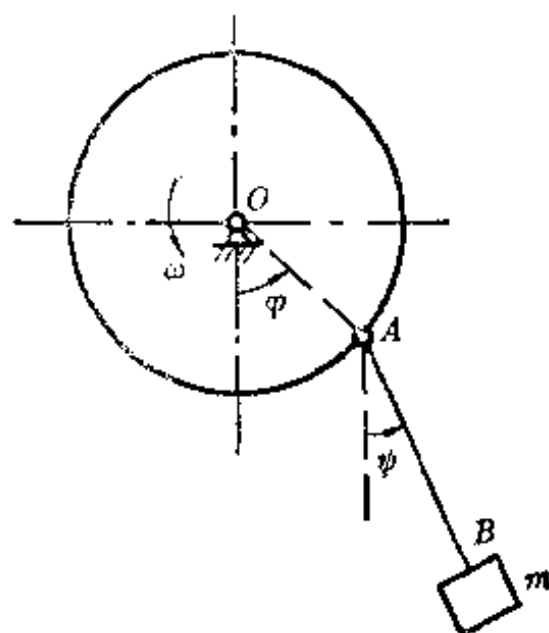
这表明无论 θ 或 φ 都按相同圆频率

$$\omega = n \sqrt{\frac{3}{2}(A-C)}$$

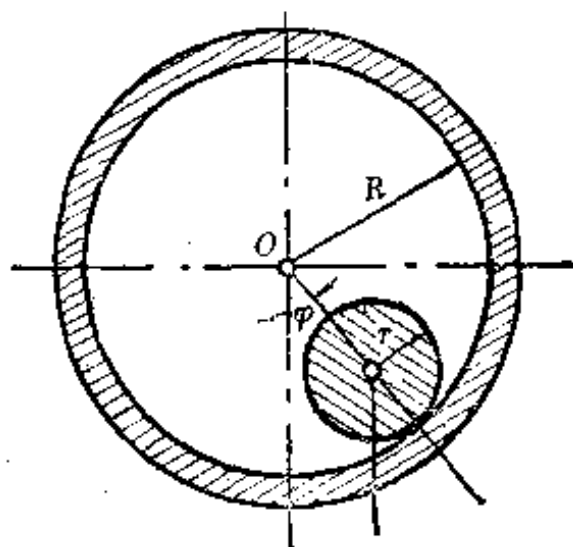
作简谐振动。当初始扰动足够小时, θ 及 φ 值也是很小的, 不会超过 θ_0 及 φ_0 , 在 $A > C$ 的条件下卫星能自动保持姿态稳定。可见, 球形卫星单靠引力作用不能实现自动姿态稳定。为了保证稳定, 卫星外形的设计应使惯性矩 A 与 C 之差尽可能大, 因此将卫星设计成杆状, 使质量尽可能集中在两端成哑铃形对保持姿态稳定是有利的。

第二章 习 题

2.1 一均质圆盘半径为 R , 质量为 M , 可以绕其自身的水平轴 O 转动。



题 2.1

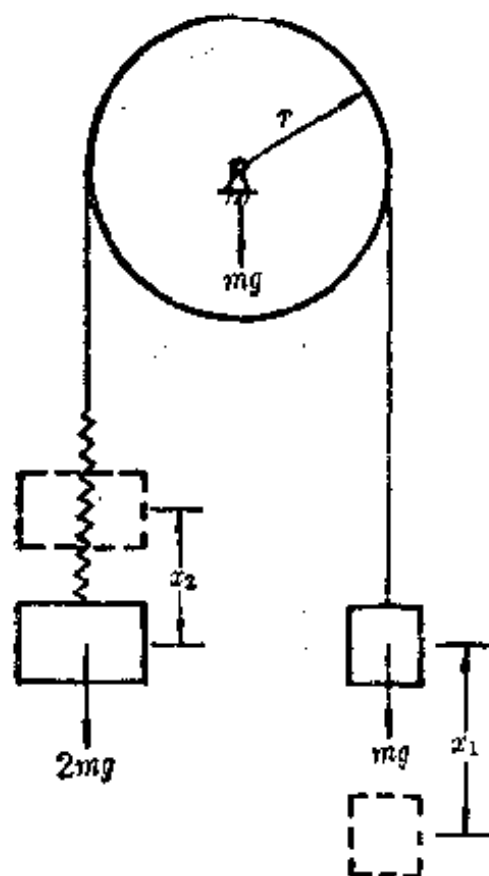


题 2.2

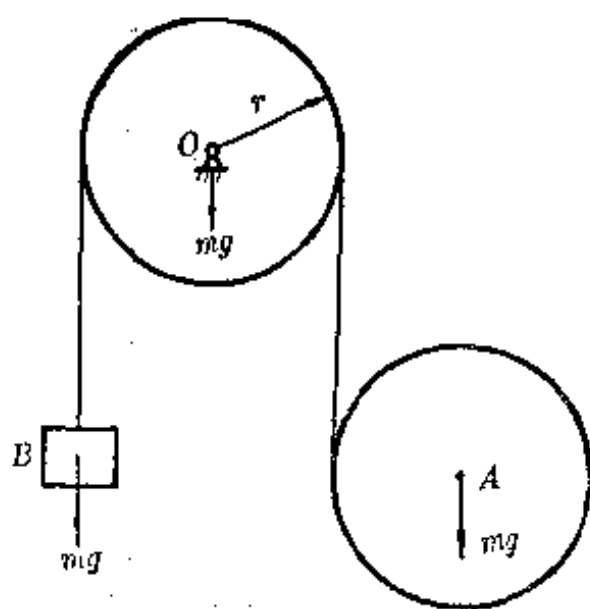
在圆盘边缘上以长为 l 的绳 AB 悬一质量为 m 的质点。试写出该系统的运动方程式。

2.2 一粗糙的圆柱体质量为 m , 半径为 r , 在一空心圆柱体的内表面上滚动而不滑动。空心圆柱体的质量为 M , 半径为 R , 能绕本身水平轴 O 转动, 两圆柱对于其本身轴的转动惯量分别等于 MR^2 与 $\frac{1}{2}mr^2$ 。试写出此系统运动方程并求其首次积分。

2.3 由质量分别为 m 及 $2m$ 的物块 A 和 B 及质量为 m 、半径为 r 的均质圆盘组成的定滑轮系统如图。 A 、 B 之间由不可伸长之绳及一刚度系数为 k 之弹簧联结, 绳及弹簧质量不计。开始时, A 、 B 静止地处在同一水平位置。求系统的运动方程。



题 2.3

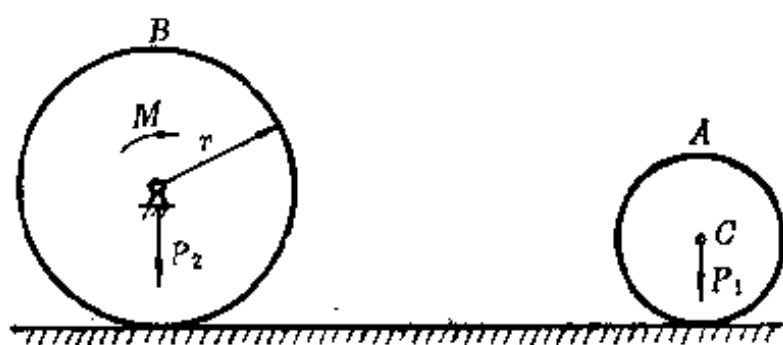


题 2.4

2.4 缠在物体 A 上的绳子跨过质量为 M 的定滑轮与质量为 m 的重物 B 相联。设 A 物体的质量为 m_1 , 对中心的回转半径为 ρ , 绳的质量不计, 绳与轮之间无滑动, 问在何种情况下 A 轮向上运动?

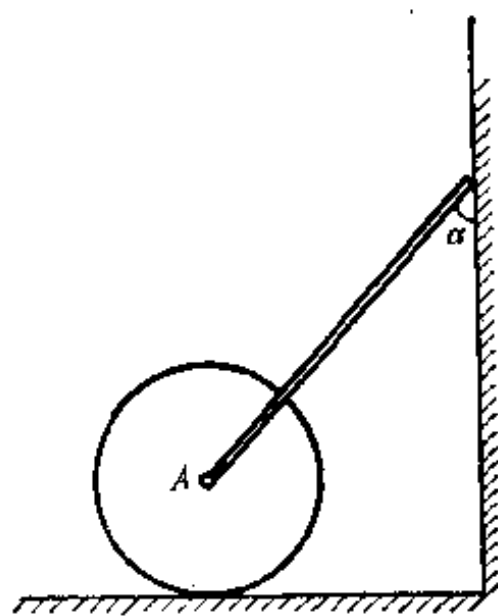
2.5 在实心圆柱 A 上缠以绳索, 绳索重量为 P_1 , 绳的另一端与定滑轮轮缘 B 相联, 轮 B 重 P_2 , 半径为 r , 是实心圆柱。绳与平面间摩擦不计, 轮 A

无滑动滚动。作用在 B 轮上的力矩为 M 。求滑轮 B 的角加速度和圆柱中心 C 的加速度。

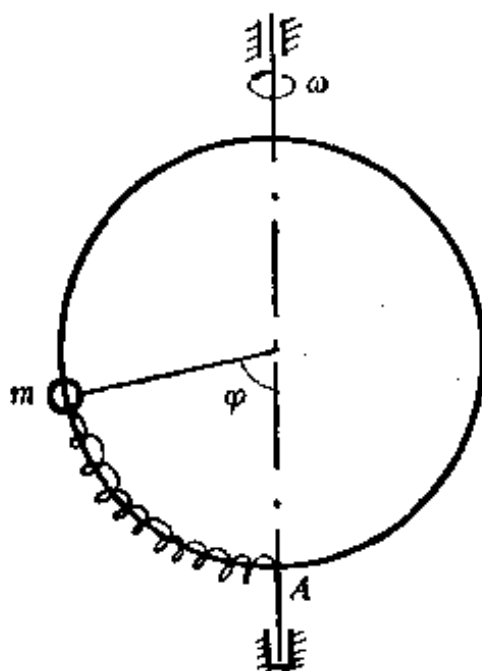


题 2.5

2.6 半径为 r 的匀质圆柱, 质量为 M , 均质杆 AB 长度为 l , 质量为 m 。设墙面是光滑的, 地面足够粗糙使圆柱只滚不滑。开始时, 系统静止且 $\alpha = 45^\circ$, 求在初始时刻 A 点和 B 点的加速度及杆的角加速度。



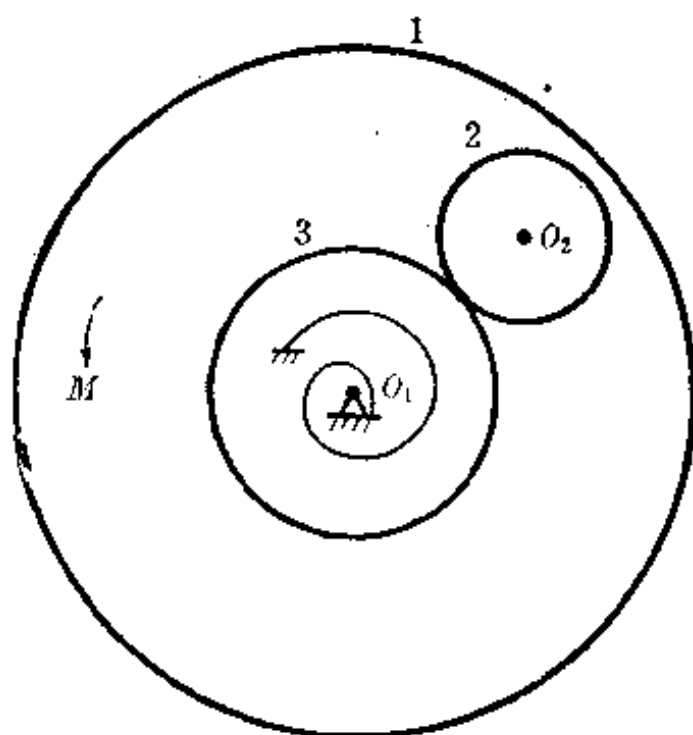
题 2.6



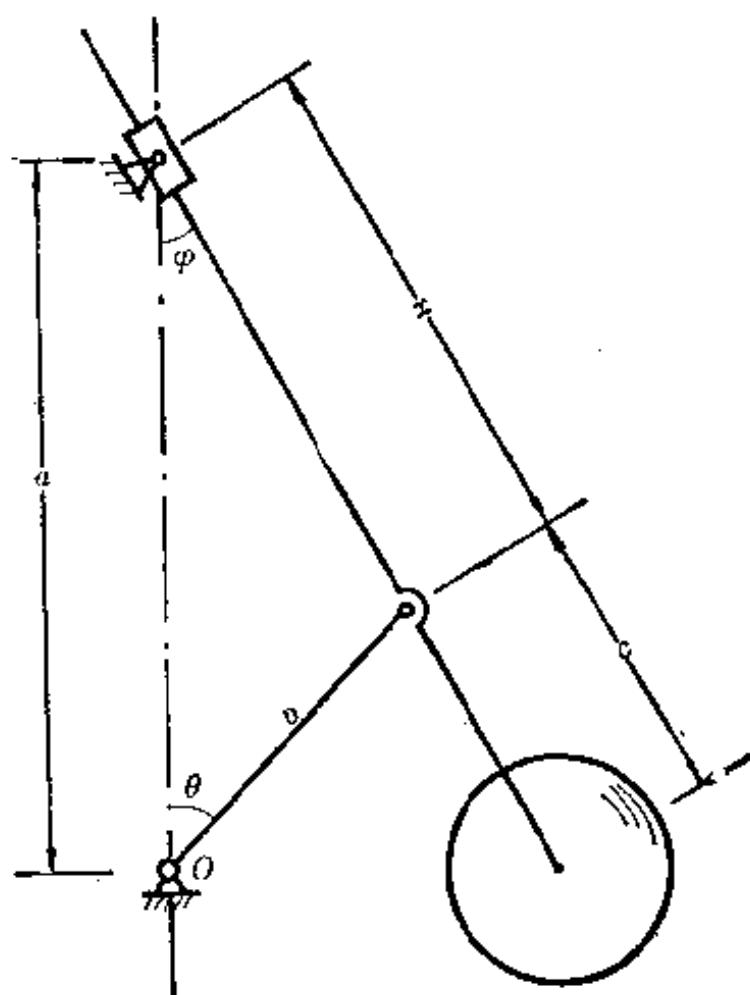
题 2.7

2.7 半径为 R 的光滑金属圆环以匀角速度 ω 绕直径转动。大环上套有质量为 m 的小环, 小环用弹性系数 k 的弹簧与圆周上的 A 点联结, 弹簧原长 $l_0 = R\varphi_0$, 试建立小环的相对运动微分方程。

2.8 飞轮 1 在不变力矩 M 作用下绕铅垂轴 O_1 转动。飞轮上装一可绕 O_2 转动的齿轮 2, 齿轮 3 与飞轮同轴且无关地转动, 齿轮 2 与齿轮 3 啮合, 由齿轮 2 带动齿轮 3 转动, 但齿轮 3 转动时受到一弹性系数为 k 的扭转弹簧的



题 2.8

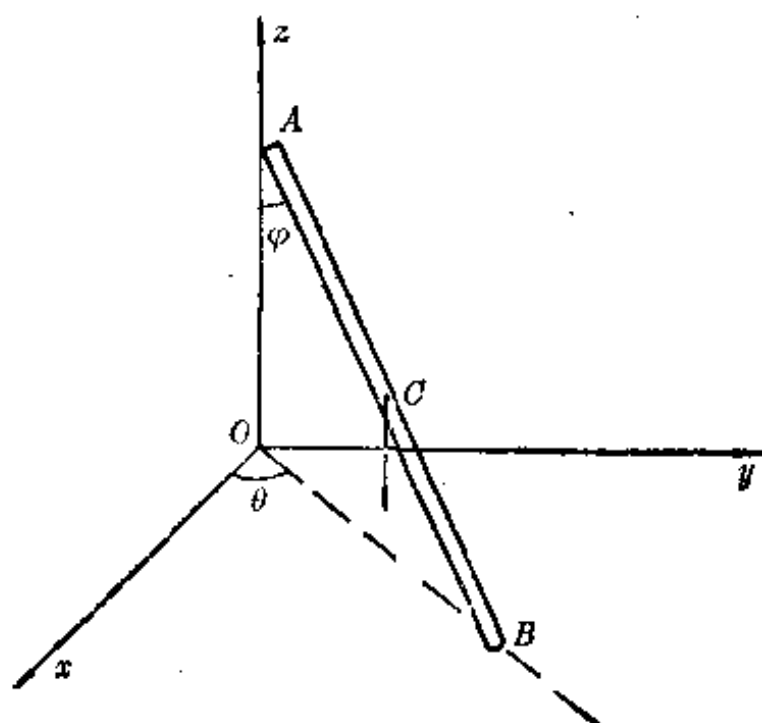


题 2.9

阻碍, 弹簧阻力矩为 $k\psi$ (ψ 为飞轮转角)。若视两齿轮均为半径为 a 质量为 m 的均质圆盘, 飞轮对 O_1 的转动惯量为 $20ma^2$, 系统开始时处于静止, 求系统的运动。

2.9 测振仪如图所示, 系统处于铅垂面内, 圆球 A 的质量为 m , 不计各杆质量, 且有 $bc > (a-b)^2$, 试求系统在铅垂位置附近作微振动的周期。(提示: 引入多余广义坐标)

2.10 均质杆 AB , 重 P , 长 $2l$, 端点 A 沿铅垂线 A 无摩擦地滑动, 而另一端 B 则在光滑水平面上滑动。试求杆运动的首次积分。



题 2.10

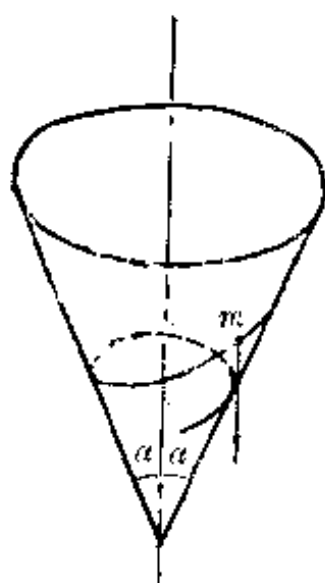
2.11 有一个两自由度系统, 广义坐标为 q_1, q_2 。系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} \frac{\dot{q}_1^2}{a + bq_1^2} + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 - a_1 - b_1 q_1^2$$

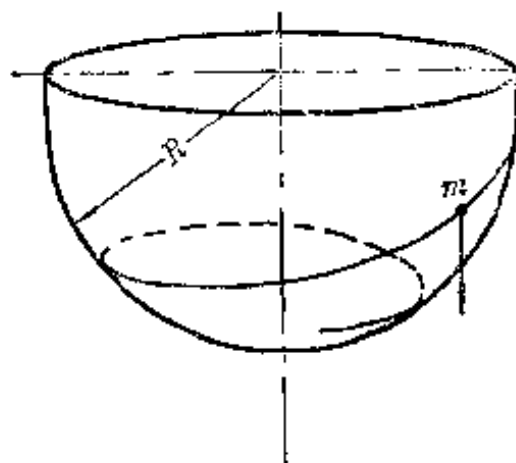
试建立系统的 Routh 方程并求解。

2.12 质量为 m 的质点在重力作用下, 限制在一光滑锥面上运动。设锥面之轴线沿铅垂方向, 顶角为 α 。自选坐标, 列出质点运动方程式, 并求其首次积分。

2.13 质量为 m 的质点在重力作用下, 限制在一光滑球面上运动。设球面半径为 R , 试自选坐标, 列出质点运动方程式, 并求其首次积分。

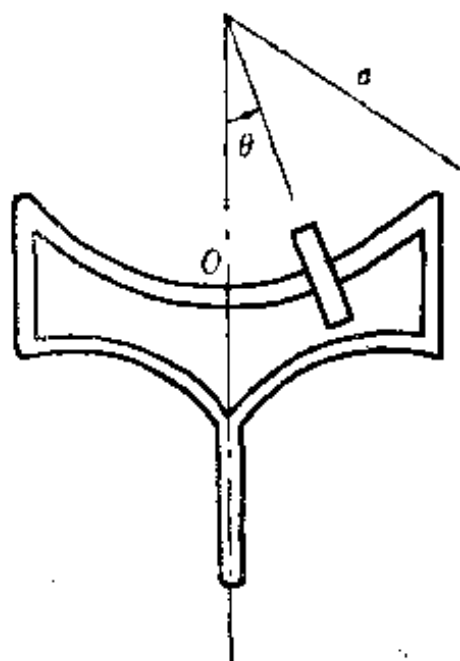
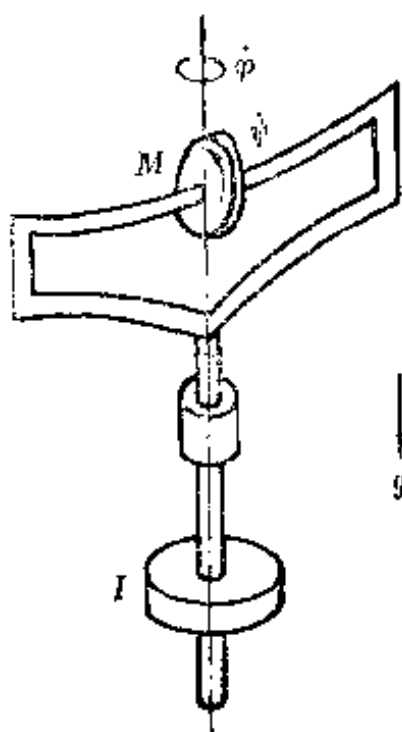


题 2.12



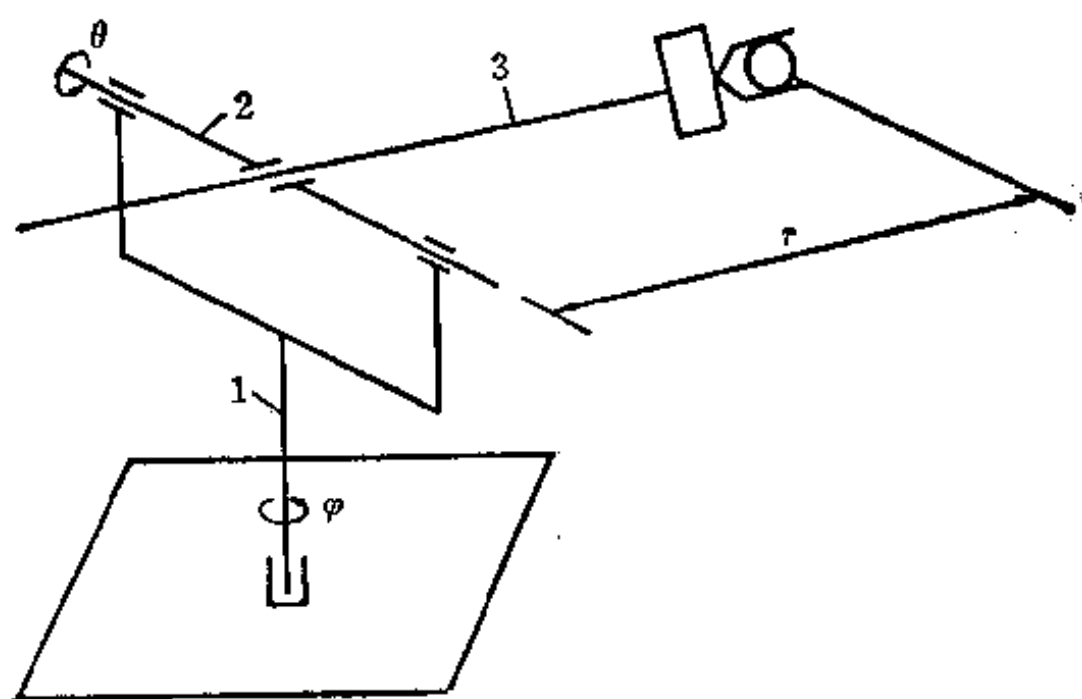
题 2.13

2.14 具有转动惯量为 I 的飞轮以变角速度 $\dot{\phi}$ 在固定轴承中转动。一无质量的刚性框架与飞轮相固结，刚性框架上端弯成以半径为 a 的圆弧形，一环形滑块套在弧形框架上可自由滑动而不计摩擦。滑块质量为 M ，轴惯性矩为 I_2 ，对直径之惯性矩为 I_1 。滑块绕弧形框架之自转角速度为 $\dot{\psi}$ 。自选广义坐标，列出系统之运动方程，并求首次积分。

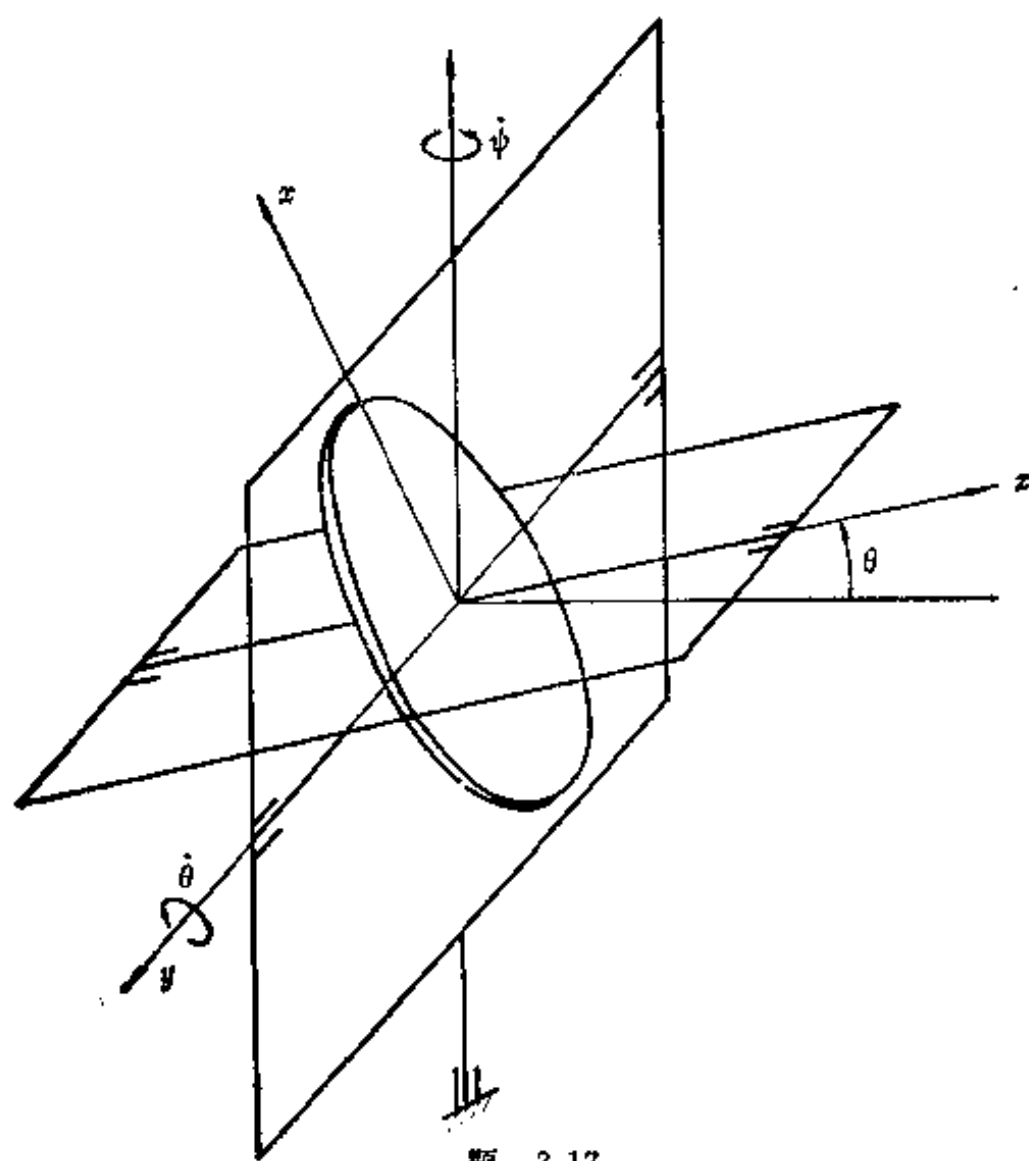


题 2.14

2.15 一力学系统的 Lagrange 函数为



题 2.16



题 2.17

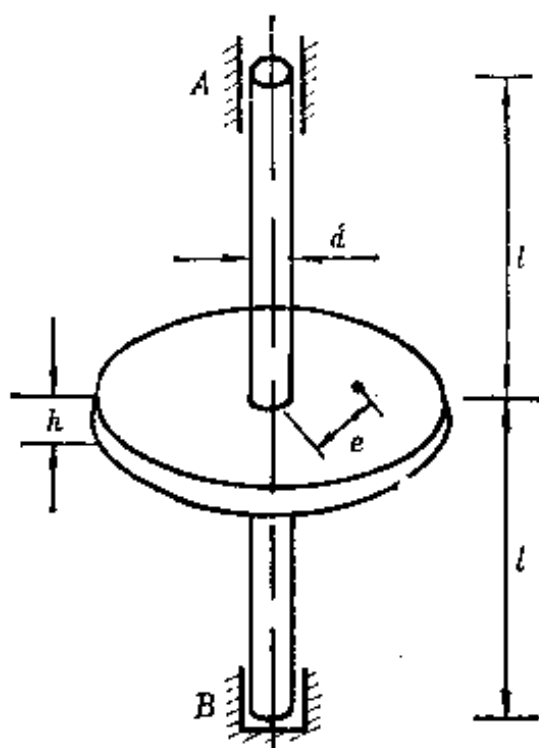
$$L = \frac{1}{2} f(q_1) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 - \psi(q_2)$$

试用 Whittaker 方法求解。

2.16 装有机械手的立柱 1 可转过角度 φ , 机械手可转过角度 θ 及移动距离 r , 立柱绕旋转轴之转动惯量为 I_1 , 杆 2 及杆 3 为均质细杆, 其长度分别为 l_2 及 l_3 , 其质量分别为 m_2 及 m_3 , 携带物之质量为 m 。在立柱旋转轴上作用力矩 M_p , 在轴 2 上作用力矩 M_6 , 在滑动副上作用主动力 F_{23} 。略去摩擦, 列出此机构之运动方程式。

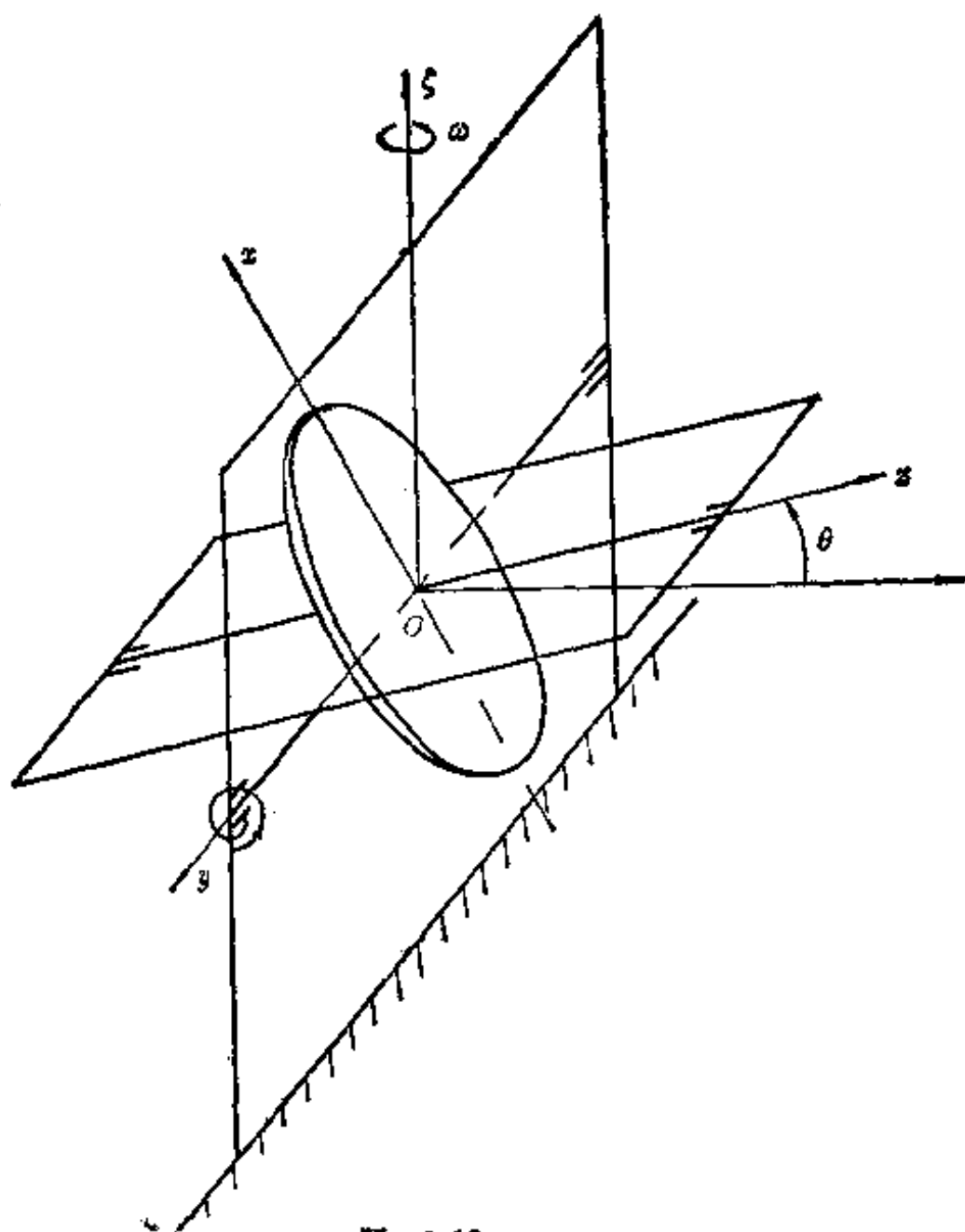
2.17 在卡尔当悬架上的均衡陀螺作惯性运动, 如外框架对固定轴 ξ 之转动惯量为 I_ξ , 内框架对中心主轴 x, y, z 之轴动惯量为 I'_x, I'_y, I'_z , 陀螺之相应转动惯量为 I_x, I_y, I_z ($I_x = I_y$)。试求动能表达式及首次积分。

2.18 同上题。写出 Routh 函数、Routh 方程及 Routh 能量积分。



题 2.18

2.19 陀螺测速仪安装在平台上, 平台以常角速度 ω 绕 ξ 轴转动, 如扭簧刚度为 k , 陀螺对于主轴 x, y, z 之转动惯量为 A, B, C 且 $B = A$ 。设和电机定子力矩相平衡的陀螺转子在 z 轴上之力矩及进动轴 y 上之力矩可略去不计, 试列出其首次积分。

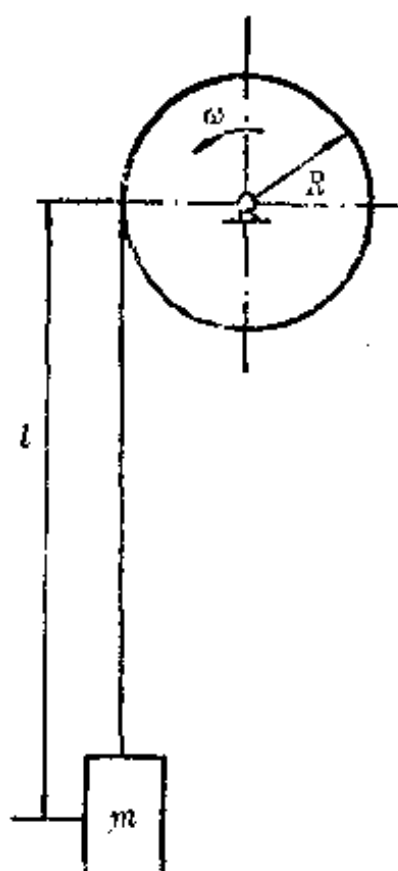


题 2.19

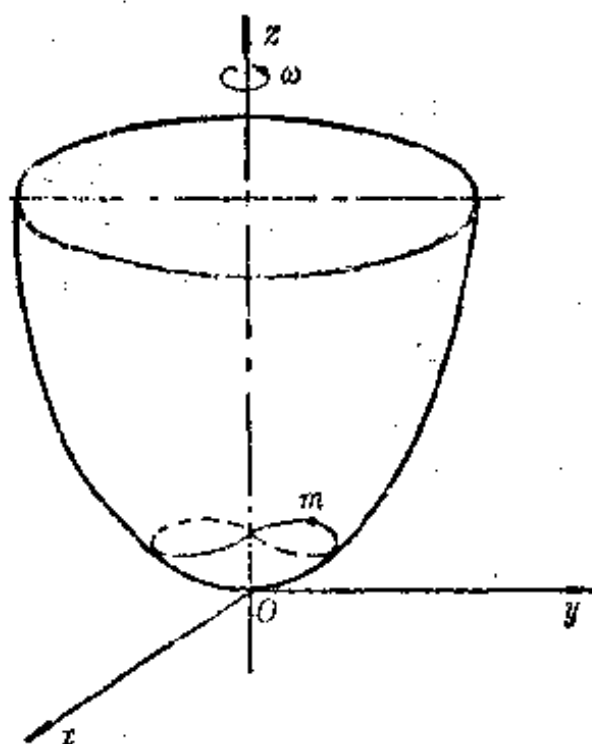
2.20 同上题。写出 Routh 函数、Routh 方程及 Routh 能量积分。

2.21 质量为 m 的重块吊在不可伸长的钢绳上, 钢绳绕在半径为 R 的鼓轮上, 鼓轮以等角速 ω 转动, 设 $t = t_0$ 时 $l = l_0$, 试列出微小摆动方程并求其解。(当 $t = t_0, \varphi = \varphi_0, \psi = 0$)

2.22 质量为 m 的质点在任意曲面上运动, 曲面绕铅垂轴以等角速 ω 转动。设转动轴通过曲面之最低点 O (如图)。曲面在 O 点附近的近似表达式 (按 Taylor 公式展开) 为 $z = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2}$, 其中 ρ_1, ρ_2 分别表示在 zx 面内及 zy 面内截线在 O 点处的曲率半径。求质点在 O 点附近作微振动的周期。

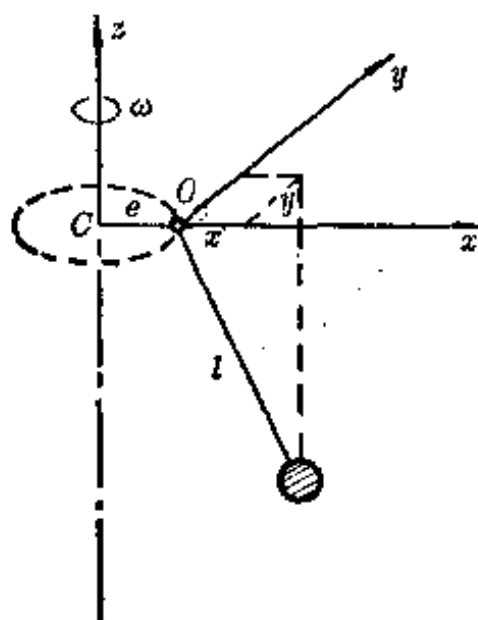


题 2.21



题 2.22

2.23 长度为 l , 质量为 m 的球摆悬挂在长为 e 之水平臂的 O 点上。水平臂以等角速 ω 绕固定铅垂轴转动。阻尼主要来自相对运动, 在微振动情况下阻尼与临界阻尼之比为 ζ 。证明摆的运动方程式为



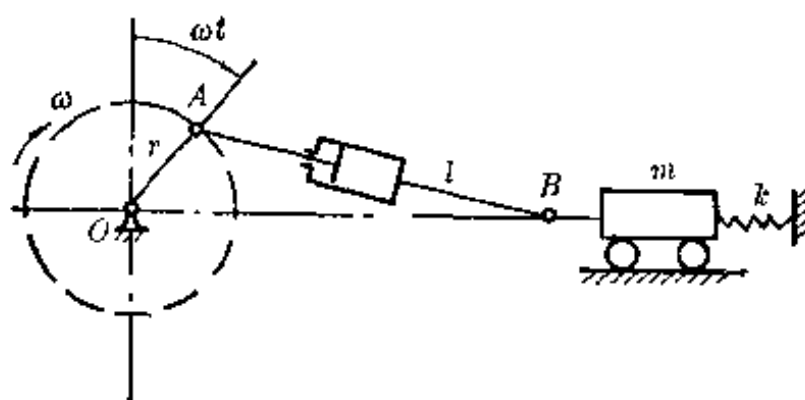
题 2.23

$$\ddot{x} + 2\zeta p \dot{x} + (p^2 - \omega^2)x - 2\omega \dot{y} = e\omega^2$$

$$\ddot{y} + 2\zeta p \dot{y} + (p^2 - \omega^2)y + 2\omega \dot{x} = 0$$

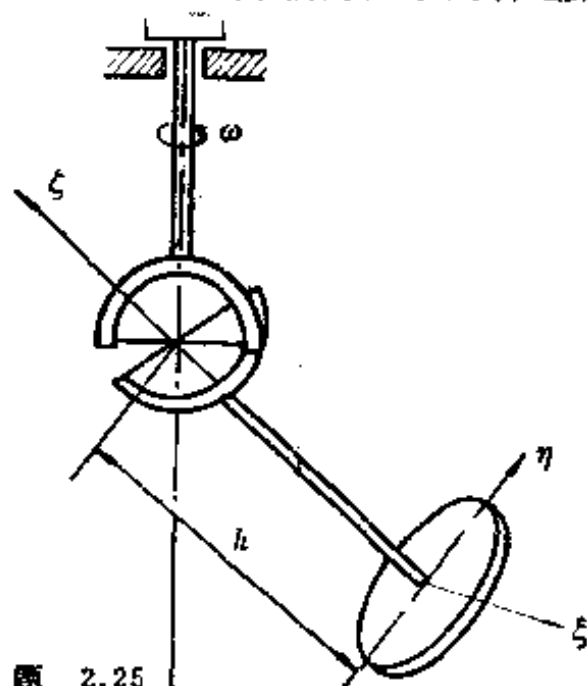
其中 $p^2 = g/l$

2.24 一振动筛之简图如图 2.24 所示, 曲柄 OA 通过连接于其上之连杆-活塞带动摆动式油缸, 油缸通过铰带动质量为 m 的平台运动, 平台用刚度为 k 之弹簧与固定面连结。除平台外, 其余部分质量均略去不计。油缸阻尼等于系数 α 乘以相对速度。除油缸阻尼外, 其余部分阻尼略去不计。设曲柄长为 r , 以等角速 ω 转动, 列出此系统的运动方程式。(设 $r \ll l$, l 为 AB 在 $t=0$ 时之长度)



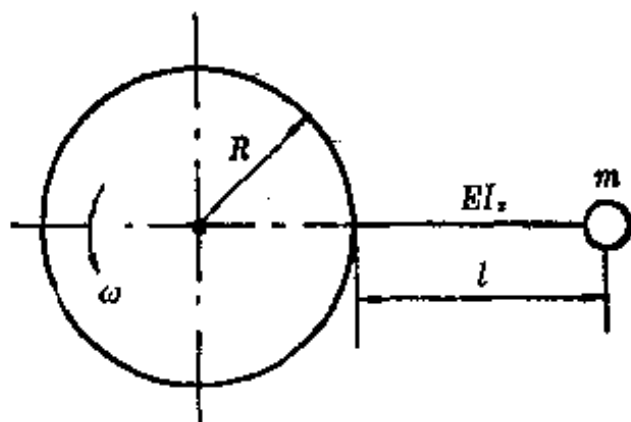
题 2.24

2.25 一摆藉一万向铰悬挂在铅垂轴上。此铅垂轴以等角速度 ω 转动。摆对称于其自身纵轴, 摆对于中心惯性主轴 ξ, η 与 ζ 的转动惯量分别为 A, A 与 C 。摆的重心 G 到铰链的距离为 h 。试求摆的相对平衡位置, 及在相对平衡位置附近的小振动周期



题 2.25

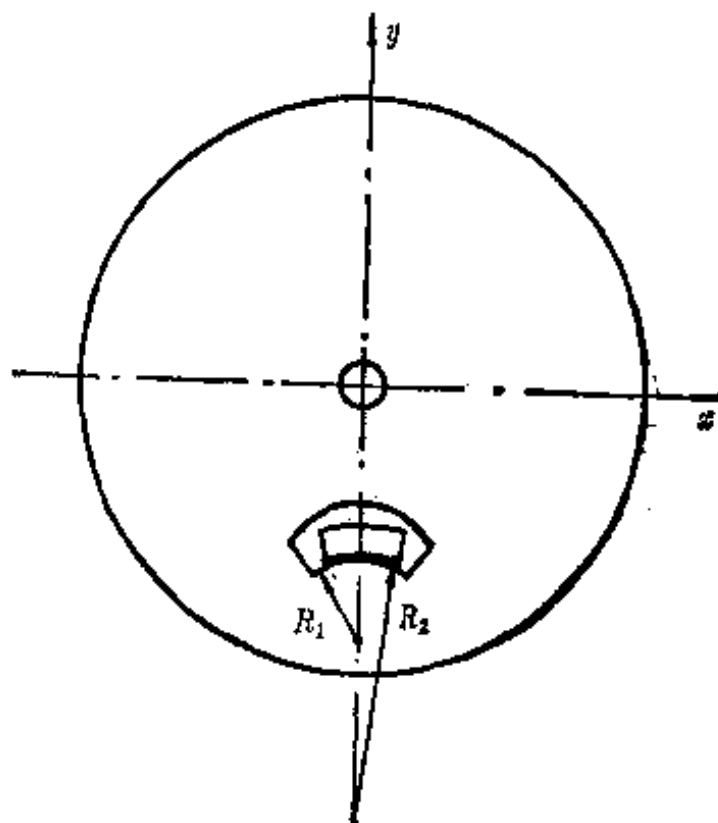
2.26 在半径为 R 的实体圆盘的边缘固定一长为 l 的柔性杆, 杆的自由端附有一质量为 m 的重块。圆盘以匀角速度 ω 转动, 设杆的抗弯刚度为 EI_z , 并设杆的质量相对重块 m 很小, 可略去不计。列出重块在离心力场中的运动方程, 并求其固有频率。



题 2.26

2.27 消除飞轮扭振的消振器如图所示, 飞轮以等角速 ω 转动, 质量为 m 的摆式消振块安置于飞轮的弧形槽中, 摆块的接触面曲率半径为 R_2 , 弧形槽面之曲率半径为 R_1 , ($R_1 < R_2$),

1) 求 $\omega = \text{常数}$ 时 (略去重力) 摆块之固有频率。

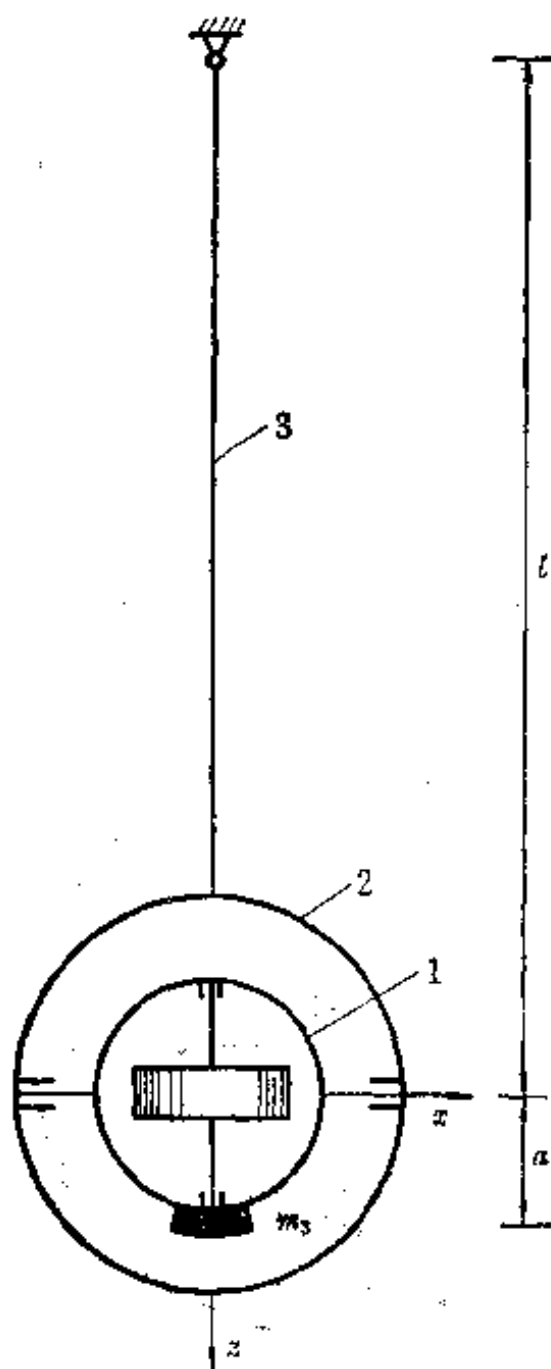


题 2.27

2) 当 $\omega = \omega_0 + \omega_1 \sin n\omega_0 t$ (n 为正整数) 时, 求摆块的相对摆动。

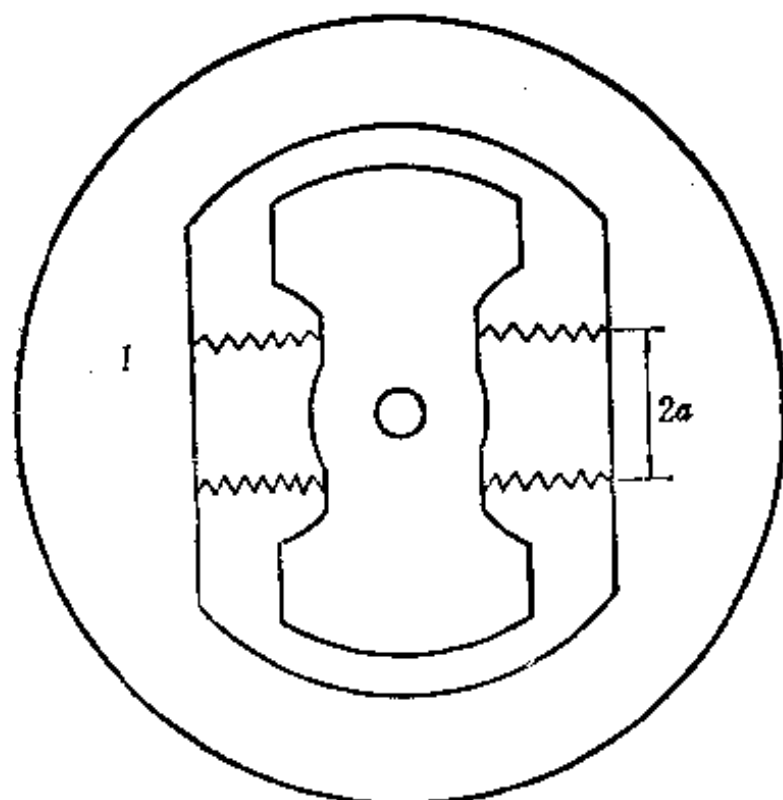
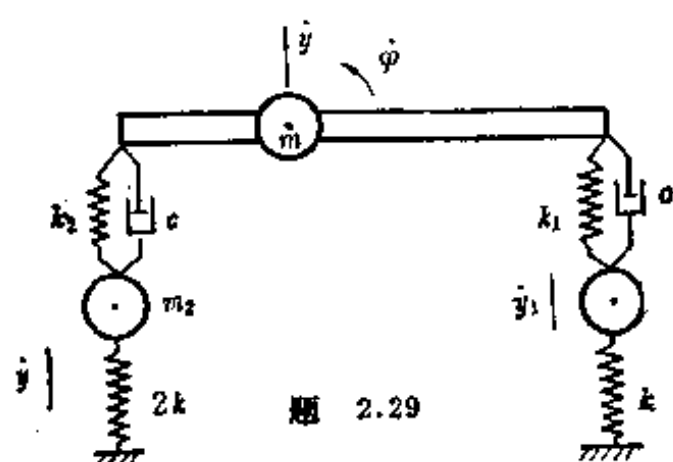
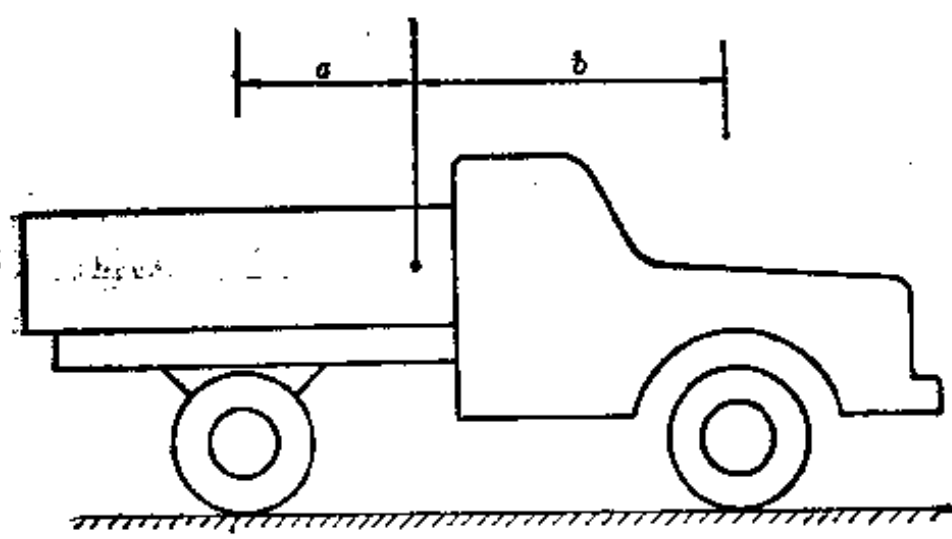
求解时, $R_2 - R_1 = \Delta R$ 可视为小量, 摆块与弧形槽接触点至摆块重心之距离为 a , 摆块对于形心轴之转动惯量为 I_C , 飞轮轴至摆块重心之距离为 r 。

2.28 陀螺摆如图所示, 外环 2 刚性固结在杆 3 上, 在外环上用轴承安装具有配重 m_3 之内环, 陀螺转子在内环中, 以角速度 Ω_0 转动, 转子的重量为 Q_1 , 其转动惯量为 I_{x1}, I_{y1}, I_{z1} ; 内环重量为 Q_2 , 其转动惯量为 I_{x2}, I_{y2}, I_{z2} 。略去摆杆 3 之质量不计, 列出此系统之运动方程, 并求微振动频率。



题 2.28

2.29 汽车车体质量为 m , 对形心轴之转动惯量为 I_C , 前桥及后桥之质

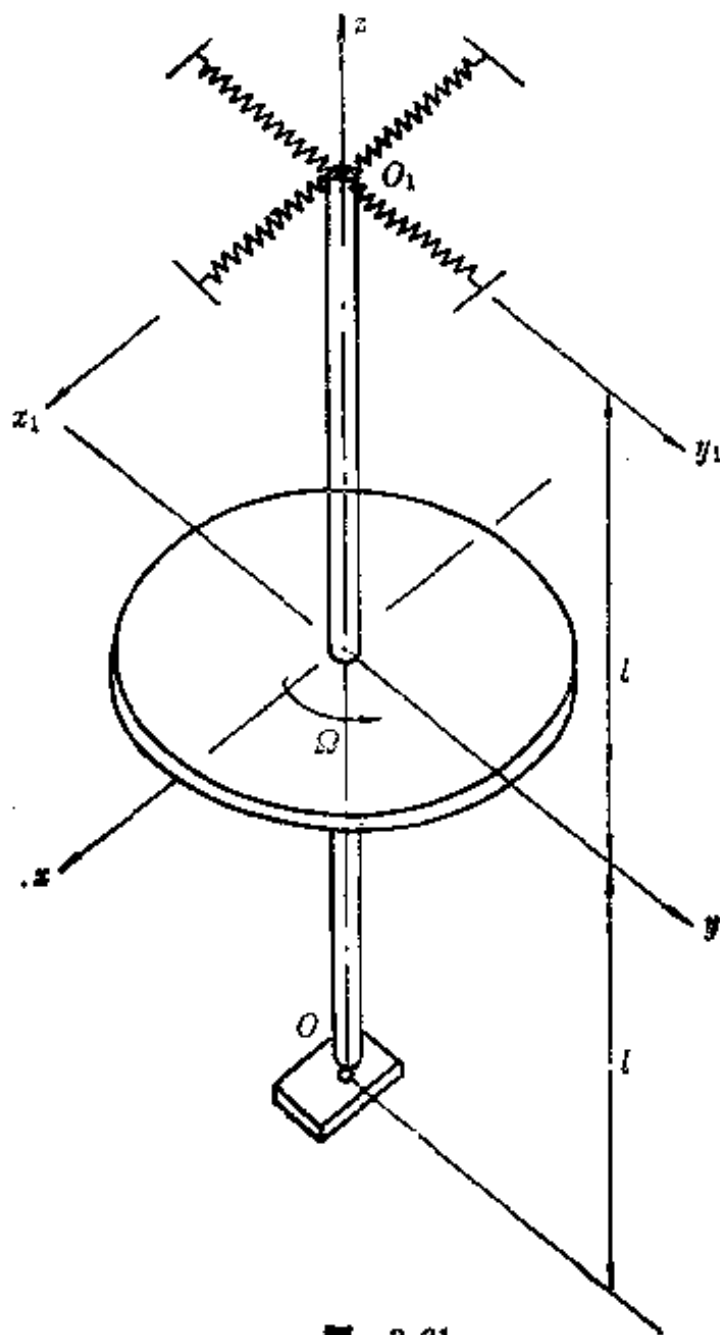


題 2.30

量分别为 m_1 及 m_2 , 前后悬架之刚度分别为 k_1 及 k_2 , 前后轮胎之刚度分别为 k 及 $2k$, 假设悬架弹簧具有粘性阻尼, 其阻尼系数为 c , 试列出汽车之动能、势能及耗散函数, 并列出具运动方程。

2.30 转动惯量为 I 的飞轮, 通过四个刚度系数为 k 的弹簧与转动惯量为 I_a 并能在轴上自由转动的扭转减振器相连, 试建立系统的扭转振动方程, 并求出固有频率。

2.31 对称圆盘之铅垂轴可绕 O 点自由转动, 轴的另一端 O_1 用弹簧相连, 轴以等角速转动, 设沿 x_1 轴及 y_1 轴之弹簧刚度分别为 k_1 及 k_2 , 圆盘质量为 M , 对 x 轴及 z 轴之转动惯量分别为 I_x 及 I_y , 轴的变形不计, 列出此系统微扰运动方程式, 并讨论保持稳定之临界角速度 Ω_{cr} 。



题 2.31

第三章 Lagrange 力学(二)

3.1 碰撞问题的 Lagrange 方程

碰撞的基本特征是: (1) 在很短时间内产生很大的碰撞力, 但碰撞力的冲量为有限值。 (2) 碰撞前后速度发生突变, 但位形几乎不变。 所以为简单起见, 可以认为碰撞发生在一瞬间; 碰撞前后速度虽然有不连续变化, 但位形仍是连续变化的。

设在发生碰撞时, 系统中任一质点 m_i 所受主动碰撞力 F_i 的冲量为

$$S_i = \int_{t^*}^{t^*+\epsilon} F_i dt \quad (3.1.1)$$

其中 t^* 为开始发生碰撞的时刻, ϵ 为碰撞时间间隔, 尽管间隔很小, 但积分 (3.1.1) 却是有限量, 与此同时约束的反应——约束碰撞冲量 (即碰撞力 N_i 的冲量) 为

$$R_i = \int_{t^*}^{t^*+\epsilon} N_i dt \quad (3.1.2)$$

这时, 理想约束的条件可表为: 约束碰撞冲量在系统的任何虚位移上的总功为零:

$$\sum_{i=1}^N R_i \delta r_i = \sum_{i=1}^N \int_{t^*}^{t^*+\epsilon} N_i dt \cdot \delta r_i = \int_{t^*}^{t^*+\epsilon} \sum_{i=1}^N N_i \cdot \delta r_i dt = 0 \quad (3.1.3)$$

碰撞条件下的 d'Alembert-Lagrange 原理可表为:

$$\sum_{i=1}^N [S_i - \Delta(m_i \dot{r}_i)] \cdot \delta r_i = 0 \quad (3.1.4)$$

其中

$$\Delta(m_i \dot{r}_i) = (m_i \dot{r}_i)_{t=t^*+e} - (m_i \dot{r}_i)_{t=t^*} \quad (3.1.5)$$

对于 n 个自由度的完整系统, 有以下关系:

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (3.1.6)$$

代入 (3.1.4) 式后, 可得

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N S_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \Delta(m_i \dot{r}_i) \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0 \quad (3.1.7)$$

令

$$I_j = \sum_{i=1}^N S_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (3.1.8)$$

称为广义碰撞冲量。(3.1.7) 式中第二项为

$$I'_j = \sum_{i=1}^N \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right)_{t=t^*+e} - \sum_{i=1}^N \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right)_{t=t^*} \quad (3.1.9)$$

考虑到在碰撞过程之前及过程之后速度是连续的, 因而以下关系存在:

$$\frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad \begin{pmatrix} i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, n \end{pmatrix} \quad (3.1.10)$$

$$(t=t^*, t=t^*+e)$$

于是, (3.1.9) 式可化为

$$\begin{aligned} I'_j &= \sum_{i=1}^N \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)_{t=t^*+e} - \sum_{i=1}^N \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)_{t=t^*} \\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)_{t=t^*+e} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)_{t=t^*} \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

或简记为

$$I'_j = \Delta \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (3.1.12)$$

(3.1.7)式成为

$$\sum_{j=1}^n \left(I_j - \Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j = 0 \quad (3.1.13)$$

由 δq_j 之独立性即得碰撞问题的 Lagrange 方程

$$\Delta \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = I_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (3.1.14)$$

其含意为：碰撞时广义动量的变化等于广义碰撞冲量。广义碰撞冲量的求法和广义力类似，只需求出在单位虚位移 ($\delta q_j = 1$) 上对应的碰撞冲量的总功即可。

例题 3.1.1 在 O 点悬挂的连杆系统 OAB 如图 3.1 所示, O 、 A 为柱铰, 两杆长皆为 l , 质量皆为 m , 在静止状态从下端 B 点受一冲量 I 作用, 求碰撞后的运动。

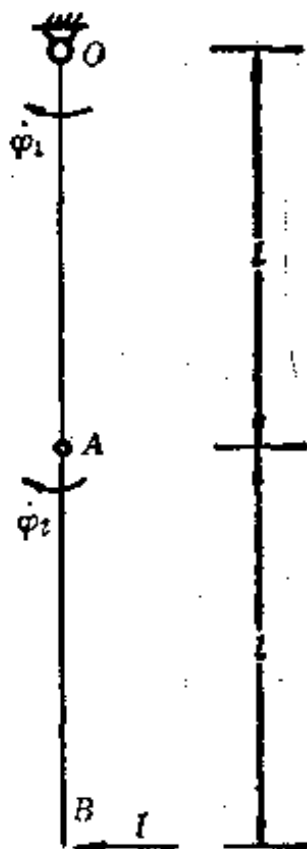


图 3.1

取转角 φ_1 、 φ_2 为广义坐标(见图 3.2), 则

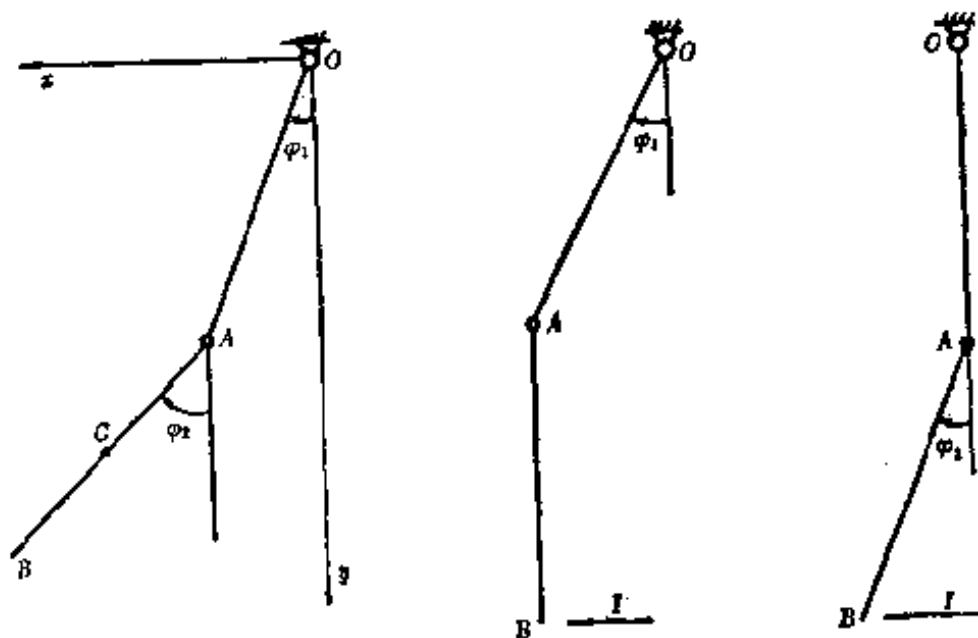


图 3.2

AB杆之重心C点的直角坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_C &= l \sin \varphi_1 + \frac{l}{2} \sin \varphi_2 \\ y_C &= l \cos \varphi_1 + \frac{l}{2} \cos \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

对 t 求导后, 得

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_C &= l \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \frac{l \dot{\varphi}_2}{2} \cos \varphi_2 \\ \dot{y}_C &= -l \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - \frac{l \dot{\varphi}_2}{2} \sin \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

于是得到系统的动能表达式如下:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \frac{l^2}{3} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m l^2}{2} \left(\dot{\varphi}_1^2 \cos^2 \varphi_1 + \frac{1}{4} \dot{\varphi}_2^2 \cos^2 \varphi_2 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \right. \\ &\quad \left. + \dot{\varphi}_1^2 \sin^2 \varphi_1 + \frac{1}{4} \dot{\varphi}_2^2 \sin^2 \varphi_2 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{m l^2}{12} \dot{\varphi}_2^2 \end{aligned} \quad (c)$$

或经整理后

$$T = \frac{m}{2} l^2 \left[\frac{4}{3} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{3} \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \quad (d)$$

由此可得

$$\begin{cases} \Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = ml^2 \left(\frac{4}{3} \dot{\varphi}_1 + \frac{\dot{\varphi}_2}{2} \right) \\ \Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = ml^2 \left(\frac{1}{3} \dot{\varphi}_2 + \frac{\dot{\varphi}_1}{2} \right) \end{cases} \quad (e)$$

由图 3.2 可知广义冲量为

$$I_1 = Il, \quad I_2 = Il \quad (f)$$

问题的 Lagrange 方程为

$$\begin{cases} ml^2 \left(\frac{4}{3} \dot{\varphi}_1 + \frac{\dot{\varphi}_2}{2} \right) = Il \\ ml^2 \left(\frac{1}{3} \dot{\varphi}_2 + \frac{\dot{\varphi}_1}{2} \right) = Il \end{cases} \quad (g)$$

解以上联立方程, 可得

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{6I}{7ml}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{30I}{7ml} \quad (h)$$

值得注意的是, 受冲击后两角速度方向相反。如冲量 I 作用在 AB 杆上任一点, 该点至 A 之距离为 a , 则广义冲量为

$$I_1 = Il, \quad I_2 = Ia \quad (i)$$

对应的 Lagrange 方程为

$$\begin{cases} 8\dot{\varphi}_1 + 3\dot{\varphi}_2 = 6\frac{I}{ml} \\ 2\dot{\varphi}_2 + 3\dot{\varphi}_1 = 6\frac{Ia}{ml^2} \end{cases} \quad (j)$$

由此求得

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \frac{6I}{7ml^2} (2l - 3a) \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{6I}{7ml^2} (8a - 3l) \end{cases} \quad (k)$$

值得注意的是, 当 $a = \frac{2}{3}l$, 即冲量作用点与 AB 杆之打击中心重合时, $\dot{\varphi}_1 = 0$ 。当 a 由零增至 l 时, $\dot{\varphi}_1$ 与 $\dot{\varphi}_2$ 的变化规律如下图所示:

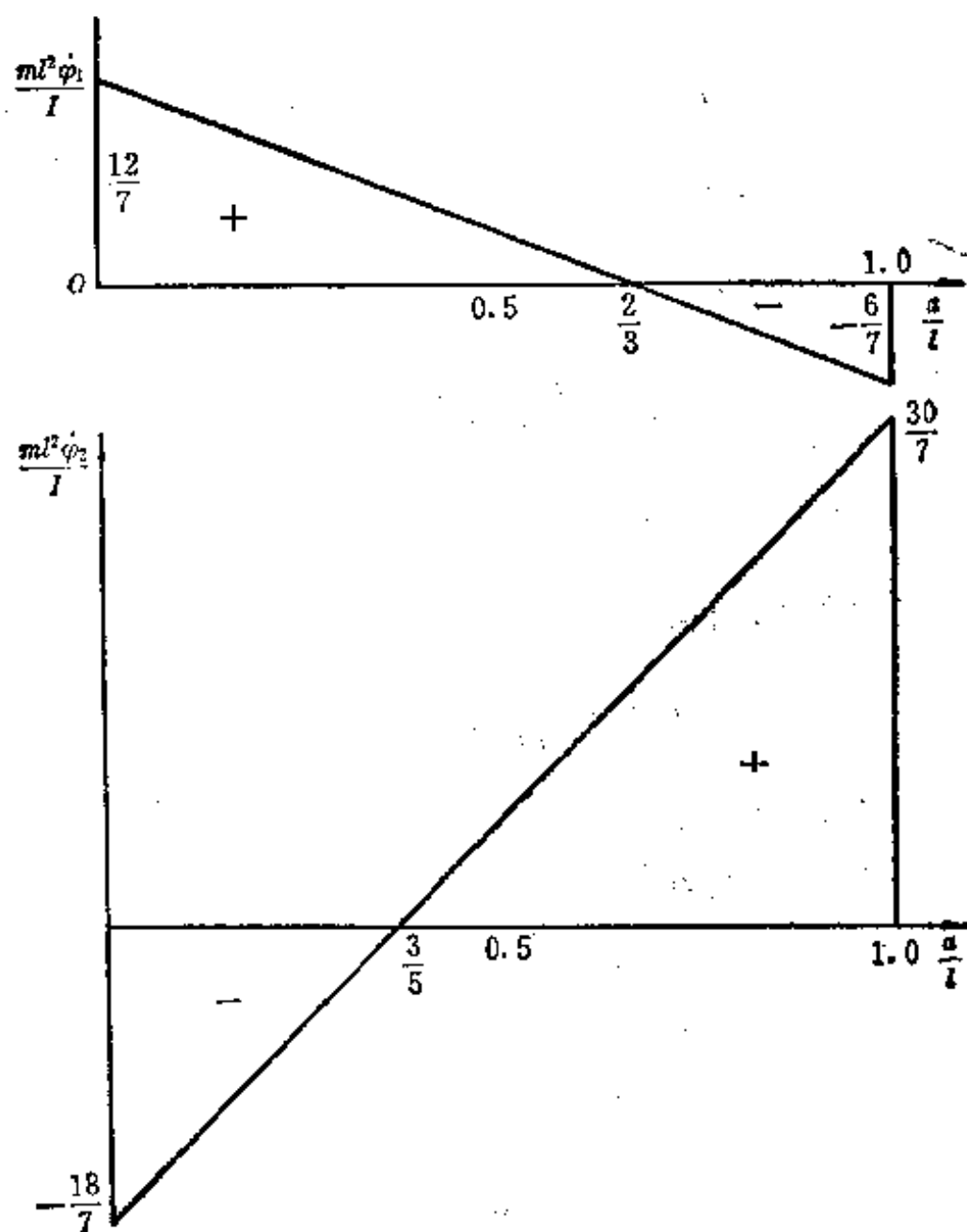


图 3.3

3.2 以准坐标表示的运动方程——Euler-Lagrange 方程

3.2.1 Euler-Lagrange 方程

设 n 自由度完整系统的广义坐标为 q_1, q_2, \dots, q_n 。今定义 n 个准速度如下:

$$\pi_k = \omega_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j \quad (k=1, \dots, n) \quad (3.2.1)$$

其中 a_{kj} 可以是广义坐标的函数, 且 $\det[a_{kj}] \neq 0$ 。利用 (3.2.1) 可将第二类 Lagrange 方程转换为准坐标形式, 称为 Euler-Lagrange 方程。这种形式的方程对于研究某些类型的动力学问题能带来一定的方便, 为此可将广义坐标形式的 d'Alembert-Lagrange 原理

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0 \quad (2.1.10)$$

中的 δq 以 $\delta \pi$ 表示:

$$\delta q_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} \delta \pi_k \quad (j=1, \dots, n) \quad (1.5.13)$$

这里 $[b_{jk}] = [a_{jk}]^{-1}$ (见 (1.3.4) 式) 将上式代入 (2.1.10) 式, 可得

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) b_{jk} \delta \pi_k = 0 \quad (3.2.2)$$

由 $\delta \pi_k$ 的独立性便得到以下方程:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) b_{jk} = 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (3.2.3)$$

根据符号 $\frac{\partial}{\partial \pi_k}$ 的定义 (见 (1.3.10) 式), 以及对应准坐标的广义力的定义 (见 (1.7.27) 式) 知

$$P_k = \sum_{j=1}^n Q_j b_{jk} \quad (k=1, \dots, n) \quad (3.2.4)$$

令

$$T^*(\omega, q, t) = T(\dot{q}, q, t)_{\dot{q} \rightarrow \omega} \quad (3.2.5)$$

T^* 为以准速度表示的动能函数, 则 (3.2.3) 第一项可表示为

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n b_{jk} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{j=1}^n b_{jk} \frac{d}{dt} \left[\sum_{s=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_s} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_j} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n b_{jk} \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n a_{sj} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_s} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n b_{jk} a_{sj} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_s} + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n b_{jk} \dot{a}_{sj} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_s} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

利用关系 $\dot{q}_i = \sum b_{im} \omega_m$ 可将上式化为

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n b_{jk} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} + \sum_j \sum_s \sum_i \sum_m b_{jk} b_{im} \times \\ &\quad \times \frac{\partial a_{sj}}{\partial q_i} \omega_m \frac{\partial T^*}{\partial \omega_s} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

而 (3.2.3) 式中的第二项则可表示为:

$$\begin{aligned} \sum_j b_{jk} \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_j b_{jk} \left[\frac{\partial T^*}{\partial q_j} + \sum_s \frac{\partial T^*}{\partial \omega_s} \frac{\partial \omega_s}{\partial q_j} \right] \\ &= \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} + \sum_j \sum_s \sum_i \sum_m b_{jk} b_{im} \frac{\partial a_{si}}{\partial q_j} \omega_m \frac{\partial T^*}{\partial \omega_s} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$(3.2.9)$$

将 (3.2.4)、(3.2.7)、(3.2.9) 诸式代入 (3.2.3) 式, 并令

$$\gamma_{km}^s = \sum_j \sum_l b_{jk} b_{lm} \left(\frac{\partial a_{sj}}{\partial q_l} - \frac{\partial a_{sl}}{\partial q_j} \right) \quad (3.2.10)$$

(γ_{km}^s 称为 Boltzmann 三标记号) 即可得到用准坐标表示的 Lagrange 方程(即 Euler-Lagrange 方程):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} + \sum_j \sum_m \gamma_{km}^s \omega_m \frac{\partial T^*}{\partial \omega_s} = P_k \quad (k=1, \dots, n) \quad (3.2.11)$$

以下是有关三标记号的一些特性:

(1) 如果定义准速度的关系式(3.2.1)的右端是时间 t 的全导数, 即诸系数 a_{kj}

$$\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_l} = \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_j} \quad (k, j, l=1, \dots, n)$$

则三标记号恒等于零:

$$\gamma_{km}^s = \sum_j \sum_l b_{jk} b_{lm} \left(\frac{\partial a_{sj}}{\partial q_l} - \frac{\partial a_{sl}}{\partial q_j} \right) = 0, \quad (k, s, m=1, \dots, n) \quad (3.2.12)$$

于是 Euler-Lagrange 方程化为 Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} = P_k \quad (k=1, \dots, n) \quad (3.2.13)$$

这时的准坐标 π_k 是可定义的, 即仍是广义坐标.

(2) γ_{km}^s 对其下标是反对称的, 即

$$\gamma_{km}^s = -\gamma_{mk}^s, \quad \gamma_{kk}^s = 0 \quad (3.2.14)$$

由于

$$\gamma_{km}^s = \sum_j \sum_l b_{jk} b_{lm} \left(\frac{\partial a_{sj}}{\partial q_l} - \frac{\partial a_{sl}}{\partial q_j} \right) \quad (3.2.15)$$

改变求和次序后, 立即可证明(3.2.14)式:

$$\gamma_{km}^s = \sum_l \sum_j b_{lk} b_{jm} \left(\frac{\partial a_{sl}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{sj}}{\partial q_l} \right) = -\gamma_{mk}^s \quad (3.2.16)$$

利用反对称性质(3.2.14)可以大大简化三标记号的计算,例如对于两个自由度的系统,尽管有8个三标记号,实际只需计算两个,即 $\gamma_{12}^1 (= \gamma_{21}^1)$ 和 $\gamma_{21}^2 (= \gamma_{11}^2)$, 余皆为零。

由三标记号的反对称性质,还可看出 Euler-Lagrange 方程中与之有关的项是广义陀螺力。如令

$$\sum_s \sum_m \gamma_{km}^s \frac{\partial T^*}{\partial \omega_s} \omega_m = \sum_m g_{km} \omega_m \quad (3.2.17)$$

其中

$$g_{km} = \sum_s \gamma_{km}^s \frac{\partial T^*}{\partial \omega_s} \quad (3.2.18)$$

因为是按指标 s 求和,不涉及 k 和 m ,故由 γ_{km}^s 的反对称性可推出 g_{km} 对指标 k, m 的反对称性,因之

$$\Gamma_k = \sum_m g_{km} \omega_m \quad (3.2.19)$$

为第 k 个广义陀螺力,容易证明,广义陀螺力在准速度中之总功率为零:

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k = 0 \quad (3.2.20)$$

总之,若定义准速度的表达式不是全导数,则在 Euler-Lagrange 方程中必然要出现与三标记号有关的陀螺项。

例题 3.2.1 用准坐标推导刚体绕定点运动的 Euler 方程。

解 取三个 Euler 角 θ, ψ, φ 作为广义坐标,用角速度在刚体惯性主轴系 $Ox'y'z'$ 上的投影 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 作为准速度,则其间的关系为:

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & 0 \\ 0 & \cos \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \quad (a)$$

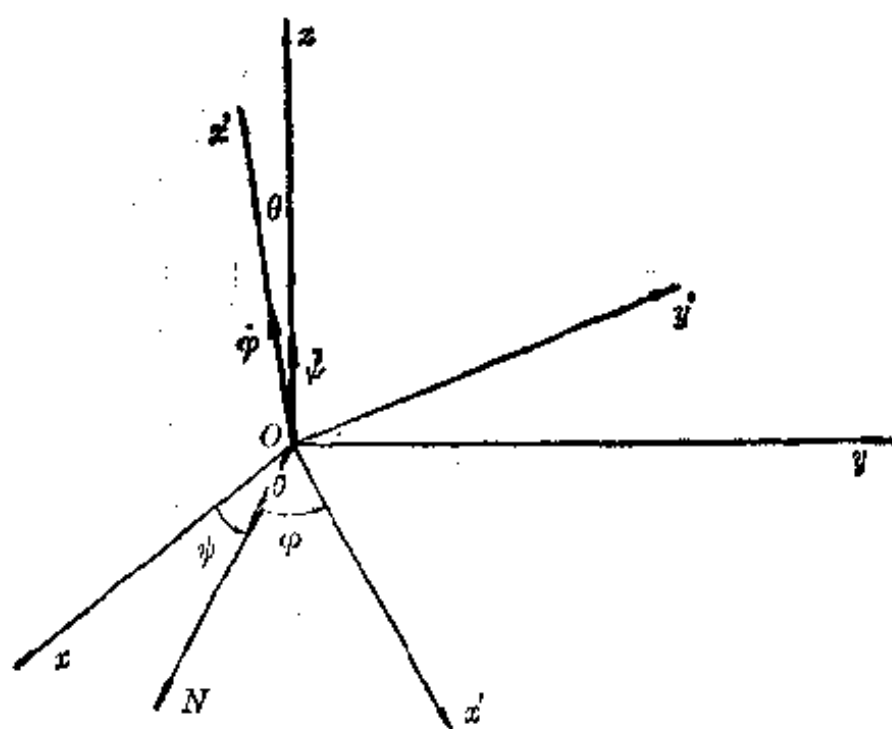


图 3.4

反演后的关系式为

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} & \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} & 0 \\ -\sin \varphi \operatorname{ctg} \theta & -\cos \varphi \operatorname{ctg} \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

用准坐标表示的刚体动能为

$$T = \frac{1}{2} (A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) \quad (c)$$

其中 A 、 B 、 C 为刚体的主惯性矩。由于动能式不显含广义坐标，故有

$$\frac{\partial T}{\partial \pi_k} = 0 \quad (k=1, 2, 3) \quad (d)$$

由(3.2.10)式及(a)、(b)的系数矩阵可求得三标记号如下：

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{23}^1 &= -\gamma_{32}^1 = -1 \\ \gamma_{31}^2 &= -\gamma_{13}^2 = -1 \\ \gamma_{12}^3 &= -\gamma_{21}^3 = -1 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

所有其余的三标记号皆为零。由(3.2.4)式及(b)不难得知,对应准坐标的广义力分别为外力对 Ox', Oy', Oz' 轴之主矩,即

$$P_1 = L_1, P_2 = L_2, P_3 = L_3 \quad (f)$$

最后代入(3.2.11)式,即得到刚体绕定点运动的 Euler 方程:

$$\left. \begin{aligned} A\dot{\omega}_1 + (C-B)\omega_2\omega_3 &= L_1 \\ B\dot{\omega}_2 + (A-C)\omega_3\omega_1 &= L_2 \\ C\dot{\omega}_3 + (B-A)\omega_1\omega_2 &= L_3 \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

3.2.2 三标记号的求法

按上节的定义计算三标记号常很繁琐。以下介绍一种较简便的方法。为此,列出准坐标与广义坐标间的变分关系式:

$$\delta\pi_k = \sum_j a_{kj} \delta q_j \quad (k=1, \dots, n) \quad (3.2.21)$$

然后对 t 求导,可得:

$$(\delta\pi_k)' = \sum_j a_{kj} (\delta q_j)' + \sum_j \sum_s \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_s} \dot{q}_s \delta q_j \quad (3.2.22)$$

再将准速度与广义速度间的关系式(3.2.1)求变分:

$$\delta\omega_k = \sum_j \sum_s \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_s} \delta q_s \dot{q}_j + \sum_j a_{kj} \delta \dot{q}_j \quad (3.2.23)$$

将以上两式相减,可得:

$$\begin{aligned} (\delta\pi_k)' - \delta\omega_k &= \sum_j a_{kj} [(\delta q_j)' - \delta \dot{q}_j] \\ &\quad + \sum_j \sum_s \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_s} - \frac{\partial a_{ks}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_s \delta q_j \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

再将以下关系

$$\dot{q}_s = \sum_i b_{si} \omega_i \quad (3.2.25)$$

$$\delta q_j = \sum_m b_{jm} \delta \pi_m \quad (3.2.26)$$

代入上式, 可得:

$$\begin{aligned} (\delta \pi_k)' - \delta \omega_k &= \sum_j a_{kj} [(\delta q_j)' - \delta \dot{q}_j] \\ &+ \sum_i \sum_m \left[\sum_j \sum_s \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_s} - \frac{\partial a_{ks}}{\partial q_j} \right) b_{si} b_{jm} \right] \omega_i \delta \pi_m \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

上式右端第二项方括号内的表达式就是三标记号 γ_{im}^k , 因之上式化为

$$(\delta \pi_k)' - \delta \omega_k = \sum_j a_{kj} [(\delta q_j)' - \delta \dot{q}_j] + \sum_i \sum_m \gamma_{im}^k \omega_i \delta \pi_m \quad (3.2.28)$$

可见, 列出 π_k 的微分-变分交换差的展开式, 所有的三标记号自然出现在式中, 以后会看到含 $(\delta q_j)' - \delta \dot{q}_j$ 的项 (见第五章) 全部为零。换言之, 在完整系统中, 广义坐标的微分与变分运算的次序是可以交换的, 即 $d\delta(\cdot) = \delta d(\cdot)$ 。

3.2.3 自由刚体的运动微分方程

设 $O_1 x_1 y_1 z_1$ 为惯性坐标系, 自由刚体的运动分解为任意点 O 的运动 (其速度以 \mathbf{v}_O 表示) 及绕 O 点之转动 (其角速度以 $\boldsymbol{\omega}$ 表示)。如刚体内任一质点 m_i 之矢径为 \mathbf{r}'_i , 则该点的速度为

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \quad (3.2.29)$$

于是有

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = v_O^2 + 2\mathbf{v}_O \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \quad (3.2.30)$$

刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$$

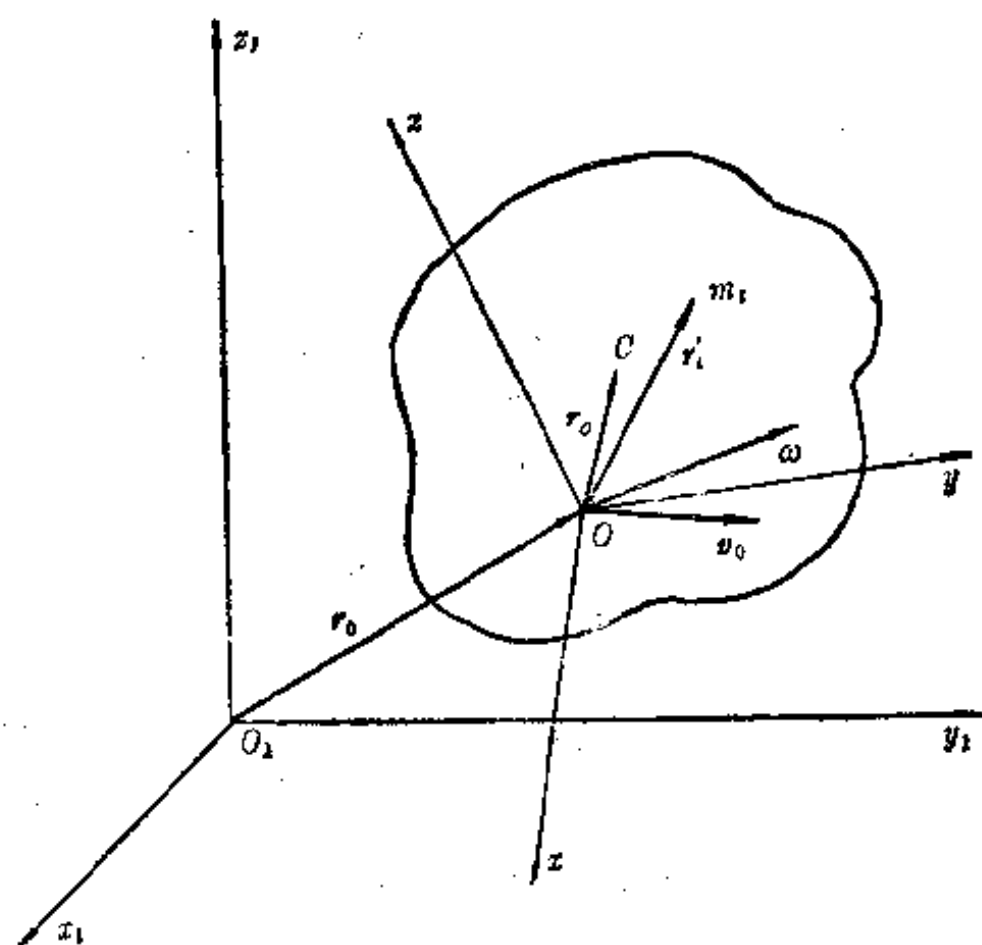


图 3.5

$$= \frac{1}{2} M v_0^2 + v_0 \cdot (\omega \times M r'_0) + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega \times r'_i) \cdot (\omega \times r'_i) \quad (3.2.31)$$

上式中最后一项是刚体绕 O 点转动的动能, 可化为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega \times r'_i) \cdot (\omega \times r'_i) &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega \cdot [r'_i \times (\omega \times r'_i)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i [\omega^2 (r'_i \cdot r'_i) - (\omega \cdot r'_i)^2] \\ &= \frac{1}{2} \omega \cdot \sum_i m_i [(r'_i \cdot r'_i) \mathbf{E} - r'_i r'_i] \cdot \omega \\ &= \frac{1}{2} \omega \cdot I_0 \cdot \omega \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

其中 E 及 $r'; r'_i$ 为并向量, 当 $Oxyz$ 固结在刚体上, 且相应的单位向量为 i, j, k 时, 两个并向量分别为

$$E = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3 \quad (3.2.33)$$

$$\begin{aligned} r'; r'_i = & x_i'^2 i_1 i_1 + y_i'^2 i_2 i_2 + z_i'^2 i_3 i_3 + \\ & + x_i' y_i' i_1 i_2 + y_i' z_i' i_2 i_3 + z_i' x_i' i_3 i_1 \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

(3.2.32) 式中之 I_0 为惯性张量, 其分量由以下对称方阵表示:

$$I_0 = \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \quad (3.2.35)$$

因此, 刚体的动能可表示为

$$T = \frac{1}{2} M v_o^2 + v_o \cdot (\omega \times M r'_o) + \frac{1}{2} \omega \cdot I_0 \cdot \omega \quad (3.2.36)$$

设 $Oxyz$ 为固结在刚体上的正交坐标系, ω 及 v_o 在其上的三个分量分别为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 及 $\omega_4, \omega_5, \omega_6$, 并取其为准速度, 则 (3.2.36) 正是以这些准速度表示的刚体动能。为了列出刚体运动的 Euler-Lagrange 方程, 需先求出所有的三标记号。

在此, 描述刚体位形的广义坐标取为 r_o 的三个分量 x_o, y_o, z_o 及绕 O 点转动的三个 Euler 角 φ, θ, ψ 。准速度与广义速度间的关系如下:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \cos \varphi \dot{\theta} + \sin \theta \sin \varphi \dot{\psi} \\ \omega_2 &= -\sin \varphi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \dot{\psi} \\ \omega_3 &= \cos \theta \cdot \dot{\psi} + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.37)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_4 &= \alpha_{11} \dot{x}_o + \alpha_{12} \dot{y}_o + \alpha_{13} \dot{z}_o \\ \omega_5 &= \alpha_{21} \dot{x}_o + \alpha_{22} \dot{y}_o + \alpha_{23} \dot{z}_o \\ \omega_6 &= \alpha_{31} \dot{x}_o + \alpha_{32} \dot{y}_o + \alpha_{33} \dot{z}_o \end{aligned} \right\} \quad (3.2.38)$$

其中 α_{ij} 为动坐标系 $Oxyz$ 在定坐标系 $O_1 x_1 y_1 z_1$ 中的方向余弦。

以下按 3.2.2 节的方法求三标记号, 为此, 由 (3.2.37) 解出广

义速度:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{1}{\sin \theta} (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) \\ \dot{\theta} &= \omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= -(\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta + \omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.39)$$

在(3.2.37)式右端将 $\dot{\theta}$ 、 $\dot{\varphi}$ 、 $\dot{\psi}$ 分别依次代之以 $\delta\dot{\theta}$ 、 $\delta\dot{\varphi}$ 、 $\delta\dot{\psi}$ 后,即得到准坐标的变分 $\delta\pi_1$ 、 $\delta\pi_2$ 及 $\delta\pi_3$ 。然后将它们对 t 求导;另外,对(3.2.37)式右端作变分运算后得到准速度的变分,故有以下运算:

$$\begin{aligned} (\delta\pi_1)' &= (\sin \theta \sin \varphi \delta\dot{\psi} + \cos \varphi \delta\dot{\theta})' \\ &= \sin \theta \cos \varphi \dot{\psi} \delta\varphi + \cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} \delta\psi - \sin \varphi \dot{\varphi} \delta\theta + () \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

又

$$\begin{aligned} \delta\omega_1 &= \delta(\sin \theta \sin \varphi \dot{\psi} + \cos \varphi \dot{\theta}) \\ &= \sin \theta \cos \varphi \dot{\psi} \delta\varphi + \cos \theta \sin \varphi \dot{\psi} \delta\theta - \sin \varphi \dot{\theta} \delta\varphi + () \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

两式相减时,右端()中之项可利用交换关系: $d\delta() = \delta d()$ 而相消,于是得到

$$\begin{aligned} (\delta\pi_1)' - \delta\omega_1 &= \cos \theta \sin \varphi (\dot{\theta} \delta\psi - \dot{\psi} \delta\theta) + \sin \theta \cos \varphi (\dot{\varphi} \delta\psi - \dot{\psi} \delta\varphi) \\ &\quad - \sin \varphi (\dot{\varphi} \delta\theta - \dot{\theta} \delta\varphi) \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

将(3.2.39)代入(3.2.42)式的右端,即得

$$(\delta\pi_1)' - \delta\omega_1 = \omega_3 \delta\pi_2 - \omega_2 \delta\pi_3 \quad (3.2.43)$$

完全类似地有以下二关系

$$\left. \begin{aligned} (\delta\pi_2)' - \delta\omega_2 &= \omega_1 \delta\pi_3 - \omega_3 \delta\pi_1 \\ (\delta\pi_3)' - \delta\omega_3 &= \omega_2 \delta\pi_1 - \omega_1 \delta\pi_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.44)$$

由此得到三标记号如下:

$$\gamma_{32}^1 = -\gamma_{23}^1 = 1, \gamma_{13}^2 = -\gamma_{31}^2 = 1, \gamma_{21}^3 = -\gamma_{12}^3 = 1 \quad (3.2.45)$$

所有其余右上方指标为1、2、3的三标记号均为零。对于第二组准速度与广义速度关系(3.2.38),采用以下运动学关系更简单:

$$\omega_{3+s} = v_o \cdot i_s, \delta\pi_{3+s} = \delta r_o \cdot i_s, \quad (s=1, 2, 3) \quad (3.2.46)$$

而单位向量导数及变分由以下关系决定:

$$\frac{d}{dt}(i_s) = \omega \times i_s, \delta i_s = \delta\pi \times i_s, \quad (3.2.47)$$

其中 $\delta\pi = \omega' dt - \omega dt$ 为任意无限小角位移向量, 于是有

$$\left. \begin{aligned} (\delta\pi_{3+s}) \cdot &= (\delta r_o) \cdot i_s + \delta r_o \cdot (\omega \times i_s) \\ \delta\omega_{3+s} &= \delta v_o \cdot i_s + v_o \cdot (\delta\pi \times i_s) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.48)$$

将以上两式相减, 并利用关系 ($d\delta r_o = \delta dr_o$), 得

$$(\delta\pi_{3+s}) \cdot - \delta\omega_{3+s} = (\delta r_o \times \omega - v_o \times \delta\pi) \cdot i_s, \quad (3.2.49)$$

令 s 依次等于 1, 2, 3, 即得以下关系:

$$\left. \begin{aligned} (\delta\pi_4) \cdot - \delta\omega_4 &= \omega_3 \delta\pi_5 - \pi_2 \delta\pi_6 - (\omega_5 \delta\pi_3 - \omega_6 \delta\pi_2) \\ (\delta\pi_5) \cdot - \delta\omega_5 &= \omega_1 \delta\pi_6 - \omega_3 \delta\pi_4 - (\omega_6 \delta\pi_1 - \omega_4 \delta\pi_3) \\ (\delta\pi_6) \cdot - \delta\omega_6 &= \omega_2 \delta\pi_4 - \omega_1 \delta\pi_5 - (\omega_4 \delta\pi_2 - \omega_5 \delta\pi_1) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.50)$$

由此得三标记号:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{15}^4 &= -\gamma_{53}^4 = 1, & \gamma_{62}^4 &= -\gamma_{26}^4 = 1 \\ \gamma_{16}^5 &= -\gamma_{61}^5 = 1, & \gamma_{43}^5 &= -\gamma_{34}^5 = 1 \\ \gamma_{24}^6 &= -\gamma_{42}^6 = 1, & \gamma_{51}^6 &= -\gamma_{15}^6 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.51)$$

所有其余右上方指标为 4, 5, 6 的三标记号均为零.

现在可以列出 Euler-Lagrange 方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_{o1}} + \omega_2 \frac{\partial T}{\partial v_{o3}} - \omega_3 \frac{\partial T}{\partial v_{o2}} &= R_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_{o2}} + \omega_3 \frac{\partial T}{\partial v_{o1}} - \omega_1 \frac{\partial T}{\partial v_{o3}} &= R_2 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_{o3}} + \omega_1 \frac{\partial T}{\partial v_{o2}} - \omega_2 \frac{\partial T}{\partial v_{o1}} &= R_3 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_3} - \omega_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} + v_{o2} \frac{\partial T}{\partial v_{o3}} - v_{o3} \frac{\partial T}{\partial v_{o2}} &= M_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_2} + \omega_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_1} - \omega_1 \frac{\partial T}{\partial \omega_3} + v_{o3} \frac{\partial T}{\partial v_{o1}} - v_{o1} \frac{\partial T}{\partial v_{o3}} &= M_2 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_3} + \omega_1 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} - \omega_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_1} + v_{o1} \frac{\partial T}{\partial v_{o2}} - v_{o2} \frac{\partial T}{\partial v_{o1}} &= M_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.52)$$

以上便是自由刚体的动力学方程, 其中含 $\frac{\partial T}{\partial v_{0s}}$ 及 $\frac{\partial T}{\partial \omega_s}$ 的项都是以三标记号为系数的项。至于动能对准坐标之导数 $\frac{\partial T}{\partial \pi_s}$ 这类项并不出现, 这是因为动能表达式 (3.2.36) 仅显含准速度, 并不显含广义坐标。方程 (3.2.52) 中之 R_s 及 M_s 分别为外力主向量在 i_s 上之投影及外力对 i_s 轴之主矩。

方程 (3.2.52) 也可以写成矩阵形式如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial v_o} \right\} + [\tilde{\omega}] \left\{ \frac{\partial T}{\partial v_o} \right\} &= \{R\} \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \omega} \right\} + [\tilde{\omega}] \left\{ \frac{\partial T}{\partial \omega} \right\} + [\tilde{v}_o] \left\{ \frac{\partial T}{\partial v_o} \right\} &= \{M_o\} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.53)$$

其中 $\{R\}$ 及 $\{M_o\}$ 分别为外力主向量及外力对 O 点的主矩列阵, $[\tilde{\omega}]$ 及 $[\tilde{v}_o]$ 为以下反对称方阵:

$$[\tilde{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\tilde{v}_o] = \begin{bmatrix} 0 & -v_{o3} & v_{o2} \\ v_{o3} & 0 & -v_{o1} \\ -v_{o2} & v_{o1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.54)$$

容易验证, 方程 (3.2.53) 其实就是刚体对动轴系 $Oxyz$ 的动量方程与动量矩方程 (即 Newton-Euler 方程)

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} &= \mathbf{R} \\ \dot{\mathbf{G}}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}_o + \mathbf{v}_o \times \mathbf{K} &= \mathbf{M}_o \end{aligned} \right\} \quad (3.2.55)$$

其中 \mathbf{K} 及 \mathbf{G}_o 分别表示刚体动量及对 O 点之动量矩, $\dot{}$ 表示在动参考系 $Oxyz$ 中求导 (相对导数), \mathbf{R} 及 \mathbf{M}_o 分别表示外力主向量及外力对 O 点的主矩。由此可见, 三标记号的出现与采用动坐标系以及 O 点和质心不重合等因素有关。

如果 $Oxyz$ 和刚体过 O 点之惯性主轴系相重合, 且三个主惯性矩为 I_1^*, I_2^*, I_3^* , 则刚体的动能表达式 (3.2.31) 有以下形式:

$$\begin{aligned}
T = \frac{1}{2} \{ & M(v_{O1}^2 + v_{O2}^2 + v_{O3}^2) + 2M[(v_{O2}\omega_2 - v_{O3}\omega_2)x'_O + \\
& + (v_{O3}\omega_1 - v_{O1}\omega_3)y'_O + (v_{O1}\omega_2 - v_{O2}\omega_1)z'_O] + \\
& + (I_1^*\omega_1^2 + I_2^*\omega_2^2 + I_3^*\omega_3^2) \} \quad (3.2.56)
\end{aligned}$$

因而

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial v_{O1}} &= M(v_{O1} + z'_O\omega_2 - y'_O\omega_3) \\ \frac{\partial T}{\partial \omega_1} &= M(y'_O v_{O3} - z'_O v_{O2}) + I_1^*\omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.57)$$

不难看出,上式左右端分别表示刚体动量及对 O 点的动量矩在 Ox 轴上的投影,换句话说,动能对准速度的偏导数等于动量或动量矩在动轴系 $Oxyz$ 上的投影:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial v_{Os}} &= K_s \\ \frac{\partial T}{\partial \omega_s} &= G_{Os} \end{aligned} \right\} \quad (s=1, 2, 3) \quad (3.2.58)$$

由以上所述可知,准坐标起了沟通 Newton-Euler 方程与 Lagrange 方程的桥梁作用,但准坐标表示的 Lagrange 方法有更普遍的意义。

3.3 载体-被载系统的运动微分方程

设有一可在空间自由运动的刚体,在这刚体上有通过约束与之相连接的另一系统相对该刚体而运动。于是我们就面临一个可作相对运动的任意系统与自由刚体相耦合的复杂系统动力学问题,这类问题无疑在航空、航天、航海等技术领域中有重要意义。以下为明确起见,将可作自由运动的刚体称为载体,将相对载体作任意运动的系统(暂限于完整系统)称为被载系统,载体的自由度为 6,被载系统的自由度可以是任意有限个数目 n ,因之整个系统的

自由度为 $6+n$ 。对于这类问题,最简便合理的分析方法是:用广义坐标 $x_0, y_0, z_0, \varphi, \psi, \theta$ 及准速度 $v_{01}, v_{02}, v_{03}, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ 描述载体,而用广义坐标 q_1, \dots, q_n 描述被载系统,其中 O 点为载体上任意选的一点,准速度为 O 点速度 v_0 及角速度 ω 在固结在载体上的坐标系 $Oxyz$ 上的投影。因之,整个系统的动能是变量 $v_{01}, v_{02}, v_{03}, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n, t$ 的函数,即

$$T = T(\omega, \dot{q}, q, t) \quad (3.3.1)$$

于是,全部运动方程由两组方程构成:第一组为与准坐标相对应的 Euler-Lagrange 方程,共 6 个;第二组为与广义坐标相对应的 Lagrange 方程,共 n 个。

3.3.1 载体的运动微分方程

取载体上一点 O 及固结在载体上的坐标系 $Oxyz$, 设 v_0 为 O 点的速度, ω 为载体的角速度。系统内任一质点 m_i 相对载体的速度记作 v'_i 。于是,载体上任一点 P_i 的绝对速度为

$$v_i = v_0 + \omega \times r'_i \quad (i=1, \dots, N') \quad (3.3.2)$$

其中 N' 为载体所分割成的质点数,被载系统上任一点的绝对速度为

$$v_s = v_0 + \omega \times r'_s + v'_s \quad (s=1, \dots, N'') \quad (3.3.3)$$

其中 N'' 为被载系统所分割成的质点数,设总质点数为 $N = N' + N''$,这两种速度的平方分别为:

$$v_i^2 = v_0^2 + 2(v_0 \times \omega) \cdot r'_i + (\omega \times r'_i) \cdot (\omega \times r'_i) \quad (i=1, \dots, N') \quad (3.3.4)$$

$$\begin{aligned} v_s^2 = & v_0^2 + 2(v_0 \times \omega) \cdot r'_s + (\omega \times r'_s) \cdot (\omega \times r'_s) + \\ & + 2v_0 \cdot v'_s + 2\omega \cdot (r'_s \times v'_s) + v'^2_s \quad (s=1, \dots, N'') \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

全系统的动能为

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N'} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N''} m_s v_s^2 \\
&= \frac{1}{2} [M v_0^2 + 2M(\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{r}'_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}] + \\
&\quad + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{K}_r + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{G}_r^0 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N''} m_s v_s'^2 \quad (3.3.6)
\end{aligned}$$

其中 \mathbf{I}_0 为整个系统对 O 点的惯性张量, \mathbf{K}_r 及 \mathbf{G}_r^0 为被载系统* 相对运动的动量及对 O 点之动量矩, (3.3.6) 式表明, 总动能由三部分组成:

$$T = T_0 + T_m + T_r \quad (3.3.7)$$

其中 T_0 为牵连运动的动能:

$$T_0 = \frac{1}{2} [M v_0^2 + 2M(\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{r}'_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}] \quad (3.3.8)$$

仅从数学形式看, 和 3.2.3 节中自由刚体动能表达式很相似, 但这里的 \mathbf{r}'_0 及 \mathbf{I}_0 不是常量, 当被载系统有相对运动时将随时间而变; T_r 为相对运动动能:

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N''} m_s v_s'^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N''} m_s \dot{\mathbf{r}}_s'^2 \quad (3.3.9)$$

其中 $\dot{\mathbf{r}}_s'$ 为 \mathbf{r}_s' 对时间的相对导数当然这部分能量只涉及被载系统, 此外, 还有涉及载体和被载系统的混合能量 T_m :

$$T_m = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{K}_r + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{G}_r^0 \quad (3.3.10)$$

显然, T_0 是准速度的二次型, 以下假设被载系统相对于载体的约束是定常的, 即 $\mathbf{r}'_s = \mathbf{r}'_s(q_1, \dots, q_n)$, 因而 T_r 也是广义速度 \dot{q}_j 的二次型:

* 实际上也是整个系统的相对运动中的动力学量, 只不过载体的那部分没有相对运动而已。

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (3.3.11)$$

其中

$$A_{jk} = \sum_{s=1}^{N''} m_s \frac{\partial \mathbf{r}'_s}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_s}{\partial q_k} \quad (3.3.12)$$

至于 T_m , 则为准速度与广义速度的双线性型, \mathbf{K}_r 与 \mathbf{G}_r^0 的广义速度表达式为*

$$\mathbf{K}_r = \sum_{s=1}^{N''} m_s \mathbf{v}'_s = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_j} \quad (3.3.13)$$

$$\mathbf{G}_r^0 = \sum_{s=1}^{N''} m_s \mathbf{r}'_s \times \mathbf{v}'_s = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_j} \quad (3.3.14)$$

因之我们有

$$T_m = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{K}_r + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{G}_r^0 = \sum_{j=1}^n B_j \dot{q}_j \quad (3.3.15)$$

其中

$$B_j = \mathbf{v}_0 \cdot \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_j} + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_j} \quad (3.3.16)$$

以下要列出虚功表达式, 为此需先分析系统中任一点的虚位移, 任一点的矢径为

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_s(q_1, \dots, q_n) \quad (3.3.17)$$

由于矢径 \mathbf{r}'_i 的绝对导数 $\dot{\mathbf{r}}'_i$ 与相对导数 $\overset{*}{\mathbf{r}}'_i$ 间存在以下关系:

$$\dot{\mathbf{r}}'_i = \overset{*}{\mathbf{r}}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \quad (3.3.18)$$

* \mathbf{K}_r 及 \mathbf{G}_r^0 本来只涉及被载系统质量, 现在扩至整个系统是可行的, 因为载体没有相对运动。

因之(3.3.17)式之变分也有类似关系如下:

$$\delta \mathbf{r}_s = \delta \mathbf{r}_o + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}'_s}{\partial q_j} \delta q_j + \delta \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{r}'_s \quad (3.3.19)$$

其中 $\delta \boldsymbol{\pi}$ 为任意无限小角位移向量, 由此可知, 主动力的虚功可表为

$$\delta' W = \sum_{s=1}^{N''} \mathbf{F}_s \cdot \delta \mathbf{r}_s = \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r}_o + \mathbf{M}_o \cdot \delta \boldsymbol{\pi} + \sum_{j=1}^n Q_j \cdot \delta q_j \quad (3.3.20)$$

其中 \mathbf{R} ——主动力的主向量, \mathbf{M}_o ——主动力对 O 点的主矩。载体的运动方程由以下的 Euler-Lagrange 方程给出:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial v_o} \right\} + [\boldsymbol{\omega}] \left\{ \frac{\partial T}{\partial v_o} \right\} &= \{R\} \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \omega} \right\} + [\boldsymbol{\omega}] \left\{ \frac{\partial T}{\partial \omega} \right\} + [\bar{v}_o] \left\{ \frac{\partial T}{\partial v_o} \right\} &= \{M_o\} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.21)$$

由于 T_r 不显含准速度, 故求 T 对准速度之偏导数时只涉及 T_e 及 T_m , 即

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial T}{\partial v_o} \right\} &= \left\{ \frac{\partial T_e}{\partial v_o} \right\} + \left\{ \frac{\partial T_m}{\partial v_o} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial T}{\partial \omega} \right\} &= \left\{ \frac{\partial T_e}{\partial \omega} \right\} + \left\{ \frac{\partial T_m}{\partial \omega} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.22)$$

由(3.3.8)的展开式可得:

$$\begin{aligned} T_e = \frac{1}{2} \{ & M(v_{o1}^2 + v_{o2}^2 + v_{o3}^2) + 2M[(v_{o2}\omega_3 - v_{o3}\omega_2)x_o + \\ & + (v_{o3}\omega_1 - v_{o1}\omega_3)y_o + (v_{o1}\omega_2 - v_{o2}\omega_1)z_o] + \\ & + I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2 + I_{33}\omega_3^2 + 2I_{12}\omega_1\omega_2 + 2I_{23}\omega_2\omega_3 + \\ & + 2I_{31}\omega_3\omega_1 \} \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

由此可求得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_e}{\partial v_{o1}} &= M(v_{o1} + \omega_2 z_c - \omega_3 y_c) \\ \frac{\partial T_e}{\partial v_{o2}} &= M(v_{o2} + \omega_3 x_c - \omega_1 z_c) \\ \frac{\partial T_e}{\partial v_{o3}} &= M(v_{o3} + \omega_1 y_c - \omega_2 x_c) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.24)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_e}{\partial \omega_1} &= M(y_c v_{o3} - z_c v_{o2}) + I_{11}\omega_1 - I_{12}\omega_2 - I_{13}\omega_3 \\ \frac{\partial T_e}{\partial \omega_2} &= M(z_c v_{o1} - x_c v_{o3}) - I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 - I_{23}\omega_3 \\ \frac{\partial T_e}{\partial \omega_3} &= M(x_c v_{o2} - y_c v_{o1}) - I_{31}\omega_1 - I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.25)$$

由(3.3.10)式可求得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_m}{\partial v_{o1}} &= K_{r1} = M\dot{x}_c, \quad \frac{\partial T_m}{\partial v_{o2}} = K_{r2} = M\dot{y}_c, \quad \frac{\partial T_m}{\partial v_{o3}} = K_{r3} = M\dot{z}_c \\ \frac{\partial T_m}{\partial \omega_1} &= G_{r1}^o, \quad \frac{\partial T_m}{\partial \omega_2} = G_{r2}^o, \quad \frac{\partial T_m}{\partial \omega_3} = G_{r3}^o \end{aligned} \right\} \quad (3.3.26)$$

将(3.3.24)至(3.3.26)代入 Euler-Lagrange 方程 (3.3.21), 即得以准速度和广义坐标表示的载体运动方程, 因过于冗长, 不再列出, 读者可自行推导。值得注意的是, 当系统质心相对载体保持不动时, 如取质心 C 作为参考点, 则以上算式可得到很大简化如下:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial T}{\partial v_o} \right\} &= \left\{ \frac{\partial T_e}{\partial v_o} \right\} + \left\{ \frac{\partial T_m}{\partial v_o} \right\} = M \{v_c\} \\ \left\{ \frac{\partial T}{\partial \omega} \right\} &= \left\{ \frac{\partial T_e}{\partial \omega} \right\} + \left\{ \frac{\partial T_m}{\partial \omega} \right\} = [I_o] \{\omega\} + \{G_r^o\} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.27)$$

于是, 载体的 Euler-Lagrange 方程化为:

$$\left. \begin{aligned} M \{\dot{v}_c\} + M[\dot{\omega}] \{v_c\} &= \{R\} \\ [I_o] \{\dot{\omega}\} + [I_o] \{\omega\} + \{G_r^o\} &+ [\dot{\omega}][I_o] \{\omega\} + [\dot{\omega}] \{G_r^o\} = \{M_o\} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.28)$$

3.3.2 被载系统的相对运动微分方程

为缩短书写,引入 Euler 微分算子 \mathcal{E}_j , 定义为

$$\mathcal{E}_j(\quad) \triangleq \frac{d}{dt} \frac{\partial(\quad)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(\quad)}{\partial q_j} \quad (3.3.29)$$

则被载系统的相对运动方程可表为

$$\mathcal{E}_j(T_e) + \mathcal{E}_j(T_m) + \mathcal{E}_j(T_r) = Q_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (3.3.30)$$

以下分别展开前两项,由于 T_e 与广义速度 \dot{q}_j 无关,因此有

$$\mathcal{E}_j(T_e) = -\frac{\partial T_e}{\partial q_j} = -M(\mathbf{v}_o \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_c}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{I}^o}{\partial q_j} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (3.3.31)$$

$$\text{由于 } T_m = \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{K}_r + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{G}_r^o \quad (3.3.32)$$

$$\text{而 } \mathbf{K}_r = M\mathbf{v}'_o = M\mathbf{r}'_c \quad (3.3.33)$$

于是利用关系

$$\frac{\partial \mathbf{r}'_c}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}'_c}{\partial q_j}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}'_c}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}'_c}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{r}'_c}{\partial q_j} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{r}'_c}{\partial q_j} \quad (3.3.34)$$

及向量的绝对导数与相对导数关系

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \quad (3.3.35)$$

便得到

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_j(\mathbf{v}_o \cdot \mathbf{K}_r) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial(M\mathbf{v}_o \cdot \mathbf{r}'_c)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(M\mathbf{v}_o \cdot \mathbf{r}'_c)}{\partial q_j} \\ &= M(\dot{\mathbf{v}}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_o) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_c}{\partial q_j} + M\mathbf{v}_o \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}'_c}{\partial q_j} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{r}'_c}{\partial q_j} \right) - M\mathbf{v}_o \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_c}{\partial q_j} \\ &= M\dot{\mathbf{v}}_o \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_c}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

同样可得到

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_j(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{G}_r^o) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{G}_r^o)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{G}_r^o)}{\partial q_j} \\ &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}_r^o}{\partial \dot{q}_j} + \boldsymbol{\omega} \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{G}_r^o}{\partial \dot{q}_j} \right)^* + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{G}_r^o}{\partial \dot{q}_j} \right] - \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}_r^o}{\partial q_j} \end{aligned}$$

$$= \dot{\omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}_r^0}{\partial \dot{q}_j} + \omega \cdot \mathbb{E}_j^*(\mathbf{G}_r^0) \quad (3.3.37)$$

其中 \mathbb{E}_j^* 表示以下算子

$$\mathbb{E}_j^* \triangleq \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \right)^* - \frac{\partial}{\partial q_j} \quad (3.3.38)$$

被载系统的相对运动方程可表为以下形式:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_j(T_r) = Q_j - M(\dot{\mathbf{v}}_o + \omega \times \mathbf{v}_o) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_o}{\partial q_j} + \\ + \frac{1}{2} \omega \cdot \frac{\partial \mathbf{I}^0}{\partial q_j} \cdot \omega - \dot{\omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}_r^0}{\partial \dot{q}_j} - \omega \cdot \mathbb{E}_j^*(\mathbf{G}_r^0) \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

除了广义力 Q_j 外, 方程右端其它各项可视为由于载体运动引起的惯性力, 现在分别讨论如下:

向量

$$\mathbf{S}^0 = -M(\dot{\mathbf{v}}_o + \omega \times \mathbf{v}_o) = -M\dot{\mathbf{v}}_o \quad (3.3.40)$$

称为平动惯性力。因之等式(3.3.39)右边第二项可表为

$$Q_j^0 = \mathbf{S}^0 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_o}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} (M\dot{\mathbf{v}}_o \cdot \mathbf{r}'_o) = -\frac{\partial V^0}{\partial q_j} \quad (3.3.41)$$

可称为广义平动惯性力。而标量

$$V^0 = M\dot{\mathbf{v}}_o \cdot \mathbf{r}'_o = M(\dot{\mathbf{v}}_o + \omega \times \mathbf{v}_o) \cdot \mathbf{r}'_o \quad (3.3.42)$$

可称为平动惯性力场的势能。

由角速度 ω 的分量所组成的二次型

$$V^{\omega} = -\frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{I}^0 \cdot \omega \quad (3.3.43)$$

可称为离心惯性力的势能, 或简称离心势能, 而第三项可表为

$$Q_j^{\omega} = -\frac{\partial V^{\omega}}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \omega \cdot \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial q_j} \cdot \omega \quad (3.3.44)$$

称为广义离心惯性力。

方程(3.3.39)右边最后两项都涉及 \mathbf{G}_r^0 , 它定义为

$$\mathbf{G}_r^0 = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_j} \quad (3.3.45)$$

故有

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}_r^0}{\partial \dot{q}_j} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_j} \quad (3.3.46)$$

因而方程(3.3.39)右边倒数第二项可表为

$$Q_j^{\dot{\omega}} = -\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}_r^0}{\partial \dot{q}_j} = -\sum_{i=1}^N (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times m_i \mathbf{r}'_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_j} \quad (3.3.47)$$

由于向量 $-m_i(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'_i)$ 表示质点 m_i 的转动惯性力, 所以 $Q_j^{\dot{\omega}}$ 可称为广义转动惯性力。

现在仍由(3.3.45)的 \mathbf{G}_r^0 表达式作以下运算:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{G}_r^0}{\partial \dot{q}_j} \right)^* = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_k} \times \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_j} + \mathbf{r}'_i \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}'_i}{\partial q_k \partial q_j} \right) \quad (3.3.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_r^0}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_j} \times \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_k} + \mathbf{r}'_i \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}'_i}{\partial q_j \partial q_k} \right) \quad (3.3.49)$$

由此可知方程(3.3.39)的最后一项可表为

$$\begin{aligned} \Gamma_j &= -\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{G}_r^0) = -2\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_k} \times \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_j} \\ &= -2\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \times \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^N m_i (2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (3.3.50)$$

由于 $-m_i(2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'_i)$ 表示质点 m_i 的科氏(Coriolis)惯性力, 因此 Γ_j 可称广义科氏惯性力。由(3.3.50)式可知, Γ_j 为广义速度的线性齐次式, 即

$$\Gamma_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} \dot{q}_k \quad (3.3.51)$$

其中

$$\gamma_{jk} = 2\omega \cdot \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_j} \times \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_k} = -\gamma_{kj} \quad (3.3.52)$$

即 γ_{jk} 形成反对称矩阵, 故知广义科氏惯性力也是一种广义陀螺力。

引入了以上提出的广义惯性力的概念和记号后, 被载系统的相对运动方程最终可表为以下形式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_r}{\partial q_j} = Q_j - \frac{\partial}{\partial q_j} (V^0 + V^*) + \dot{Q}_j^* + \Gamma_j, \quad (j=1, \dots, n) \quad (3.3.53)$$

载体-被载系统的全部方程为(3.3.21)与(3.3.53), 共计 $6+n$ 个, 这些方程联立求解后才能给出全部系统运动的解答。在以上推导中, 为了简便起见将诸广义惯性力涉及的质量扩大到了整个系统, 实际运算时仍只涉及被载系统的质量, 这是因为载体的动力学量与 q_j 无关, 因之只有被载系统的质量才对偏导数 $\frac{\partial}{\partial q_j} (V^0 + V^*)$ 有贡献。根据同样理由, \dot{Q}_j^* 及 Γ_j 表达式中也涉及对 q_j 求偏导数, 因之也只有被载系统的质量才对它们有贡献。

如果载体的质量远远超过被载系统的质量, 那末被载系统的运动对载体的影响可略去不计。这时载体运动方程可以独立求解, 求得准速度后代入被载系统运动方程右端, 即确定了诸项广义惯性力, 即可求得被载系统的解, 这时被载系统的相对运动方程实际上变为在已知牵连运动的条件下的相对运动方程, 或非定常约束系统的运动方程。

由方程(3.3.53)还可讨论相对平衡这一特殊情况, 对于相对

平衡而言所有广义坐标都保持常数不变:

$$q_j = q_j^0 = \text{const.} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (3.3.54)$$

于是, 方程(3.3.53)中所有涉及相对运动的项 T_r 及 F_j 均应自动消除。此外, 对于无控制系统而言, 真正能实现相对平衡的惯性力场应是不随时间而变的恒定场, 这就要求 O 点加速度 $\ddot{\phi}_0$ 及角速度 ω 保持为常向量。因之广义转动惯性力 Q_j^{ϕ} 也应为零。此外, 还假定 Q_j 可分解为一般力及保守力两项, 一般力部分如依赖广义速度则显然应为零(例如粘滞阻尼情况), 至于保守力部分可通过势函数 V 来表达, 相对平衡的平衡方程可表为:

$$Q_j - \frac{\partial}{\partial q_j}(V + V^0 + V^{\phi}) = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (3.3.55)$$

例题 3.3.1 具有旋转对称轴之载体可在水下自由航行, 在其轴线上有一带有转子的刚性轴支承在弹性轴承上, 转子以角速度 Ω_0 高速旋转, 载体在航行过程中有三个方向的平动及一个方向的转动(绕 z 轴, 见图 3.6)。试列出转子微振动情况下的载体及被载系统的运动方程。

已知:

v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} ——载体重心的三个速度分量

ω ——载体绕 z 轴转动角速度

M, M_r ——整个系统及转子的质量

A_0, C_0, C_0 ——载体对 x 轴, y 轴, z 轴之主惯性矩

A, C, C ——转子对 x_1 轴, y_1 轴, z_1 轴之主惯性矩

l ——转子中心至左右轴承之距离

a ——载体重心至转子中心之距离

ξ_0, η_0 ——转子重心在 $Oxyz$ 坐标系中的相对坐标

k_1, k_2 ——左右两轴承分别在 y 方向及 z 方向的轴承刚度

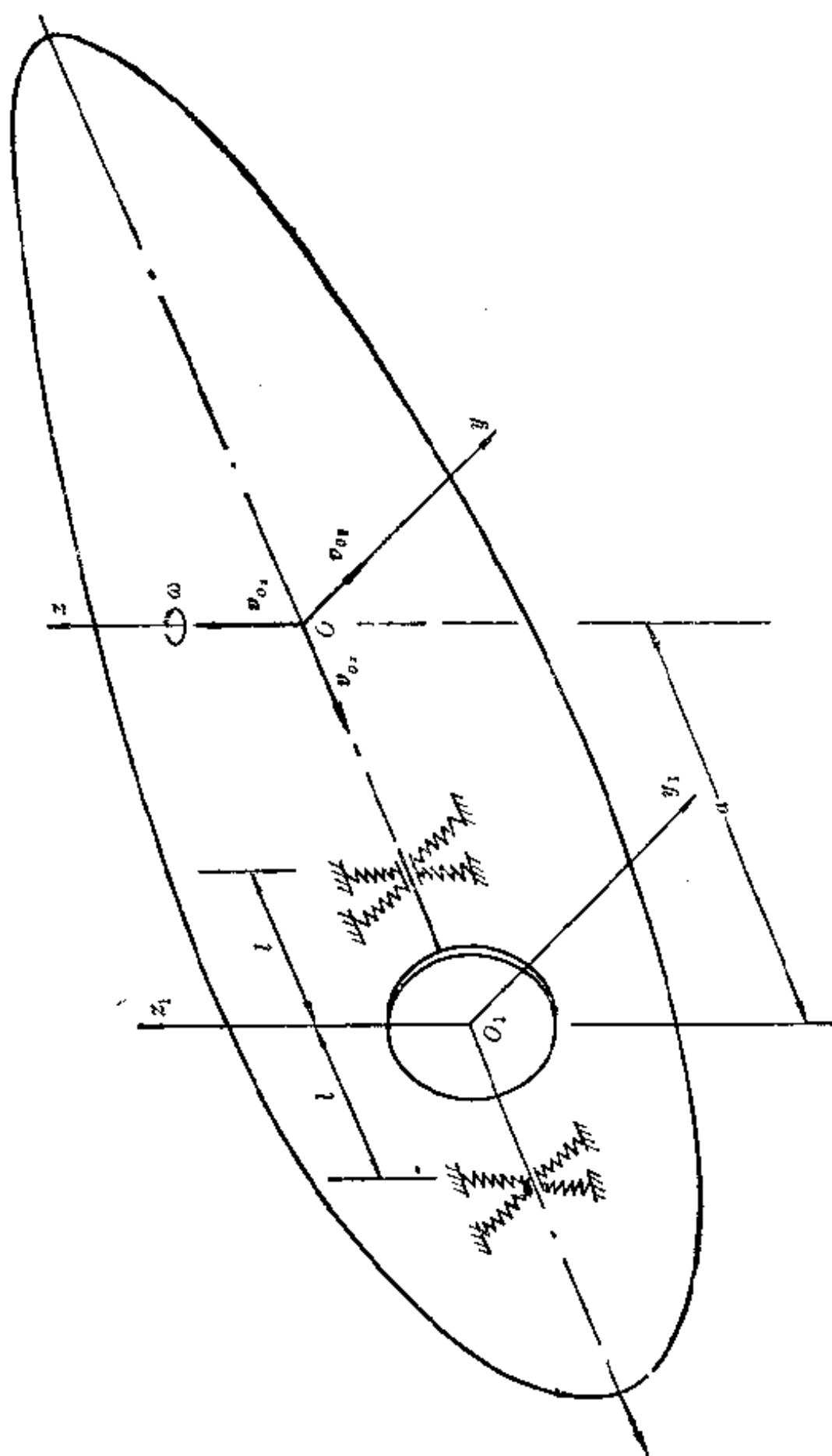


图 3.6

解 在转子的相对运动中任一位形可由以下方式得到, 即由 $O_1x_1y_1z_1$ 绕 z_1 轴转 α 角得到 $O_1x'y'z$, 再绕 y' 轴转 β 角得到 $O_1x'y'z'$ 。

转子角速度在 $O_1x'y'z'$ 坐标轴上的投影为:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_0 - \dot{\alpha} \sin \beta \approx \Omega_0 - \dot{\alpha} \beta \\ \Omega_2 &= \dot{\beta} \\ \Omega_3 &= \dot{\alpha} \cos \beta \approx \dot{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

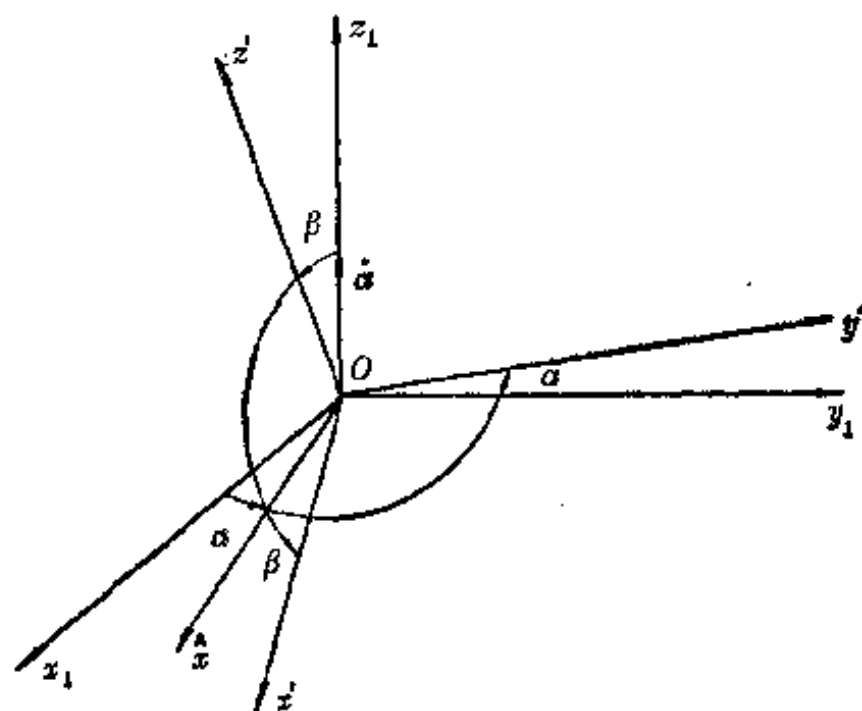


图 3.7

转子在相对运动中之动能为

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{2} A \Omega_1^2 + \frac{1}{2} C (\Omega_2^2 + \Omega_3^2) + \frac{1}{2} M_r (\xi_c^2 + \eta_c^2) \\ &= \frac{1}{2} M_r (\xi_c^2 + \eta_c^2) + \frac{1}{2} A (\Omega_0 - \dot{\alpha} \beta)^2 + \frac{1}{2} C (\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2) \\ &\approx \frac{M_r}{2} (\xi_c^2 + \eta_c^2) + \frac{A}{2} \Omega_0^2 + \frac{C}{2} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) - A \Omega_0 \dot{\alpha} \beta \quad (b) \end{aligned}$$

在以上算式中仅保留二阶小量, 二阶以上的小量略去不计。转子在相对运动中之势能(只计弹力势能)为:

$$\begin{aligned}
V_r &= \frac{k_1}{2}(\xi_c + l\alpha)^2 + \frac{k_1}{2}(\xi_c - l\alpha)^2 + \frac{k_2}{2}(\eta_c - l\beta)^2 + \\
&\quad + \frac{k_2}{2}(\eta_c + l\beta)^2 \\
&= k_1(\xi_c^2 + l^2) + k_2(\eta_c^2 + l^2\beta^2)
\end{aligned} \tag{c}$$

为了求“牵连运动”中的动能,须将载体角速度投影在 $O_1x'y'z'$ 轴系上,由上图可知相应的投影为:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1^e &= -\omega \sin \beta \approx -\omega \beta \\ \Omega_2^e &= 0 \\ \Omega_3^e &= \omega \cos \beta \approx \omega \end{aligned} \right\} \tag{d}$$

由此可得:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\omega \cdot I \cdot \omega &= \frac{1}{2}C_0\omega^2 + \frac{1}{2}(A\omega^2\beta^2 + C\omega^2) \\
&\approx \frac{1}{2}(C_0 + C)\omega^2
\end{aligned} \tag{e}$$

由于 O 点就在载体的重心上,故有

$$(\mathbf{v}_O \times \boldsymbol{\omega}) \cdot M\mathbf{r}'_c = (\mathbf{v}_O \times \boldsymbol{\omega}) \cdot M_r \boldsymbol{\rho}_c \tag{f}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_c$ 为转子对于 O 点的矢径,进一步展开后可得

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_O \times \boldsymbol{\omega}) \cdot M\mathbf{r}'_c &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_0 & \mathbf{j}_0 & \mathbf{k}_0 \\ v_{Ox} & v_{Oy} & v_{Oz} \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix} \cdot M_r(a\mathbf{i}_0 + \xi_c\mathbf{j}_0 + \eta_c\mathbf{k}_0) \\
&= M_r(v_{Oy}\omega a - v_{Ox}\omega\xi_c)
\end{aligned} \tag{g}$$

由(e)、(g)可得:

$$\begin{aligned}
T_e &= \frac{M}{2}(v_{Ox}^2 + v_{Oy}^2 + v_{Oz}^2) + M_r\omega(v_{Oy}a - v_{Ox}\omega\xi_c) \\
&\quad + \frac{1}{2}(C_0 + C)\omega^2
\end{aligned} \tag{h}$$

混合动能为

$$T_m = \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{K}_r + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{G}_r^0$$

$$= M_r(\dot{\xi}_c v_{oy} + \eta_c v_{oz}) + A(\Omega_0 - \alpha\beta)\Omega_1 + C\dot{\beta}\Omega_2 \\ + C\dot{\alpha}\Omega_2 \approx M_r(\dot{\xi}_c v_{oy} + \eta_c v_{oz}) - A\Omega_0\omega\beta + C\dot{\alpha}\omega \quad (i)$$

由载体方程的一般形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial v_o} \right\} + [\bar{\omega}] \left\{ \frac{\partial T}{\partial v_o} \right\} &= \{R\} \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \omega} \right\} + [\bar{\omega}] \left\{ \frac{\partial T}{\partial \omega} \right\} + [\bar{v}_o] \left\{ \frac{\partial T}{\partial v_o} \right\} &= \{M_o\} \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

可求得本题的载体运动方程(三个平动方程及一个转动方程):

$$\left. \begin{aligned} M\dot{v}_{ox} - M_r\omega\dot{\xi}_c - M_r\omega\dot{\xi}_c - \omega(Mv_{oy} + M_r\omega a + M_r\dot{\xi}_c) &= R_x \\ M\dot{v}_{oy} + M_r\omega a + M_r\dot{\xi}_c + \omega(Mv_{ox} - M_r\omega\dot{\xi}_c) &= R_y \\ M\dot{v}_{oz} + M_r\eta_c &= R_z \\ M_r(\dot{v}_{oy}a - \dot{v}_{ox}\dot{\xi}_c - v_{ox}\dot{\xi}_c) + (C_0 + C)\dot{\omega} + C\dot{a} \\ - A\Omega_0\dot{\beta} - v_{oy}(Mv_{oy} + M_r\omega a + M_r\dot{\xi}_c) \\ + v_{ox}(Mv_{ox} - M_r\omega\dot{\xi}_c) &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

其中 R_x 、 R_y 、 R_z 及 M_z 分别为外力的主向量分量及外力对 z 轴之主矩。

被载系统(即转子)的广义坐标为 α 、 β 、 ξ_o 、 η_o 共四个, 相应的相对运动方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, \dots, 4) \quad (l)$$

展开后可得以下方程(综合(b), (c), (h), (i)):

$$\left. \begin{aligned} M_r\dot{\xi}_c + M_r\dot{v}_{oy} + M_r\omega v_{ox} + 2k_1\xi_c &= 0 \\ M_r\eta_c + M_r\dot{v}_{oz} + 2k_2\eta_c &= 0 \\ C\dot{a} - A\Omega_0\dot{\beta} + 2k_1l^2\alpha &= 0 \\ C\dot{\beta} + A\Omega_0\dot{\alpha} + A\Omega_0\omega + 2k_2l^2\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

将(k)及(m)两组方程联立求解可求得八个未知量 v_{ox} 、 v_{oy} 、 v_{oz} 、 ω 、 ξ_c 、 η_c 、 α 、 β 。方程组是非线性的, 可用数值积分法求解。

例题 3.3.2 质量为 m , 中心主惯性矩为 A, C, C 的均质圆盘以其中心固定在弹性圆轴的一端, 弹性轴的另一端装在止推轴承中, 轴承的约束条件相当于固定端。设轴之长度为 l , 截面抗弯刚度为 EI , 轴以等角速度 ω 转动。试求圆盘能偏离铅垂位置处于相对平衡的条件。

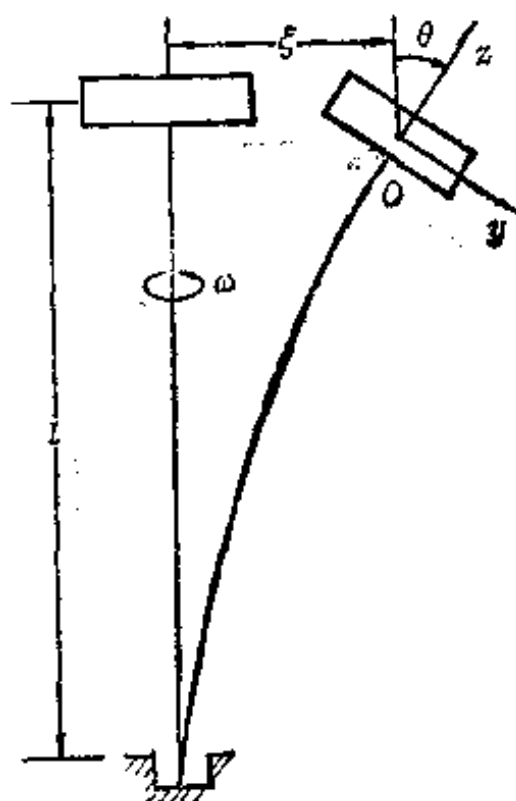


图 3.8

解 由于圆盘质量对称分布, 轴的截面也是轴对称, 发生相对偏离时必弯成铅垂面的平面曲线, 圆盘偏离后之位形可由弹性轴在

弯曲平面内端点的挠度 ξ 及转角 θ 决定如图 3.8 所示。

将动坐标原点取在圆盘中心, 则恒有 $r'_0 = 0$, 动坐标系 $Oxyz$ 固结在圆盘上, 并随圆盘一起绕竖轴以角速度 ω 旋转。系统的牵连运动的动能, 也就是牵连惯性力形成之势能, 即

$$T_0 = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} (A \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta) \omega^2 \quad (a)$$

在相对平衡条件下, 混合动能恒为零, 故 T_0 即为全部动能:

$$T = T_0 = \frac{1}{2} M \dot{\xi}^2 \omega^2 + \frac{1}{2} (A \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta) \omega^2 \quad (b)$$

设杆端的弯矩及剪力分别为 M^* 及 Q^* , 杆之势能为

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2EI} \int_0^l (M^* + Q^* x)^2 dx \\ &= \frac{1}{2EI} \int_0^l (M^{*2} + 2M^* Q^* x + Q^{*2} x^2) dx \\ &= \frac{1}{2EI} \left(M^{*2} l + M^* Q^* l^2 + \frac{Q^{*2}}{3} l^3 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2EI} [M^* Q^*] \begin{bmatrix} l & \frac{l^2}{2} \\ \frac{l^2}{2} & \frac{l^3}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M^* \\ Q^* \end{Bmatrix} \quad (c)$$

由此可知, 对于广义力向量 $[M^* Q^*]^T$ 而言, 柔度矩阵为

$$f = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} l & \frac{l^2}{2} \\ \frac{l^2}{2} & \frac{l^3}{3} \end{bmatrix} \quad (d)$$

因之, 对于广义位移向量 $[\theta \ \xi]^T$ 而言, 刚度矩阵为

$$k = f^{-1} = \frac{12EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{l^2}{3} & -\frac{l}{2} \\ -\frac{l}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (e)$$

于是, 用广义坐标 θ, ξ 表示之势能为

$$\begin{aligned} V &= \frac{12EI}{2l^3} [\theta \ x] \begin{bmatrix} \frac{l^2}{3} & -\frac{l}{2} \\ -\frac{l}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} \\ &= \frac{12EI}{2l^3} \left[\frac{l^2}{3} \theta^2 - l\xi\theta + \xi^2 \right] \end{aligned} \quad (f)$$

将(c)、(g)代入相对平衡方程:

$$-\frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2) \quad (g)$$

可得:

$$\left. \begin{aligned} -M\xi\omega^2 + \frac{6EI}{l^3}(-l\theta + 2\xi) &= 0 \\ (-A\cos\theta\sin\theta + C\sin\theta\cos\theta)\omega^2 + \frac{6EI}{l^3}\left(\frac{2l^2}{3}\theta - l\xi\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

当 θ 为小量时, 可近似地取 $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \theta$, 于是相对平衡方程

可简化为:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{12EI}{l^3} - M\omega^2 \right) \xi - \frac{6EI}{l^2} \theta &= 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} \xi + \left[\frac{4EI}{l} - (C-A)\omega^2 \right] \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

这是一组以 ξ, θ 为变量的线性齐次方程, 存在 ξ 及 θ 为非零的相对平衡条件在于方程(j)的系数行列式应等于零:

$$M(C-A)\omega^4 - \left[\frac{4EI}{l}M + (C-A)\frac{12EI}{l^3} \right] \omega^2 + 12\left(\frac{EI}{l^2}\right)^2 = 0 \quad (j)$$

由于 $A > C$, 以上方程可改写为:

$$M(A-C)\omega^4 + \frac{4EI}{l} \left[M - \frac{A-C}{l^2} \right] \omega^2 - 12\left(\frac{EI}{l^2}\right)^2 = 0 \quad (k)$$

由以上方程系数正负号可知, 其判别式恒大于零, 故知两个根都是实根, 且一正一负, 但负根没有意义, 至于正根之数值又与 ω^2 之系数有关, 今分别讨论如下:

(1) 当 $MI^2 > (A-C)$ 时, 方程(k)具有以下形式:

$$a\omega^4 + b\omega^2 - c = 0 \quad (l)$$

由于 a, b, c 皆为正数, 故其根为

$$\omega^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \quad (m)$$

(2) 当 $MI^2 < (A-C)$ 时, 方程(k)具有以下形式:

$$a\omega^4 - b\omega^2 - c = 0 \quad (n)$$

其根为

$$\omega^2 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \quad (o)$$

可见, 随 MI^2 大于或小于 $(A-C)$ 而有不同的临界转速公式, 当 $MI^2 < (A-C)$ 时有较高之临界转速; 当 $MI^2 > (A-C)$ 时有较低之临界转速。

用相对平衡的观点研究转子的临界转速问题,不仅概念清晰,而且分析过程简单,特别应指出的是,一般工程文献中常将方程中 $(C-A)\omega^2$ 项称为陀螺效应,这是将转子的运动分解为两个转动的合成后所提出的解释。按照相对运动的观点,陀螺效应或广义陀螺力的出现是牵连运动与相对运动共同存在时的广义科氏惯性力,在相对平衡问题中不存在广义陀螺力, $(C-A)\omega^2$ 项的出现是离心惯性力形成的广义力,它只和匀速转动的牵连运动有关。

例题 3.3.3 曲柄发动机的消振系统如图所示,曲柄在等角速 ω 附近有小的波动,消振器的振子为一放置在半径为 R 的圆柱

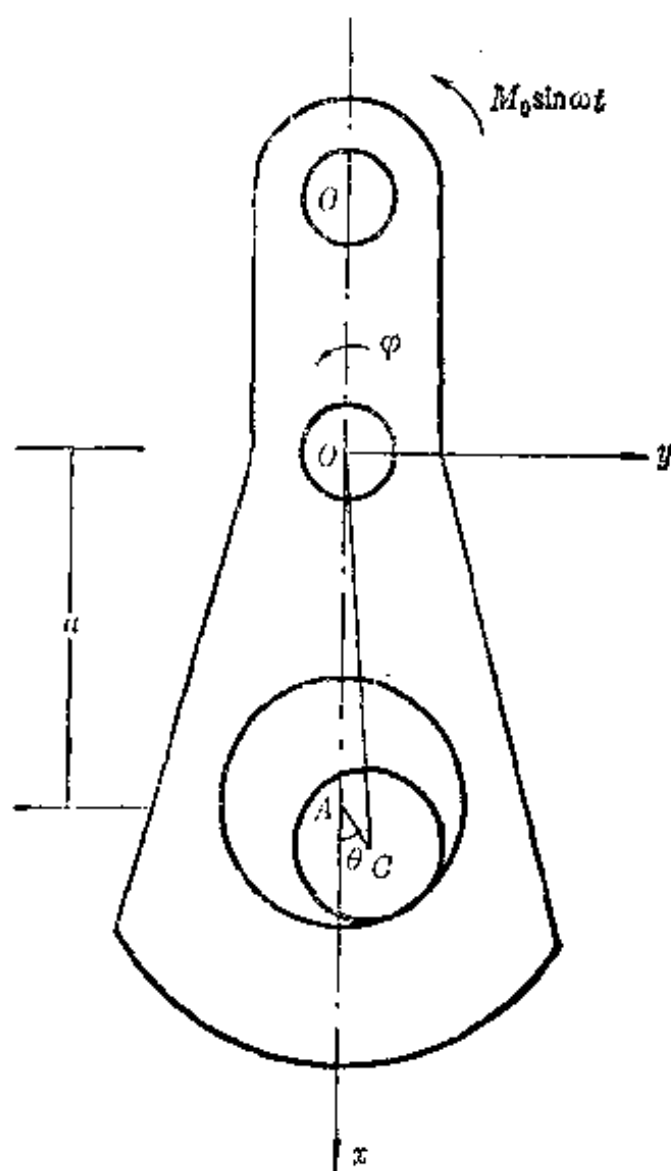


图 3.9

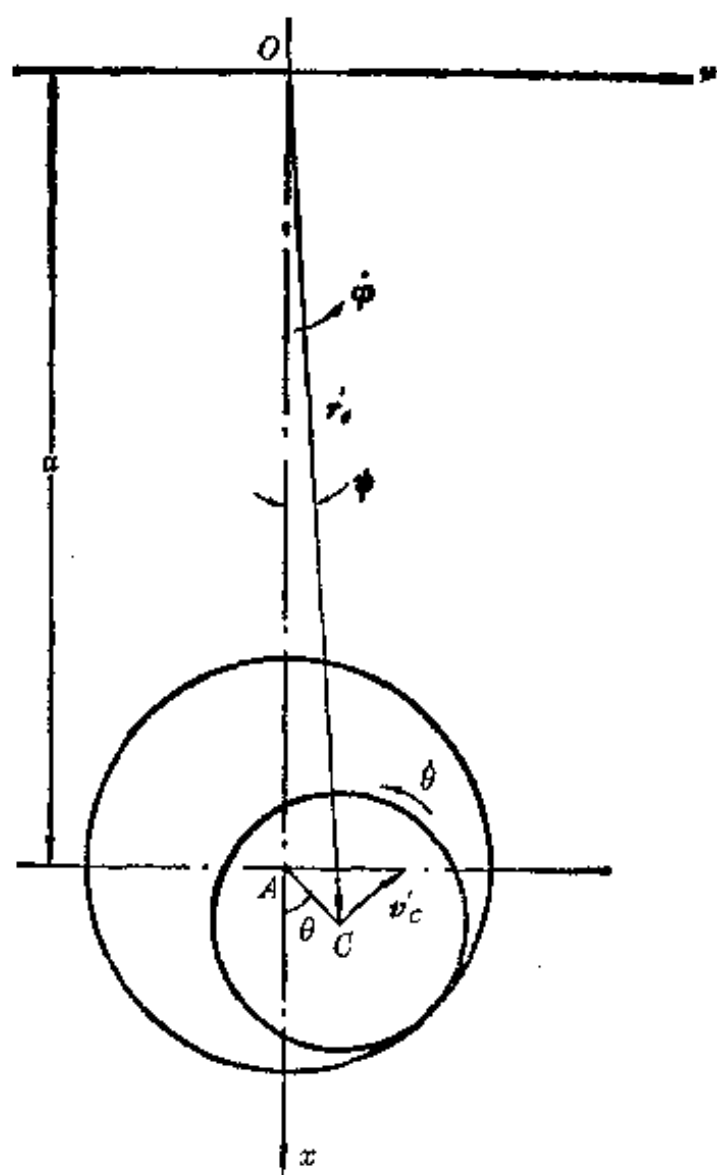


图 3.10

形孔内滚动的圆柱体，其半径为 r 。曲轴中心至圆柱形孔中心之距离为 a ，曲柄对转动轴之惯性矩为 I_1 ，振子的质量为 m ，对其本身中心轴线之惯性矩为 I_2 ，设在曲柄上作用脉动力矩 $M_0 \sin n\omega t$ 。试研究此系统之运动并讨论消振的条件。

解 将曲柄视为载体，振子视为被载物体。令固结在载体上的坐标系 Oxy 之原点与转动轴相重合，由于 $v=0$ ，故有关能量可简化如下：

$$T_0 = \frac{1}{2} \omega \cdot I \cdot \omega \quad (a)$$

$$T_m = \omega \cdot G_r^o \quad (b)$$

振子对 O 点之惯性矩为

$$I_r = I_1 + m[a^2 + (R-r)^2 + 2a(R-r)\cos\theta] \quad (c)$$

令

$$h = a + R - r \quad (d)$$

在 θ 为小量条件下 I_r 可简化为

$$I_r = I_1 + m[h^2 - a(R-r)\theta^2] \quad (e)$$

因之, 由 (a) 可得

$$T_o = \frac{1}{2}(J_o + J_1)\dot{\phi}^2 + \frac{m}{2}[h^2 - a(R-r)\theta^2]\dot{\phi}^2 \quad (f)$$

转子的相对运动中对 O 点的动量矩 G_r^o 可分解为

$$\begin{aligned} G_r^o &= (G_r^o + r_c \times v M'_c) k \\ &= \left[I_1 \frac{(R-r)}{r} \dot{\theta} + m \overline{OC} (R-r) \dot{\theta} \cos(\theta - \psi) \right] k \end{aligned} \quad (g)$$

略去高阶小量后, 可简化为

$$G_r^o = \left\{ I_1 \frac{(R-r)}{r} \dot{\theta} + mh(1 - \alpha\theta^2)(R-r)\dot{\theta} \right\} k \quad (h)$$

其中

$$\alpha = \frac{a}{2h} \quad (i)$$

于是由 (b) 可得

$$T_m = \left[I_1 \left(\frac{R-r}{r} \right) + mh(1 - \alpha\theta^2)(R-r) \right] \dot{\theta} \dot{\phi} \quad (j)$$

振子的相对运动动能为

$$T_r = \frac{1}{2}(I_1 + mr^2) \left(\frac{R-r}{r} \right)^2 \dot{\theta}^2 \quad (k)$$

T_o 还可简化为

$$T_o = \frac{1}{2}(I_o + I_1)\dot{\phi}^2 + \frac{mh^2}{2}(1 - \beta\theta^2)\dot{\phi}^2 \quad (l)$$

其中

$$\beta = \frac{a(R-r)}{h^2}$$

由于曲柄在角速度 ω 附近有小扰动, 即有

$$\phi = \omega + \varepsilon(t) \approx \omega \quad (m)$$

$$\phi = \vartheta \quad (n)$$

因之 (j) 中含 α 之项相对 (l) 中含 β 之项而言可略去不计。系统的运动方程在略去高阶小量后可表为:

$$\left. \begin{aligned} (I_0 + I_1)\ddot{\varepsilon} + mh^2\ddot{\varepsilon} + (I_1 + mhr)\left(\frac{R-r}{r}\right)\ddot{\theta} &= M_o \sin n\omega t \\ (I_1 + mhr)\left(\frac{R-r}{r}\right)\ddot{\varepsilon} + (I_1 + mr^2)\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\ddot{\theta} + mh^2\beta\omega^2\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (o)$$

这是两个自由度的强迫振动方程, 设其特解为

$$\varepsilon = A \sin n\omega t, \theta = B \sin n\omega t \quad (p)$$

代入 (o) 式后, 可得:

$$\left. \begin{aligned} (I_0 + I_1 + mh^2)A + (I_1 + mhr)\left(\frac{R-r}{r}\right)B &= -\frac{M_o}{n^2\omega^2} \sin \omega t \\ (I_1 + mhr)\left(\frac{R-r}{r}\right)A + \left[(I_1 + mr^2)\left(\frac{R-r}{r}\right)^2 - \frac{mh^2\beta}{n^2}\right]B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

记 A, B 之系数行列式为 Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= (I_0 + I_1 + mh^2) \left[(I_1 + mr^2)\left(\frac{R-r}{r}\right)^2 - \frac{mh^2\beta}{n^2} \right] \\ &\quad - (I_1 + mhr)^2 \left(\frac{R-r}{r}\right)^2 \end{aligned} \quad (r)$$

则方程 (o) 之解为

$$\varepsilon = -\frac{M_o}{n^2\omega^2\Delta} \left[(I_1 + mr^2)\left(\frac{R-r}{r}\right)^2 - \frac{mh^2\beta}{n^2} \right] \sin n\omega t \quad \left\{ \right.$$

$$\theta = \frac{M_o}{n^2 \omega^2 J} (I_1 + mhr) \left(\frac{R-r}{r} \right) \quad (s)$$

实现消振的条件为 $\varepsilon = 0$, 由 (s) 式可知此条件相当于

$$(I_1 + mr^2) \left(\frac{R-r}{r} \right)^2 - mh^2 \frac{\beta}{m^2} = 0 \quad (t)$$

或

$$\frac{I_1 + mr^2}{mr^2} = \frac{a}{(R-r)n^2} \quad (u)$$

令振子对自身中心之惯性半径为 ρ_c , 则条件 (u) 可简化为

$$\frac{\rho_c^2 + r^2}{r^2} = \frac{a}{(R-r)n^2} \quad (v)$$

这条件可作为设计消振器的依据。

3.4 变质量系统的 Lagrange 方程

现在研究质量可随时间而变的任意离散系统的动力学。随着航空、航天、机械等领域的技术发展, 这类问题愈来愈多, 愈来愈受到人们的重视。

设有由 N 个质点组成的离散系统, 在时刻 t , 第 i 个质点的质量为 $m_i (i=1, \dots, N)$; 在时刻 $t+dt$, 由质点分离的微粒质量为 dm_i , 系统中第 i 个质点的 Мещерский 方程*为:

$$-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = 0 \quad (i=1, \dots, N) \quad (3.4.1)$$

其中 \mathbf{r}_i 为质点的矢径, $\ddot{\mathbf{r}}_i$ 为质点的加速度, m_i 为质点的质量, \mathbf{F}_i 为作用在质点上的合力(包括约束力), \mathbf{R}_i 为反推力:

$$\mathbf{R}_i = \frac{dm_i}{dt} \mathbf{u}_i \quad (3.4.2)$$

其中 \mathbf{u}_i 为由质点分离的微粒相对于质点本身的速度, 在理想约束条件下, 由 (3.4.1) 可得到变质量系统的

* 见参考文献[3]。

d'Alembert-Lagrange 原理如下:

$$\sum_{i=1}^N (-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (3.4.3)$$

这里 \mathbf{F}_i 是主动力, 不包括理想约束力。现在将原理向广义坐标变换, 研究变质量系统动力学问题时需要引入特殊的求偏导数记号, 设系统位形由 n 个广义坐标 q_1, \dots, q_n 确定, 令 $\frac{\partial^*}{\partial \dot{q}_j}$ 和 $\frac{\partial^*}{\partial q_j}$ 分别表示把质量当作常数时对 \dot{q}_j 和对 q_j 的偏导数, $\frac{d^*}{dt}$ 表示把质量当作常数时对 t 的导数, 它们分别称为凝固偏导数和凝固导数, 于是有以下关系

$$\frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (3.4.4)$$

$$\frac{\partial^* T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \quad (3.4.5)$$

$$\frac{d^*}{dt} \frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (3.4.6)$$

利用 Lagrange 经典关系

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (3.4.7)$$

我们有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot d\mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{d^*}{dt} \frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial^* T}{\partial q_j} \right) \delta q_j \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

主动力的虚功可以像不变质量系统一样来处理:

$$\sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (3.4.9)$$

其中 Q_j 为广义力, 反推力的处理完全类似:

$$\sum_{i=1}^N R_i \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n R_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \Psi_j \delta q_j \quad (3.4.10)$$

其中 Ψ_j 为广义反推力。

将(3.4.8)至(3.4.10)式代入原理(3.4.3), 我们得到:

$$\sum_{j=1}^n \left(-\frac{d^*}{dt} \frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j + \Psi_j \right) \delta q_j = 0 \quad (3.4.11)$$

由于诸 δq_j 的独立性, 我们得变质量完整系统的 Lagrange 方程如下:

$$\frac{d^*}{dt} \frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial^* T}{\partial q_j} = Q_j + \Psi_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (3.4.12)$$

我们看到, 由于引入了凝固导数, 方程的推导过程和不变质量系统方程十分类似, 并未增加新的困难, 另外应注意的是, 在推导时是假定质量分离, 如果发生质量并入过程, 方程(3.4.12)仍然成立, 只不过相对速度 u_i 改变符号而已。

很容易将方程(3.4.12)作以下的推广, 首先是推广到准坐标下的变质量系统的 Lagrange 方程:

$$\frac{d^*}{dt} \frac{\partial^* T}{\partial \omega_i} - \frac{\partial^* T}{\partial \pi_i} + \sum_m \sum_k \gamma_{im}^k \frac{\partial^* T}{\partial \omega_k} = Q'_i + \Psi'_i \quad (3.4.13)$$

其中 Q'_i 及 Ψ'_i 分别为准坐标下的主动力及反推力:

$$Q'_i = \sum_{j=1}^n b_{ji} Q_j \quad \Psi'_i = \sum_{j=1}^n b_{ji} \Psi_j \quad (3.4.14)$$

b_{ji} 为联系广义速度与准速度之间关系的系数:

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} \omega_j \quad (i=1, \dots, n) \quad (3.4.15)$$

其次是推广到变质量自由刚体的动力学方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^*}{dt} \left\{ \frac{\partial^* T}{\partial v_o} \right\} + [\bar{\omega}] \left\{ \frac{\partial^* T}{\partial v_o} \right\} &= \{R\} + \{R_s\} \\ \frac{d^*}{dt} \left\{ \frac{\partial^* T}{\partial \omega} \right\} + [\bar{\omega}] \left\{ \frac{\partial^* T}{\partial \omega} \right\} + [\bar{v}_o] \left\{ \frac{\partial^* T}{\partial v_o} \right\} &= \{M_o\} + \{M_{s,o}\} \end{aligned} \right\} \quad (3.4.16)$$

其中 $\{R_s\}$ 及 $\{M_{s,o}\}$ 是反推力主向量列阵及对 O 点的反推力主矩列阵。

若对 q_j 及对 \dot{q}_j 求偏导数时将质量视为不变, 但对 t 求全导数时将质量视为可变, 则称为半凝固求导, 容易证明下述半凝固求导公式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d^*}{dt} \frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (3.4.17)$$

于是可得到以半凝固导数表示的 Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial^* T}{\partial q_j} = Q_j + \Phi_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (3.4.18)$$

其中

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^N (\mathbf{R}_i + m_i \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (j=1, \dots, n) \quad (3.4.19)$$

若对 q_j, \dot{q}_j 及对 t 求导时都考虑到质量的变化, 这种导数就称之为普通导数。容易证明下述关系:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial^* T}{\partial q_j} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial m_i}{\partial q_j} \quad (3.4.20)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (3.4.21)$$

于是, 以普通导数表示的 Lagrange 方程有如下形式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + P_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (3.4.22)$$

其中

$$P_j = \sum_{i=1}^N \left\{ (\mathbf{R}_i + \dot{\mathbf{m}}_i \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{1}{2} v_i^2 \frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{v_i^2}{2} \frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \right\}$$

$$(j=1, \dots, n) \quad (3.4.23)$$

半凝固导数及普通导数表示的 Lagrange 方程同样可推广至准坐标形式及自由刚体动力学方程。三种形式的方程在应用时以凝固导数形式最简单，半凝固导数形式次之，普通导数形式最复杂。

例题 3.4.1 一变质量质点，其质量 m 以任意规律变化，该质点用一条线绕在半径为 a 的固定圆柱上而成为一个摆。假设微粒的相对速度为零，质点在平衡位置时线长为 l ，不计线的质量，试建立摆的运动方程。

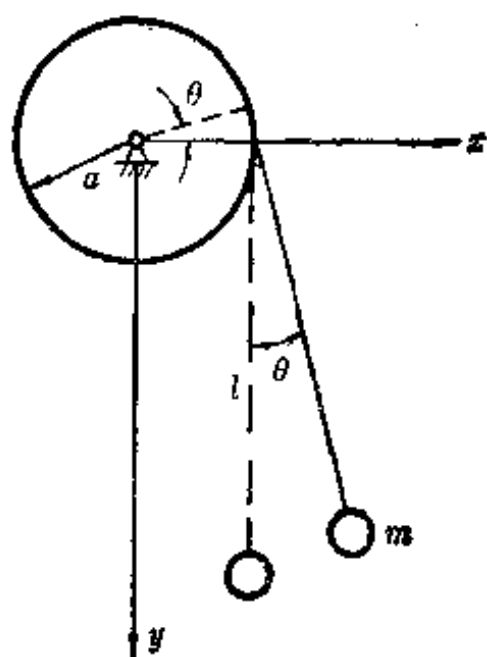


图 3.11

解 取 θ 为广义坐标，质点的动能为

$$T = \frac{1}{2} m (l + a\theta)^2 \dot{\theta}^2 \quad (a)$$

首先按凝固导数列方程, 由(a)有

$$\frac{\partial^* T}{\partial \dot{\theta}} = m(l + a\theta)^2 \dot{\theta} \quad (b)$$

$$\frac{d^*}{dt} \frac{\partial^* T}{\partial \dot{\theta}} = m(l + a\theta)^2 \ddot{\theta} + 2m(l + a\theta) \dot{\theta}^2 \quad (c)$$

$$\frac{\partial^* T}{\partial \theta} = m(l + a\theta) a \dot{\theta}^2 \quad (d)$$

由于无相对速度, 反推力 Φ_r 为零, 广义力的虚功之和为

$$-mg(l + a\theta) \sin \theta \delta \theta = Q_r \delta \theta \quad (e)$$

由此可求得广义力 Q_r 。将以上诸式代入 (3.4.12), 便得到摆的方程:

$$(l + a\theta) \ddot{\theta} + a \dot{\theta}^2 + g \sin \theta = 0 \quad (f)$$

现在再按半凝固导数求解。 $\frac{\partial^* T}{\partial \dot{\theta}}$ 及 $\frac{\partial^* T}{\partial \theta}$ 仍由(b)及(d)两式确定。 T 的半凝固导数为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^* T}{\partial \dot{\theta}} = m(l + a\theta)^2 \ddot{\theta} + 2m(l + a\theta) \dot{\theta}^2 + \underline{\underline{m(l + a\theta)^2 \dot{\theta}}} \quad (g)$$

准广义反推力 Φ_r 公式(3.4.19)中由于 $u=0$ 而化简为

$$\Phi_r = \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial \dot{\theta}} = m \dot{v} \cdot \frac{\partial r}{\partial \dot{\theta}} \quad (h)$$

其实这就是 $m\dot{v}$ 对 A 点之矩, 故有

$$\Phi_r = \underline{\underline{m(l + a\theta)^2 \dot{\theta}}} \quad (i)$$

将(d), (e), (g), (i)诸式代入(3.4.18), 注意双划线之项自动消去, 便得到和凝固导数解法相同的结果:

$$(l + a\theta) \ddot{\theta} + a \dot{\theta}^2 + g \sin \theta = 0 \quad (j)$$

最后, 当用普通导数列方程时, 由于质量 m 不是 θ 或 $\dot{\theta}$ 的函数, 故有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial^* T}{\partial \dot{\theta}}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial^* T}{\partial \theta} \quad (k)$$

$$P_\theta = \Phi_\theta = m(l + a\theta)^2 \dot{\theta}$$

当然仍旧得到相同的方程(f)。

例题 3.4.2 一纺织卷绕机构如图所示, 绕纱筒 2 由主动轮 1 带动以角速度 ω 转动, 筒轴支承在摆杆 3 上, 摆杆可绕 O_3 轴摆动, 在摆杆两端分别用刚度为 k_1 及 k_2 之弹簧联结在固定面上*。已知:

v ——纱的卷绕速度

σ ——纱的单位长度质量

r_0 ——空筒管半径

ρ ——纱的质量密度

H ——卷装的动程

I ——空筒管和摆杆 3 对摆动轴 O_3 的转动惯量

l_1, l_2 ——摆杆 3 的两臂长度

k_1, k_2 ——摆杆两端预压隔振弹簧的刚度

ε ——卷纱及卷纱筒的偏心距

试列出此系统在微振动时的运动方程。

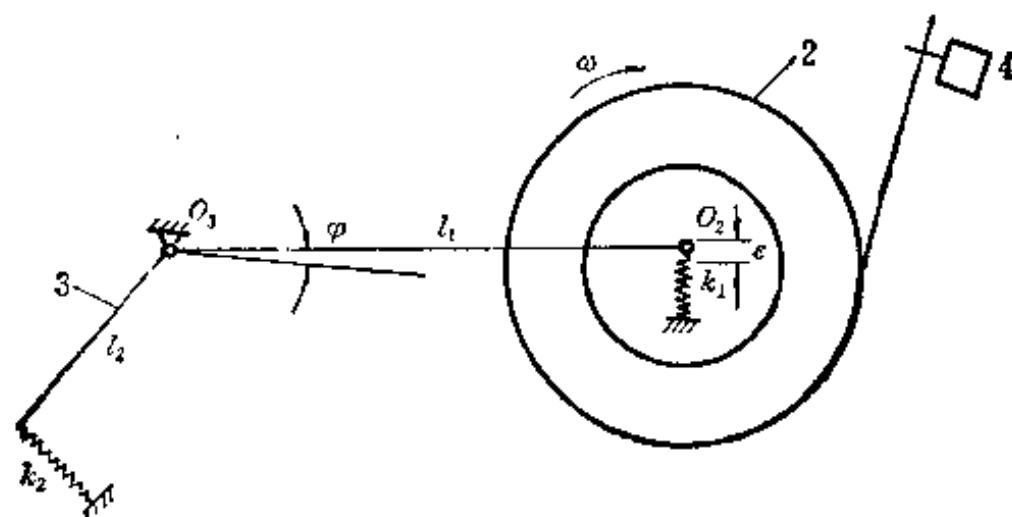


图 3.12

1——摩擦滚筒 2——绕丝筒管 3——摆杆, 4——导丝器

* 见参考文献[11]。

解: 在绕纱过程中, 卷筒质量不断增加, 显然是变质量系统, 当绕纱速度 v 一定时, 角速度 ω 实际上是随时间而变的, 但因其变化缓慢, 在较短时间内可认为是常数, 作为并入质量的纱丝, 其速度由卷进速度 v_1 及导丝速度 v_2 两项合成如图:

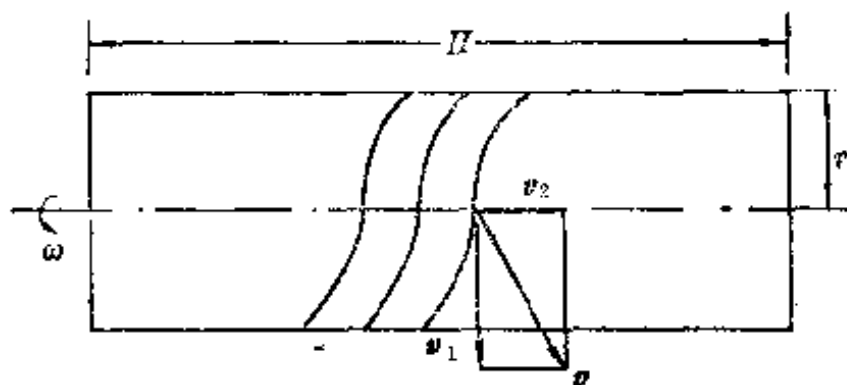


图 3.13

在这里, 导丝速度 v_2 正是纱对此机构的相对速度, 但这速度和轴线方向一致, 因此当以 φ 为广义坐标时, $m_i u_i$ 在虚位移上之元功为零:

$$\sum_{i=1}^N m_i u_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (a)$$

换言之, δr_i 是由摆杆及卷筒绕 O_3 之转动位移, 在机构平面内, 显然和速度 v_2 垂直, 故虚功为零。于是, 当以凝固导数表示此系统的运动方程时, 有以下形式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^* T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial^* T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (b)$$

其中摩擦轮所施之摩擦力矩和轴承中的阻力矩相抵消, 不出现在方程 (b) 中, 如以平衡位置作为 φ 的零点, 则系统的势能为

$$V = \frac{1}{2} (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \varphi^2 \quad (c)$$

卷纱的单位长度(沿行程方向)的体积为 $\frac{\sigma v t}{H \rho}$, 故有

$$\pi(r^2 - r_0^2) = \frac{\sigma v t}{\rho H} \quad (d)$$

因而任意时刻之半径为

$$r = \sqrt{r_0^2 + \frac{\sigma v t}{\pi \rho H}} \quad (e)$$

卷纱对 O_2 之转动惯量为

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{\sigma v t}{2} (r^2 + r_0^2) = \frac{\sigma v t}{2} \left(2r_0^2 + \frac{\sigma v t}{\pi \rho H} \right) \\ &= \sigma v t r_0^2 + \frac{(\sigma v t)^2}{\pi \rho H} \end{aligned} \quad (f)$$

系统的动能由作定轴转动的摆杆动能及作平面运动的卷纱体的动能之和。考虑到卷筒有一偏心距 e ，动能表达式为：

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 + \frac{\sigma v t}{2} (l_1 \dot{\phi} + e \omega \cos \omega t)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (I_0 + \sigma v t e^2) (\dot{\phi} + \omega)^2 \end{aligned} \quad (g)$$

通常偏心距 e 很小， $\sigma v t e^2$ 对于 I_0 而言可略去不计，将 (c)、(f)、(g) 代入 (b)，即得到卷纱系统的运动方程：

$$\begin{aligned} &\left[I + \sigma v t (r_0^2 + l_1^2) + \frac{1}{2} \frac{(\sigma v)^2}{\pi \rho H} t^2 \right] \ddot{\phi} + (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \phi \\ &= \varepsilon \sigma v t \omega^2 l_1 \sin \omega t \end{aligned} \quad (h)$$

这是一个变参数系统的非齐次线性方程，取无量纲时间变量 $\tau = \omega_0 t$ ，可将 (h) 简化为

$$\left(1 + \mu \tau + \frac{1}{2} \beta \mu^2 \tau^2 \right) \varphi'' + \varphi = \varepsilon^* v^2 \mu \tau \sin \tau \quad (i)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi'' &= \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} \\
 \mu &= \frac{\sigma v (r_0^2 + l_1^2)}{I \omega_0} \ll 1 \\
 \omega_0^2 &= \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{I} \\
 \beta &= \frac{I}{\pi \rho H (r_0^2 + l_1^2)^2} \\
 \varepsilon^* &= \frac{\varepsilon l_1}{r_0^2 + l_1^2} \\
 \nu &= \frac{\omega}{\omega_0}
 \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

于是方程(i)成为含有小参数 μ 的变系数方程,可用摄动法求近似解*。

3.5 带有柔性部件的系统动力学方程

在航天工程中,飞行器的天线、太阳帆板的伸展尺度往往大大超过本体,而这些部件又多是细长杆或薄壁结构,在飞行中这些部件的变形对系统的运行和稳定都有重要影响,在工业机械手及高速机械中某些部件发生显著的弹性变形时也是这样。这些问题的特点在于它们的力学模型既不是纯刚体也不是纯变形体,而是两类力学模型的耦合系统,这种耦合可以是同一物体内刚体运动和弹性振动的耦合,也可以是某些刚体的运动和另一些变形体的运动的耦合,本书在涉及变形体时只限于讨论最简单的柔性部件,即一维弹性杆件,但其方法可推广到任何柔性部件。

3.5.1 柔性部件的力学模型及动力学方程

任意弹性体在发生弹性振动时,其位移构成弹性体范围内的

* 见前引文献

连续场,因之,位移是弹性体内任一点变形前的坐标和时间变量的连续函数:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t) \quad (3.5.1)$$

假定 $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ 可在弹性体的空间 V 及 $t \geq 0$ 的时间中展成一致收敛级数:

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x, y, z) q_j(t) \quad (3.5.2)$$

其中

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k} \quad (3.5.3)$$

$$\phi_j = \phi_{jx} \mathbf{i} + \phi_{jy} \mathbf{j} + \phi_{jz} \mathbf{k} \quad (3.5.4)$$

函数族 ϕ_j 为任意选定的具有足够多阶导数的光滑函数族,此外还要求 ϕ_j 满足边界上的全部几何约束条件,在这里 $q_j(t)$ 可视为描述连续弹性体位形的广义坐标。理论上,作为无限多自由度的弹性体应有无限多个广义坐标: q_1, q_2, \dots ,但在实际计算中通常只取有限个 ϕ_j 及 $q_j (j=1, \dots, n)$,当 n 足够大时能够给出满足工程要求的精度。

现在我们将 Lagrange 方程推广到具有无限多自由度的弹性体, d'Alembert-Lagrange 原理可表为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^N (f_i - \rho \ddot{\mathbf{u}}_i) \Delta V_i \cdot \delta \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{t}_i \cdot \Delta S_i \cdot \delta \mathbf{u}_i \right] = 0 \quad (3.5.5)$$

这里,将弹性体分割为 N 个离散的微元(质点),当 $N \rightarrow \infty$ 时就由离散体过渡到连续体, f_i 指单位体积的体积力 (包括外力及弹性内力), t_i 指单位面积的表面力, ΔV_i 及 ΔS_i 分别指体积微元及表面面积微元, ρ 为质量密度。当 $n \rightarrow \infty$ 时, (3.5.5) 式成为

$$\int_V (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad (3.5.6)$$

由(3.5.2)式可知

$$\delta u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \delta q_j \quad (3.5.7)$$

$$\ddot{u} = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \ddot{q}_j \quad (3.5.8)$$

显然, 这样得到的虚位移 δu 是满足约束条件的。主动力的虚功为

$$\begin{aligned} \delta' W &= \int_V f \cdot \delta u dV + \int_S t ds \cdot \delta u \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_V f \cdot \phi_j dV + \int_S t \cdot \phi_j dS \right] \delta q_j \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

即广义力为

$$Q_j = \int_V f \cdot \phi_j dV + \int_S t \cdot \phi_j dS \quad (3.5.10)$$

惯性力的虚功为

$$-\int_V \rho \ddot{u} \cdot \delta u dV = - \sum_{j=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \int_V \rho \phi_j \cdot \phi_k dV \ddot{q}_k \right] \delta q_j \quad (3.5.11)$$

以上结果可利用系统的动能来简化, 动能表达式为

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u} \cdot \dot{u} dV = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_V \rho \phi_j \cdot \phi_k dV \right] \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (3.5.12)$$

由以上表达式可知

$$-\int_V \rho \ddot{u} \cdot \delta u dV = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \quad (3.5.13)$$

将 (3.5.10) 及 (3.5.13) 式代入原理 (3.5.6) 后可知, 对于任意虚位移 δu 而言, (3.5.6) 式能成立的条件为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots) \quad (3.5.14)$$

广义力 Q_j 可分解为两部分: 一般的外力 P_j 及弹性力, 而弹性力可由弹性势能 $V(q_1, q_2, \dots)$ 表达, 因之 (3.5.14) 式成为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = P_j \quad (j=1, 2, \dots) \quad (3.5.15)$$

这就是推广到弹性体的 Lagrange 方程, 现在以一维受弯杆件振动问题为例说明方程 (3.5.15)。杆中任一截面 x 处之位移 w 可表为

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j q_j(t) \quad (3.5.16)$$

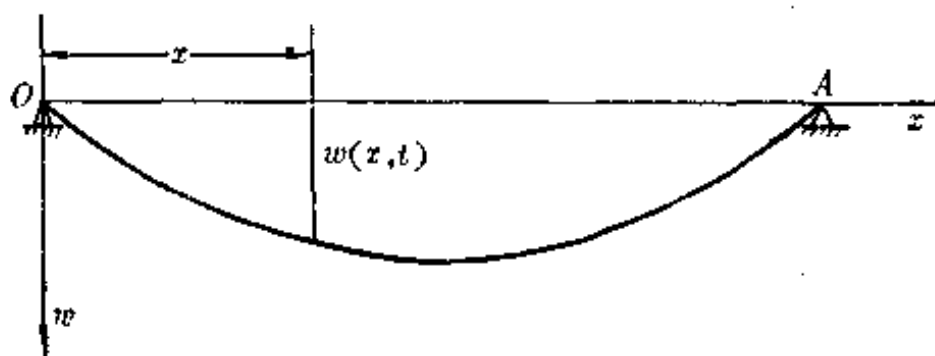


图 3.14

其中 $\phi_j(x)$ 为满足端点几何边界条件的任意函数族。例如以下两种函数族——三角函数与移位 Legendre 函数

$$\phi_j = \sin \frac{j\pi x}{l} \quad (j=1, 2, \dots)$$

$$\phi_j = P_j^{(k)}(2\xi - 1) \quad \left(\xi = \frac{x}{l}, \begin{matrix} k=1, 2, \dots \\ j=1, 2, \dots \end{matrix} \right)^*$$

都满足简支梁的几何边界条件, 都可作为可取函数, 杆件的动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho w^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.5.17)$$

* $P_j^{(k)}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{k}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n$

其中

$$m_{ij} = \int_0^l \rho \phi_i \phi_j dx \quad (3.5.18)$$

杆件的势能为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} q_i q_j \quad (3.5.19)$$

其中

$$k_{ij} = \int_0^l EI \phi_i'' \phi_j'' dx \quad (3.5.20)$$

将 T 及 V 的表达式代入 Lagrange 方程, 可得:

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_{ij} \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{\infty} k_{ij} q_i = P_j \quad (j=1, 2, \dots) \quad (3.5.21)$$

当函数族 $\phi_j(x)$ 直接取为梁的固有振动的振型函数时, 由于存在以下正交条件: *

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \rho \phi_i \phi_j dx &= \delta_{ij} \\ \int_0^l EI \phi_i'' \phi_j'' dx &= \omega_i^2 \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (3.5.22)$$

方程(3.5.21)成为一系列独立方程:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = P_i(t) \quad (i=1, 2, \dots) \quad (3.5.23)$$

在很多情况下, 由于振型函数的精确解不易得到, 而不得不取有限多个满足几何边界条件的近似函数 $\phi_i(x)$, 这种函数又称为试探函数, 杆件的位移可表为

$$w = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (3.5.24)$$

相应的 Lagrange 方程也是有限个形如(3.5.21)的方程。以上所

* 见季文美、方同、陈松淇,《机械振动》,科学出版社,1985年。

述方法其实就是用 Lagrange 方式表达的 Rayleigh-Ritz 变分解法, 在结构动力学中得到广泛的应用。

3.5.2 带有柔性部件的载体动力学方程

当载体中帶有一维柔性部件时, 柔性部件的弹性振动就是相对运动, 因之这类问题不过是 3.3 节所述问题的推广。设一维柔性部件的轴向变形(沿 Ox 轴方向)可略去不计, 只计 Oy 及 Oz 两个方向的弯曲变形。柔性部件的相对位移 $u(x, t)$ 可用近似模态函数 $\phi_i(x)$ 表示如下:

$$u = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) = \sum_{i=1}^n (\phi_{yi}(x) \mathbf{i}_2 + \phi_{zi}(x) \mathbf{i}_3) q_i(t) \quad (3.5.25)$$

现在仍将全部动能分解为 T_e , T_m 及 T_r 三部分, 其中

$$T_e = \frac{1}{2} [M v_o^2 + 2M (\mathbf{v}_o \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{r}'_o + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}] \quad (3.5.26)$$

式中第二、三两项都涉及到柔性部件, 分别讨论如下:

设柔性杆上任一点未变形前的位置对于固结在载体上的参考系 $Oxyz$ 而言可用 ρ 表示, 则发生相对运动后的矢径 \mathbf{r}' 为

$$\mathbf{r}' = \rho + \mathbf{u} \quad (3.5.27)$$

对于载体而言, 任一点的 \mathbf{r}'_i 只含 ρ_i , 不含相对位移, 于是我们有

$$\begin{aligned} M \mathbf{r}'_o &= M \rho_o + \int \mathbf{u} dm \\ &= M \rho_o + \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i \end{aligned} \quad (3.5.28)$$

其中

$$\alpha_i = \int \phi_i dm \quad (3.5.29)$$

为方便计, 将 (3.5.28) 式进一步表为矩阵形式:

$$M\{\mathbf{r}'_o\} = M\{\rho_o\} + \sum_{i=1}^n \{\alpha_i\} q_i \quad (3.5.30)$$

T_o 表达式中的第二项可表为

$$\begin{aligned} 2M\mathbf{r}'_o \cdot (\mathbf{v}_o \times \boldsymbol{\omega}) &= 2\{\mathbf{v}_o\}^T [\tilde{\boldsymbol{\omega}}] [M\{\rho_o\} + \sum_{i=1}^n \{\alpha_i\} q_i] \\ &= 2\{\boldsymbol{\omega}\}^T [\dot{M}[\tilde{\rho}_o] + \sum_{i=1}^n [\tilde{\alpha}] q_i] \{\mathbf{v}_o\} \end{aligned} \quad (3.5.31)$$

其中

$$[\tilde{\mathbf{v}}_o] = \begin{bmatrix} 0 & -v_{oz} & v_{oy} \\ v_{oz} & 0 & -v_{ox} \\ -v_{oy} & v_{ox} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.32)$$

$[\tilde{\rho}_o]$ 及 $[\tilde{\alpha}]$ 之定义类似。 T_o 表达式中第三项可表为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2} \int [\boldsymbol{\omega} \times (\rho + \mathbf{u})] \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\rho + \mathbf{u})] dm \\ &= \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\omega}\}^T [I] \{\boldsymbol{\omega}\} + \{\boldsymbol{\omega}\}^T \int [\tilde{\rho}]^T [\tilde{\mathbf{u}}] dm \{\boldsymbol{\omega}\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\omega}\}^T \int [\tilde{\mathbf{u}}]^T [\tilde{\mathbf{u}}] dm \{\boldsymbol{\omega}\} \end{aligned} \quad (3.5.33)$$

其中

$$[\tilde{\rho}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix} \quad [\tilde{\mathbf{u}}] = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & 0 \\ -u_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.34)$$

$$[I] = \int [\tilde{\rho}]^T [\tilde{\rho}] dm$$

$[I]$ 代表未变形状态下全部系统对 O 点之惯性张量矩阵。 $[\tilde{\mathbf{u}}]$ 又可利用广义坐标表示如下:

$$[\tilde{\mathbf{u}}] = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & -\phi_{zi} & \phi_{yi} \\ \phi_{zi} & 0 & 0 \\ -\phi_{yi} & 0 & 0 \end{bmatrix} q_i = \sum_{i=1}^n [\tilde{\phi}_i] q_i \quad (3.5.35)$$

于是(3.5.33)式可进一步化为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = & \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\omega}\}^T \left[[\mathbf{I}] + 2 \sum_{i=1}^n \left\{ [\boldsymbol{\rho}]^T [\boldsymbol{\phi}_i] dm q_i + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ [\boldsymbol{\phi}_i]^T [\boldsymbol{\phi}_j] dm q_i q_j \right\} \right] \{\boldsymbol{\omega}\} \end{aligned} \quad (3.5.36)$$

令

$$\int [\boldsymbol{\rho}]^T [\boldsymbol{\phi}_i] dm = [A_i] \quad (3.5.37)$$

$$\int [\boldsymbol{\phi}_i]^T [\boldsymbol{\phi}_j] dm = [B_{ij}] \quad (3.5.38)$$

于是(3.5.36)式可进一步化为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = & \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\omega}\}^T \left[[\mathbf{I}] + 2 \sum_{i=1}^n [A_i] q_i + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [B_{ij}] q_i q_j \right] \{\boldsymbol{\omega}\} \end{aligned} \quad (3.5.39)$$

将(3.5.30)及(3.5.39)代入(3.5.26)式, 可求得 T_e 的表达式如下:

$$\begin{aligned} T_e = & \frac{1}{2} M \{v_o\}^T \{v_o\} + \{v_o\}^T [\tilde{\boldsymbol{\omega}}] \left[M \{\rho_c\} + \sum_{i=1}^n \{\alpha_i\} q_i \right] + \\ & + \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\omega}\}^T \left[[\mathbf{I}] + 2 \sum_{i=1}^n [A_i] q_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [B_{ij}] q_i q_j \right] \{\boldsymbol{\omega}\} \end{aligned} \quad (3.5.40)$$

T_m 的表达式可用广义坐标表达如下:

$$\begin{aligned} T_m = & \{v_o\}^T \{K_r\} + \{\boldsymbol{\omega}\}^T \{G_r^o\} \\ = & \{v_o\}^T \int \{\dot{\mathbf{u}}\} dm + \{\boldsymbol{\omega}\}^T \int \left\{ [[\boldsymbol{\rho}]] + [[\tilde{\mathbf{u}}]] \right\} \{\dot{\mathbf{u}}\} dm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{v_0\}^T \sum_{i=1}^n \{\alpha_i\} \dot{q}_i + \{\omega\}^T \sum_{i=1}^n \{\beta_i\} \dot{q}_i \\
&\quad + \{\omega\}^T \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{\gamma_{ij}\} q_i \dot{q}_j
\end{aligned} \tag{3.5.41}$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
\{\alpha_i\} &= \int \{\phi_i\} dm \\
\{\beta_i\} &= \int [\bar{p}] \{\phi_i\} dm \\
\{\gamma_{ij}\} &= \int [\bar{\phi}_i] \{\phi_j\} dm, \quad \{\gamma_{ij}\} = -\{\gamma_{ji}\}
\end{aligned} \right\} \tag{3.5.42}$$

若令

$$\{e_i\} = \{\beta_i\} + \sum_{j=1}^n \{\gamma_{ij}\} q_j \tag{3.5.43}$$

则(3.5.41)式可简化为

$$T_m = \{v_0\}^T \sum_{i=1}^n \{\alpha_i\} \dot{q}_i + \{\omega\}^T \sum_{i=1}^n \{e_i\} \dot{q}_i \tag{3.5.44}$$

T_r 可表为

$$\begin{aligned}
T_r &= \frac{1}{2} \int \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dm = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int \{\phi_i\}^T \{\phi_j\} dm \dot{q}_i \dot{q}_j \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j
\end{aligned} \tag{3.5.45}$$

其中

$$m_{ij} = \int \{\phi_i\}^T \{\phi_j\} dm \tag{3.5.46}$$

柔性杆的应变势能为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z [u''_y(x)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI_y [u''_x(x)]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j \quad (3.5.47)$$

其中

$$k_{ij} = \int_0^l EI_z \phi''_{yi} \phi''_{yj} dx + \int_0^l EI_y \phi''_{zi} \phi''_{zj} dx \quad (3.5.48)$$

将以上诸式代入载体运动的第一组方程:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial v_o} \right\} + [\tilde{\omega}] \left\{ \frac{\partial T}{\partial v_o} \right\} = \{R\} \quad (3.5.49)$$

由于

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial T}{\partial v_o} \right\} &= M \{v_o\} + [\tilde{\omega}] \left[M \{\rho_o\} + \sum_{i=1}^n \{\alpha_i\} q_i \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \{\alpha_i\} \dot{q}_i \end{aligned} \quad (3.5.50)$$

(3.5.49)式便成为

$$\begin{aligned} &M \{\dot{v}_o\} + M [\tilde{\omega}] \{v_o\} + [\dot{\tilde{\omega}}] \left[M \{\rho_o\} + \sum_{i=1}^n \{\alpha_i\} q_i \right] \\ &\quad + 2[\tilde{\omega}] \sum_{i=1}^n \{\alpha_i\} \dot{q}_i + [\tilde{\omega}]^2 \left[M \{\rho_o\} + \sum_{i=1}^n \{\alpha_i\} q_i \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \{\alpha_i\} \ddot{q}_i = \{R\} \end{aligned} \quad (3.5.51)$$

左端各项意义如下:第一、二两项为系统随 $Oxyz$ 参考系之 O 点平移时,总动量的时间导数,第三、五两项相当于牵连惯性力中的转动惯性力及离心惯性力的主向量,第四项相当于科氏惯性力的主向量,第六项是由于相对运动带来的系统动量的附加变化率。

载体运动的第二组方程为:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \omega} \right\} + [\tilde{\omega}] \left\{ \frac{\partial T}{\partial \omega} \right\} + [\tilde{v}_o] \left\{ \frac{\partial T}{\partial v_o} \right\} = \{M_o\} \quad (3.5.52)$$

由于

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \omega} \right\} = & \left[M[\dot{p}_o] + \sum_{i=1}^n [\alpha_i] q_i \right] \{v_o\} \\ & + \left[[I] + 2 \sum_{i=1}^n [A_i] q_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [B_{ij}] q_i q_j \right] \{\omega\} + \sum_{i=1}^n \{\beta_i\} \dot{q}_i \end{aligned} \quad (3.5.53)$$

将 $\left\{ \frac{\partial T}{\partial v_o} \right\}$ 及 $\left\{ \frac{\partial T}{\partial \omega} \right\}$ 的表达式 (3.5.50) 及 (3.5.53) 代入 (3.5.52) 式后, 略去关于 q_i 的二阶小量便得到以下方程组:

$$\begin{aligned} & \left[[I] + 2 \sum_{i=1}^n [A_i] q_i \right] \{\omega\} + 2 \sum_{i=1}^n [A_i] \dot{q}_i \{\omega\} + \left[M[\dot{p}_o] \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^n [\alpha_i] q_i \right] \{v_o\} + \sum_{i=1}^n \{\beta_i\} \ddot{q}_i + [\dot{\omega}] [I] \\ & \quad + 2 \sum_{i=1}^n [A_i] q_i \{\omega\} + \{\dot{\omega}\} \sum_{i=1}^n \{\beta_i\} \dot{q}_i + \left[M[\dot{p}_o] \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^n [\alpha_i] q_i \right] [\dot{\omega}] \{v_o\} = \{M_o\} \end{aligned} \quad (3.5.54)$$

各项意义如下: 第一、五两项之和为牵连运动中对 O 点之动量矩变化率, 第二、六两项之和构成科氏惯性力之主矩, 第三、七两项之和表示牵连平动惯性力之主矩, 第四项表示由于相对运动带来的动量矩附加变化率。

柔性部件的相对运动方程为

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right\} - \left\{ \frac{\partial T}{\partial q} \right\} + \left\{ \frac{\partial V}{\partial q} \right\} = \{Q\} \quad (3.5.55)$$

由 (3.5.44) 式及 (3.5.45) 式可知

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \{v_o\}^T \{\alpha_i\} + \{\omega\}^T \{\beta_i\} + \{\omega\}^T \sum_{j=1}^n \{\gamma_{ji}\} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_j \quad (3.5.56)$$

故有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} &= \{\dot{v}_o\}^T \{\alpha_i\} + \{\dot{\omega}\}^T \{\beta_i\} + \{\dot{\omega}\}^T \sum_{j=1}^n \{\gamma_{ji}\} \dot{q}_j \\ &\quad + \{\omega\}^T \sum_{j=1}^n \{\gamma_{ji}\} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j \end{aligned} \quad (3.5.57)$$

又

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_i} &= \{v_o\}^T [\bar{\omega}] \{\alpha_i\} + \{\omega\}^T \left[[A_i] + \sum_{j=1}^n [B_{ij}] q_j \right] \{\omega\} \\ &\quad + \{\omega\}^T \sum_{j=1}^n \{\gamma_{ji}\} \dot{q}_j \end{aligned} \quad (3.5.58)$$

将以上诸式代入(3.5.55)式,可得柔性部件的相对运动方程如下:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j + \{\dot{v}_o\}^T \{\alpha_i\} + \{\dot{\omega}\}^T \{\beta_i\} + \{\dot{\omega}\}^T \sum_{j=1}^n \{\gamma_{ji}\} \dot{q}_j - \\ - 2\{\omega\}^T \sum_{j=1}^n \{\gamma_{ji}\} \dot{q}_j - \{v_o\}^T [\bar{\omega}] \{\alpha_i\} - \{\omega\}^T \left[[A_i] \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^n [B_{ij}] q_j \right] \{\omega\} + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j = Q_j \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (3.5.59)$$

各项意义如下:第一项为纯相对运动引起之广义惯性力,第二、六两项为由平动加速度引起之广义惯性力,第三、四两项为广义转动惯性力,第五项为广义科氏惯性力,第七项为广义离心惯性力,第八项为广义弹性力。

在处理实际问题中并不一定要去套用上述方程的具体形式, 还是从基本能量函数并按载体及被载系统建立方程的基本原理出发, 进行推导为宜, 见以下例题。

例题 3.5.1 带有天线的人造卫星如图所示, 天线可视为固结在卫星体上的悬臂梁, 卫星体可视为刚体。设天线长度为 l , 单位长度质量为 ρ , 抗弯刚度为 EI , 卫星为以天线为轴线的对称刚体, 其质量为 m_A , 对通过质心 A 且与飞行平面正交之轴之转动惯量为 I_A , 卫星质心至天线固结点之距离为 b , 仅考虑在平面内的飞行, 试列出此系统的运动方程*。

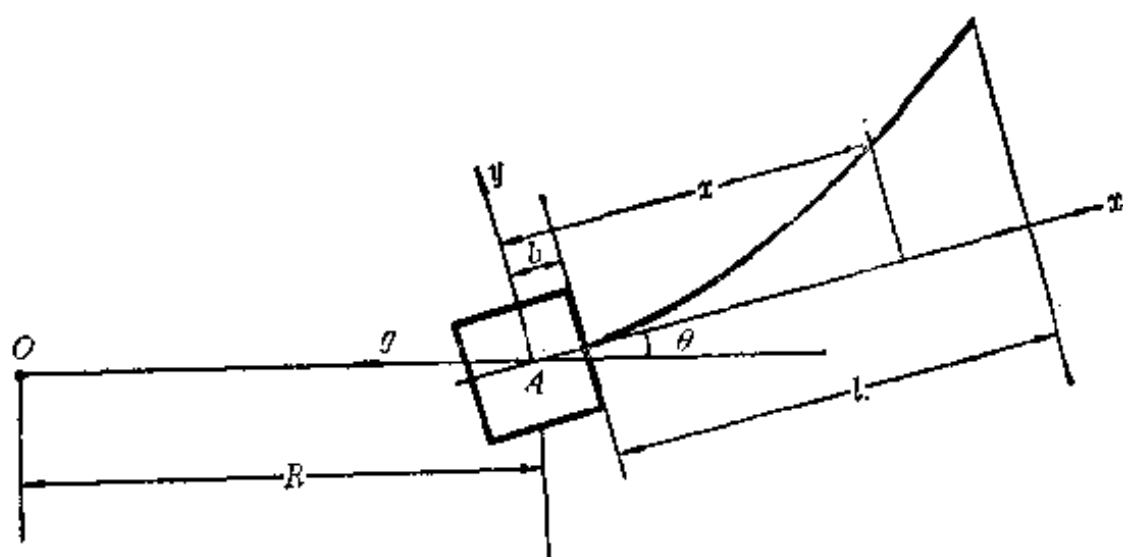


图 3.15

解 将坐标系 Axy 固结在卫星体上, 其中 Ax 轴与天线的未变形状态重合, 卫星体的动能为

$$T_A = \frac{m_A}{2} (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + \frac{1}{2} I_A \omega^2 \quad (a)$$

天线的动能可分为牵连运动及相对运动部分, 其牵连运动部分的动能为

$$T_{ne} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \{ [\dot{y}_A + \omega(b+x)]^2 + [\dot{x}_A - \omega y]^2 \} dx$$

* 见参考文献[26]

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} m_B (\dot{y}_A^2 + \dot{x}_A^2) + \omega \dot{y}_A \int_0^l \rho (b+x) dx - \omega \dot{x}_A \int_0^l \rho y dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \rho y^2 dx + \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \rho (b+x)^2 dx \quad (b)
\end{aligned}$$

假设天线的相对运动由以下函数来表达:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (c)$$

引进下列记号:

$$\begin{aligned}
m_B &= \int_0^l \rho dx, & e_B &= \int_0^l \rho x dx, & I_B &= \int_0^l \rho x^2 dx, \\
E_i &= \int_0^l \rho \phi_i dx, & F_i &= \int_0^l \rho x \phi_i dx, & G_{ij} &= \int_0^l \rho \phi_i \phi_j dx
\end{aligned}$$

于是 T_{B*} 可表为以下形式:

$$\begin{aligned}
T_{B*} &= \frac{1}{2} m_B (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + \omega \dot{y}_A [b m_B + e_B] - \omega \dot{x}_A \sum_{i=1}^n E_i q_i \\
&\quad + \frac{1}{2} \omega^2 [b^2 m_B + 2b e_B + I_B] + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{ij} q_i q_j \quad (d)
\end{aligned}$$

将(a), (d)两式相加, 我们有

$$\begin{aligned}
T_* &= \frac{1}{2} (m_A + m_B) (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + \frac{1}{2} (I_A + I_B + b^2 m_B + 2b e_B) \omega^2 \\
&\quad + \omega \dot{y}_A (b m_B + e_B) - \omega \dot{x}_A \sum_{i=1}^n E_i q_i - \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{ij} q_i q_j \quad (e)
\end{aligned}$$

混合动能为

$$\begin{aligned}
T_m &= v_{Ay} K_y^* + \omega G_O^* \\
&= \dot{y}_A \int_0^l \rho \dot{y} dx + \omega \int_0^l \rho \dot{y} (b+x) dx \\
&= (\dot{y}_A + \omega b) \sum_{i=1}^n E_i \dot{q}_i + \omega \sum_{i=1}^n F_i \dot{q}_i \quad (f)
\end{aligned}$$

相对动能为

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (g)$$

系统的动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} - \omega \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_A} &= R_x \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_A} + \omega \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} &= R_y \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} + \dot{x}_A \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_A} - \dot{y}_A \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} &= M_A \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} &= Q_j \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

先求出以下导数:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} = (m_A + m_B) \dot{x}_A - \omega \sum_{i=1}^n E_i q_i \quad (i)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} = (m_A + m_B) \ddot{x}_A - \omega \sum_{i=1}^n E_i \dot{q}_i - \dot{\omega} \sum_{i=1}^n E_i q_i \quad (j)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_A} = (m_A + m_B) \dot{y}_A + \omega (b m_B + e_B) + \sum_{i=1}^n E_i \dot{q}_i \quad (k)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_A} = (m_A + m_B) \ddot{y}_A + \dot{\omega} (b m_B + e_B) + \sum_{i=1}^n E_i \ddot{q}_i \quad (l)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \omega} &= (I_A + I_B + b^2 m_B + 2b e_B) \omega + \dot{y}_A (b m_B + e_B) - \dot{x}_A \sum_{i=1}^n E_i q_i \\ &+ \omega \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{ij} q_i q_j + b \sum_{i=1}^n E_i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n F_i \dot{q}_i \end{aligned} \quad (m)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} = (I_A + I_B + b^2 m_B + 2b e_B) \dot{\omega} + \ddot{y}_A (b m_B + e_B)$$

$$\begin{aligned}
& -\ddot{x}_A \sum_{i=1}^n E_i q_i - \dot{x}_A \sum_{i=1}^n E_i \dot{q}_i + \omega \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{ij} q_i q_j \\
& + 2\omega \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + b \sum_{i=1}^n E_i \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^n F_i \ddot{q}_i \quad (n)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = -\omega \dot{x}_A E_i + \omega^2 \sum_{j=1}^n G_{ij} q_j \quad (o)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = (\dot{y}_A + \omega b) E_i + \omega F_i + \sum_{j=1}^n G_{ij} \dot{q}_j \quad (p)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \dot{y}_A E_i + \omega b E_i + \omega F_i + \sum_{j=1}^n G_{ij} \ddot{q}_j \quad (q)$$

天线的应变势能为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI (y'')^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{ij} q_i q_j \quad (r)$$

其中

$$H_{ij} = \int_0^l EI \phi_i'' \phi_j'' dx \quad (s)$$

将以上诸式代入方程组(h)中,就得到全部运动方程如下:

$$\left. \begin{aligned}
& (m_A + m_B) (\ddot{x}_A - \omega \dot{y}_A) - 2\omega \sum_{i=1}^n E_i \dot{q}_i - \omega \sum_{i=1}^n E_i q_i \\
& \quad - \omega^2 (b m_B + e_B) = R_x \\
& (m_A + m_B) (\ddot{y}_A - \omega \dot{x}_A) + \omega (b m_B + e_B) \\
& \quad - \omega^2 \sum_{i=1}^n E_i q_i + \sum_{i=1}^n E_i \ddot{q}_i = R_y \\
& (I_A + I_B + b^2 m_B + 2b e_B) \ddot{\omega} + (\dot{y}_A + \omega \dot{x}_A) (b m_B + e_B) \\
& \quad - (\dot{x}_A - \omega \dot{y}_A) \sum_{i=1}^n E_i q_i + \sum_{i=1}^n (b E_i + F_i) \ddot{q}_i \\
& \quad = M_A \\
& \sum_{j=1}^n G_{ij} \ddot{q}_j + \omega (b E_i + F_i) + (\dot{y}_A + \omega \dot{x}_A) E_i \\
& \quad - \omega^2 \sum_{j=1}^n G_{ij} q_j + \sum_{j=1}^n H_{ij} q_j = Q_i \quad (i=1, \dots, n)
\end{aligned} \right\} \quad (t)$$

为了完全列出运动方程, 还需分析以上诸式右端的广义力, 这些力主要是万有引力和控制力, 以下着重论述引力的计算。

设卫星中心至引力中心之距离为 R , x 轴和 OA 连线夹角为 θ , 则引力主向量为

$$F_A = -\frac{Gm_A m_O}{R^2} (\cos\theta \mathbf{e}_1 - \sin\theta \mathbf{e}_2) = -\frac{\gamma m_A}{R^2} (\cos\theta \mathbf{e}_1 - \sin\theta \mathbf{e}_2) \quad (u)$$

其中 \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2 分别为沿 Ax 轴及 Ay 轴的单位向量。在平面运动情况下, 只需求引力对 Az 轴之主矩, 其表达式为*

$$T_A = \frac{3\gamma m_A}{R^3} (I_2 - I_1) \xi \eta = -\frac{3\gamma m_A}{R^3} (I_2 - I_1) \cos\theta \sin\theta \quad (v)$$

其中 ξ 及 η 分别为 \overrightarrow{OA} 在 Ax 轴及 Ay 轴上的投影, 引力中心对柔性杆 B 也有作用, 其作用在微元上的引力为

$$\begin{aligned} dF_B &= \gamma \rho (p^2)^{-3/2} p dx = dF_{Bx} \mathbf{e}_1 + dF_{By} \mathbf{e}_2 \\ &= \gamma \rho [(R \cos\theta + b + x)^2 + (R \sin\theta - y)^2]^{-3/2} [- (R \cos\theta \\ &\quad + b + x) \mathbf{e}_1 + (R \sin\theta - y) \mathbf{e}_2] dx \\ &\approx \frac{\gamma \rho}{R^3} \left(1 - 3 \cos\theta \frac{b+x}{R} + 3 \frac{y}{R} \right) [- (R \cos\theta + b + x) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (R \sin\theta - y) \mathbf{e}_2] dx \\ &= \frac{\gamma \rho}{R^2} \left\{ \left[-\cos\theta + \frac{(b+x)(3\cos^2\theta - 1) - 3y \sin\theta \cos\theta}{R} \right] \mathbf{e}_1 \right. \\ &\quad \left. + \left[\sin\theta - \frac{3(b+x) \sin\theta \cos\theta - y(1 - 3\sin^2\theta)}{R} \right] \mathbf{e}_2 \right\} \quad (w) \end{aligned}$$

其中略去了关于 $\frac{b+x}{R}$ 及 $\frac{y}{R}$ 的二阶小量。天线上任一点的虚位移为

* 见第一章 1.7.3 节

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta x_A - \sum_{i=1}^n \phi_i q_i \delta \varphi \\ \delta y &= \delta y_A + (b+x) \delta \varphi + \sum_{i=1}^n \phi_i \delta q_i \end{aligned} \right\} (x)$$

故广义力为

$$\left. \begin{aligned} R_{Gx} &= \int dF_{Bx} - \frac{\gamma m_A}{R^2} \cos \theta \\ R_{Gy} &= \int dF_{By} + \frac{\gamma m_A}{R^2} \sin \theta \\ M_{GA} &= - \left[\sum_{i=1}^n \phi_i q_i \int dF_{Bx} + \int (b+x) dF_{By} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\gamma m_A}{R^3} (I_2 - I_1) \cos \sin \theta \right] \\ Q_i &= \int \phi_i dF_{By} \end{aligned} \right\} (y)$$

将(w)式中的 dF_{Bx} , dF_{By} 代入(y)式, 即得到广义引力的最后结果:

$$\left. \begin{aligned} R_{Gx} &= \frac{\gamma}{R^2} \left[-(m_A + m_B) \cos \theta - \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)(bm_B + e_B)}{R} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{R} \sum_{i=1}^n E_i q_i \right] \\ R_{Gy} &= \frac{\gamma}{R^2} \left[(m_A + m_B) \sin \theta - \frac{3 \sin \theta \cos \theta (bm_B + e_B)}{R} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 \sin^2 \theta - 1}{R} \sum_{i=1}^n E_i q_i \right] \\ M_{GA} &= \frac{\gamma}{R^2} \left\{ (bm_B + e_B) \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(I_1 - I_2 - b^2 m_B - 2be_B - I_B) \sin \theta \cos \theta}{R} \right\} \end{aligned} \right\} (z)$$

$$Q_i = \frac{\gamma}{R^2} \left[E_i \sin \theta - \frac{3(bE_i + F_i) \sin \theta \cos \theta}{R} + \frac{3 \sin^2 \theta - 1}{R} \sum_{j=1}^n G_{ij} q_j \right] + \sum_{i=1}^n \left[E_i \cos \theta + \frac{3(bE_i + F_i)(1 - 2 \cos^2 \theta)}{R} \right] q_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

本问题在 T. R. Kane 等人的著作中是用他本人所倡导的 Kane 方法进行推导的, 本书则是用 Lagrange 方法推导, 读者可以自行比较两种方法的特点。

现在讨论一种特殊情况。假定 $\dot{x}_A = \dot{y}_A = \omega = 0$, (即卫星在圆轨道上匀速运动, 天线轴沿轨道半径方向) 且除引力外不受其它外力, 并假定 $\theta \equiv 0$ (Ax 轴由地球指向卫星), 则方程 (t) 的最后一组方程简化为自由振动方程:

$$\sum_{j=1}^n G_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \left(H_{ij} - \omega^2 G_{ij} + \frac{\gamma}{R^3} G_{ij} \right) q_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\alpha)$$

可见, 卫星的转动将使柔性杆的固有频率降低, 而引力将使固有频率提高。

3.6 机电系统的 Lagrange-Maxwell 方程

所谓机电系统是指机械系统与电磁系统耦合起来的系统, 在这种耦合系统中不仅有机械能及电磁能的变化, 而且还发生这两种能量的互相交换。这类系统在工程技术中有极其广泛的背景, 如电力拖动设备, 电声系统, 自动控制系统, 机械量的电测仪表等等。这类系统的动力学方程于 1873 年由 Maxwell 提出, 由于无论对机械部分及电磁部分都用 Lagrange 方式写成同一数学形式, 所以称为 Lagrange-Maxwell 方程。

3.6.1 电路系统的广义回路及基本方程

在分析力学中,我们常将物体的变形作为次要因素忽略不计而建立了以有限个参数描述其状态的离散系统模型;即使需要考虑物体的变形,如上节所说的那样,我们仍然可采用具有有限个参数的离散化模型以代替具有分布参数的系统。在建立电磁系统的物理模型时也有类似的情形。实际发生的电磁现象是电磁场随时间的变化过程,因而本质上是具有分布参数的系统;但在电路及磁路系统中当导线的截面尺寸远小于其长度时,磁感应与电流各自沿导线横截面的差异可略去不计。此外,由于电磁波的波速和光速相同($c=3\times 10^8\text{m/s}$),导线长度 l 总是有限的,在有交变电流通过时,其周期 T 总能满足条件 $T\gg\frac{l}{c}$ 。基于以上实际情况,在电路系统中可采用具有有限参数(如电阻、电感、电容等)的物理模型。

为描述机械系统的位形,我们根据系统的约束条件采用有限个独立参数 q_1, \dots, q_n ,在电路系统中可以取电路中各段导线(两个结点之间的导线)的电荷 e_k 或电流 $i_k=\dot{e}_k$ 来描述电路状态。但这些电流间不是独立的,它们必须满足所有各结点处电流之和为零这样的约束条件。利用了这些约束条件后,我们可以选出独立电荷 e_1, \dots, e_m^* 或独立电流 i_1, \dots, i_m 作为描述电路的基本变量,它们起了和广义坐标类似的作用。一个电路系统如有 m 个独立电流或广义电流,我们就说该电路系统具有 m 个自由度,它们和具有 n 个自由度的机械系统的组合,就构成一个具有 $m+n$ 个自由度的机电耦合系统。

现在我们来建立广义回路的概念。从如图 3.16 所示的电路系统中可以看出,一个复杂电路总可以分解成若干个独立电路,这

* 电荷的通用符号为 q ,但为了避免和广义坐标混淆,本书改用 e 。

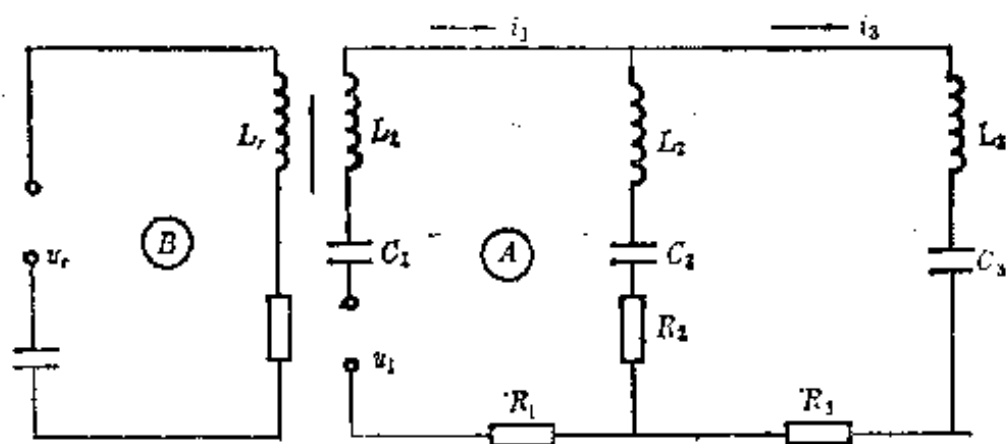


图 3.16

些独立电路之间除互感效应外没有其它电学量的依存关系。图中所示的就是有互感联系的两个独立电路④和⑤。现在着重研究电路④，这个电路只有二个独立电流，我们以后称为广义电流。如取 i_1 及 i_2 作为广义电流，则 i_3 由以下约束方程所决定：

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (3.6.1)$$

现在引入电流的任何满足约束条件的变分，显然独立的电流变分只有两个： δi_1 及 δi_2 ，如取 $\delta i_1 \neq 0, \delta i_2 = 0$ ，则得到一个有电流变分的回路 GL_1 ，如取 $\delta i_2 \neq 0, \delta i_1 = 0$ ，则得到另一个有电流变分的回路 GL_2 如下图所示。推而广之，我们得到以下概念：电路系统中任一广义电流变分 $\delta i_k \neq 0$ ，而其余广义电流之变分皆为零都对应一个简单回路 GL_k ，显然，一个电路的广义回路数和电路的自由度数是一致的，不难看出，当取不同的广义电流时，广义回路可能不相同，读者试取 i_1 及 i_2 作为广义电流，并作相应的广义回路，比较有何区别。

电容极板上储存的静电能为

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C} \quad (3.6.2)$$

其中 e 为极板上的电荷， C 为电容。上式变分结果为

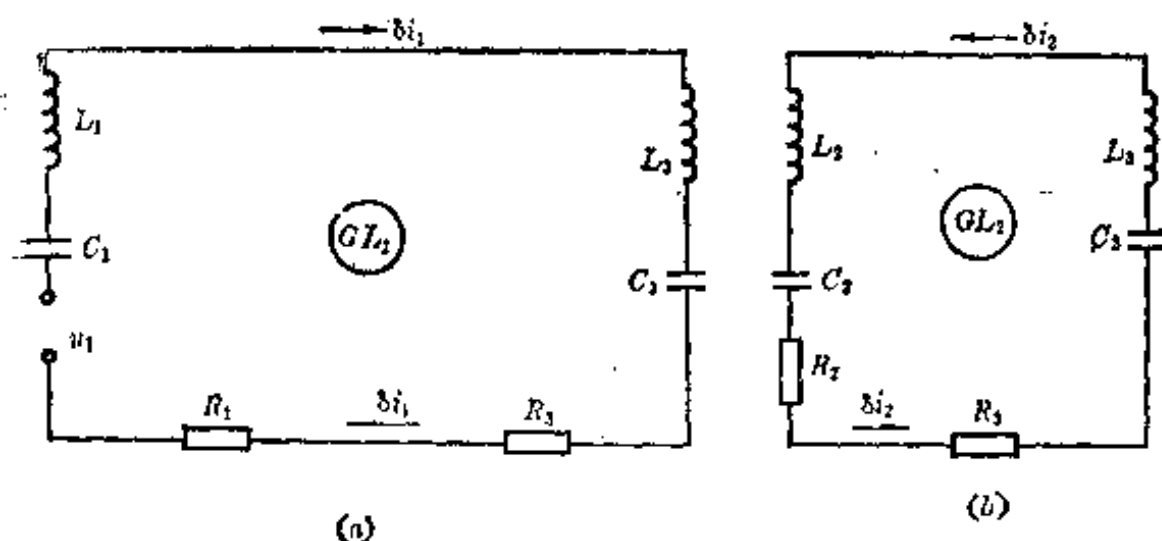


图 3.17

$$\delta' W_e = \frac{\partial W_e}{\partial e} \delta e = \frac{e}{C} \delta e^* \quad (3.6.3)$$

但我们知道比值 $\frac{e}{C}$ 为电容器两极板的电位差

$$u = \frac{e}{C} \quad (3.6.4)$$

故有以下关系:

$$u = \frac{\partial W_e}{\partial e} \quad (3.6.5)$$

这里采用偏导数记号是由于电容 C 与两极板间距离 x 有关, 而在机电系统中这个距离往往是可变的。(3.6.5)式又可理解为: 静电能 W_e 的变分 δW_e 等于极板电位差在虚电荷上的功。

现在讨论任意电路系统, 系统的总静电能为所有电容器上电能之和:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} e_k^2 \quad (3.6.6)$$

* 记号 δ' 表示部分变分, 即只考虑电学量的变分而不考虑力学变量 (如广义坐标) 变分的影响。

其中 s 为电容器总数。现在将各 u_j 用广义电荷 e_1, \dots, e_m 表示, 由于 u_j 是广义电荷的线性函数, 所以用广义电荷表示之 W_e 有以下形式:

$$W_e(e_1, \dots, e_m; q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{1}{C_{jk}} e_j e_k \quad (3.6.7)$$

W_e 的变分等于

$$\delta' W_e = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{1}{C_{jk}} e_j \delta e_k = \sum_{k=1}^m \frac{\partial W_e}{\partial e_k} \delta e_k \quad (3.6.8)$$

其中

$$\frac{\partial W_e}{\partial e_k} = u_k^e = \sum_{j=1}^m \frac{e_j}{C_{jk}} \quad (3.6.9)$$

是第 k 个广义回路中的广义电容电位差, 实际上是第 k 个广义回路中的各电容电位差之和。例如, 在如图所示的电路系统中如取 e_1 及 e_2 为广义电荷, 则总静电能为

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \left[\frac{e_1^2}{C_1} + \frac{e_2^2}{C_2} + \frac{(e_1 - e_2)^2}{C_3} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right) e_1^2 - \frac{2e_1 e_2}{C_3} + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) e_2^2 \right] \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

则有

$$\frac{\partial W_e}{\partial e_1} = \frac{e_1}{C_1} + \frac{e_1 - e_2}{C_3}, \quad \frac{\partial W_e}{\partial e_2} = \frac{e_2}{C_2} + \frac{e_2 - e_1}{C_3} \quad (3.6.11)$$

显而易见, $\frac{\partial W_e}{\partial e_1}$ 及 $\frac{\partial W_e}{\partial e_2}$ 分别代表在第 1 及第 2 个广义回路中各有关电容器电位差之和。

当线圈或电感器有电流 i_1 通过时会产生自感应电动势; 如邻近独立电路中某一电感器内有电流 i_2 通过, 并和原电感器耦合时还会产生互感应电动势, 这两部分感应电动势所对应的总磁能为

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + L_{12} i_1 i_2 \quad (3.6.12)$$

其中 L_{11} 为自感, L_{12} 为互感, 所产生的磁通量为

$$\Phi_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \quad (3.6.13)$$

比较以上两式可知

$$\Phi_1 = \frac{\partial W_m}{\partial i_1} \quad (3.6.14)$$

所产生之感应电动势为

$$u_1^i = - \frac{d\Phi_1}{dt} = - \frac{d}{dt} \frac{\partial W_m}{\partial i_1} \quad (3.6.15)$$

在任意电路系统中, 所有电感(包含自感与互感)所产生之总磁能为广义电流的二次型:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m L_{jk} i_j i_k \quad (3.6.16)$$

其中 L_{jk} 不一定是某一具体电感器之电感值, 而是个广义电感参数, 在机电系统中, L_{jk} 可以与线圈相对位置及周围介质的磁场强度有关, 换言之, L_{jk} 一般而言只是广义坐标的函数:

$$L_{jk} = L_{jk}(q_1, \dots, q_n) \quad (3.6.17)$$

磁能 W_m 的变分给出

$$\delta' W_m = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m L_{jk} i_j \delta i_k = \sum_{k=1}^m \frac{\partial W_m}{\partial i_k} \delta i_k \quad (3.6.18)$$

由此可知, $\frac{\partial W_m}{\partial i_j}$ 表示第 j 个广义回路中的广义磁通量, 或 $-\frac{d}{dt} \frac{\partial W_m}{\partial i_j}$ 表示第 j 个广义回路中的广义感应电动势, 它实际上是第 j 个广义回路中所有感应电动势之和, 即

$$u_k^i = - \frac{d}{dt} \frac{\partial W_m}{\partial i_k} = - \sum_{j=1}^m L_{jk} (\dot{i}_j) = - \sum_{j=1}^m L_{jk} \dot{\theta}_j \quad (3.6.19)$$

定义电耗散函数为

$$\Psi_e \triangleq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n R_k i_k^2 \quad (3.6.20)$$

其中 R_k 为第 k 个电阻值。当用广义电流表示后, 函数 Ψ 可表为

$$\Psi_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n R_{jk} i_j i_k \quad (3.6.21)$$

函数 Ψ_e 的变分为

$$\delta \Psi_e = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n R_{jk} i_j \delta i_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Psi_e}{\partial i_k} \delta i_k \quad (3.6.22)$$

$\frac{\partial \Psi_e}{\partial i_k}$ 表示在第 k 个广义回路中各电阻因耗能带来的电压降之总和:

$$u_k^R = \frac{\partial \Psi_e}{\partial i_k} = \sum_{j=1}^m R_{jk} i_j \quad (3.6.23)$$

现在可以建立以广义电荷表示的电路系统基本方程, 根据欧姆定律, 在任一广义回路中电源电动势及感应电动势之和应等于在该回路中在电阻及电容器上的电压降, 即有

$$u_k + u_k^i = u_k^R + u_k^e \quad (3.6.24)$$

其中 u_k 为第 k 个广义回路中的电源电动势, 将 (3.6.9)、(3.6.19) 及 (3.6.23) 式代入上式, 即得到电路基本方程如下:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) + \frac{\partial W_e}{\partial e_k} + \frac{\partial \Psi_e}{\partial i_k} = u_k \quad (k=1, \dots, m) \quad (3.6.25)$$

或

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \dot{e}_k} \right) + \frac{\partial W_e}{\partial e_k} + \frac{\partial \Psi_e}{\partial \dot{e}_k} = u_k \quad (k=1, \dots, m) \quad (3.6.26)$$

和机械系统的 Lagrange 方程相对比, 可见它们有完全相同的数学结构, 不难发现在力学量与电学量之间有以下对应关系:

力 学 量	电 学 量
广义坐标 q_j	广义电荷 e_j
广义速度 \dot{q}_j	广义电流 $i_j = \dot{e}_j$
广义力 Q_j	广义电源电动势 u_j
动能 $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n m_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j$	磁能 $W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m L_{kj} i_k i_j$
弹性势能 $V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj} q_k q_j$	静电能 $W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{C_{kj}} e_k e_j$
机械耗散函数 $\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j$	电耗散函数 $\Psi_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m R_{kj} i_k i_j$
广义动量 $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$	广义磁通量 $\frac{\partial W_m}{\partial i_j}$
广义质量 m_{kj}	广义电感 L_{kj}
广义刚度 c_{kj}	广义电容 $\frac{1}{C_{kj}}$
广义阻尼 β_{kj}	广义电阻 R_{kj}
功率 $\sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j$	功率 $\sum_{j=1}^m u_j i_j$

3.6.2 驱动力的确定及 Lagrange-Maxwell 方程

机械系统与电磁系统的能量交换涉及到驱动力, 所谓驱动力是指质点系统在电磁场中运动时所受的力, 能量交换是通过驱动力做功实现的, 前面已经说明, 机电系统中的电容与电感都是广义坐标的函数, 因之可以预见到驱动力必然与静电能及磁能的变化有关。

为了得到广义驱动力的表达式, 我们利用系统的功率平衡关系

$$\sum_{k=1}^m u_k i_k = \sum_{k=1}^n u_k^* i_k + \frac{dW_m}{dt} + \frac{dW_e}{dt} + \sum_{j=1}^n Q_j^* \dot{q}_j \quad (3.6.27)$$

其中 Q_j^* 为广义驱动力。以上关系的含义为: 电源总功率等于电

阻、电感、电容所耗功率及驱动力所耗功率之和。广义回路中电阻电压降由(3.6.23)已知为

$$u_k^R = \frac{\partial \Psi_e}{\partial i_k} \quad (3.6.28)$$

W_m 的时间导数为

$$\begin{aligned} \frac{dW_m}{dt} &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial W_m}{\partial i_k} \frac{di_k}{dt} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \dot{q}_j \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial W_m}{\partial i_k} i_k \right) - \sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} \frac{\partial W_m}{\partial i_k} i_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \dot{q}_j \end{aligned} \quad (3.6.29)$$

利用 Euler 关于齐次函数的定理可知

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial W_m}{\partial i_k} i_k = 2W_m \quad (3.6.30)$$

于是(3.6.29)式可化为

$$\frac{dW_m}{dt} = \sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} \frac{\partial W_m}{\partial i_k} i_k - \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (3.6.31)$$

W_e 的时间导数为

$$\frac{dW_e}{dt} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial W_e}{\partial e_k} \dot{e}_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_e}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (3.6.32)$$

将(3.6.28)、(3.6.31)及(3.6.32)式代入(3.6.27)式后, 得到以下关系:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^m \left(u_k - \frac{\partial \Psi_e}{\partial i_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W_m}{\partial i_k} - \frac{\partial W_e}{\partial e_k} \right) i_k \\ &= \sum_{j=1}^n \left(-\frac{\partial W_m}{\partial q_j} + \frac{\partial W_e}{\partial q_j} + Q_j^* \right) \dot{q}_j \end{aligned} \quad (3.6.33)$$

由(3.6.26)式可知上式左端恒等于零,于是上式化为

$$\sum_{j=1}^n \left(Q_j^* - \frac{\partial W_m}{\partial q_j} + \frac{\partial W_e}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = 0 \quad (3.6.34)$$

由于各广义速度 \dot{q}_j 都是互相独立的,所以对于任意的广义速度 \dot{q}_j 能使(3.6.34)式成立的条件应为

$$Q_j^* = \frac{\partial}{\partial q_j} (W_m - W_e) \quad (j=1, \dots, n) \quad (3.6.35)$$

这就是驱动力的结果, Q_j^* 只与 W_m 及 W_e 的变化有关,这是事先就预料到的,此外,由 Q_j^* 的表达式可知驱动力具有保守力的特点。

现在将驱动力引入机械系统的 n 个 Lagrange 方程,即有

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} + Q_j + Q_j^* \quad (j=1, \dots, n) \quad (3.6.36)$$

其中 T 为系统的动能:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.6.37)$$

m_{ij} 为广义坐标及时间的函数, V 为系统的势能, 为广义坐标的函数, 适当选取“零位形”可有

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} q_i q_j \quad (3.6.38)$$

Φ 为机械能耗散函数

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.6.39)$$

将(3.6.26)与(3.6.36)式结合起来, 就得到系统的全部动力学方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \dot{e}_k} \right) + \frac{\partial W_e}{\partial e_k} + \frac{\partial \Psi_e}{\partial \dot{e}_k} &= u_k \quad (k=1, \dots, m) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{\partial W_m}{\partial q_j} + \frac{\partial W_e}{\partial q_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} &= Q_j, \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (3.6.40)$$

为了进一步化简以上方程,引入机电系统的 Lagrange 函数

$$L = T(t, q_j, \dot{q}_j) - V(q_j) + W_m(q_j, i_k) - W_e(q_j, e_k) \quad (3.6.41)$$

及机电系统的能量耗散函数

$$\Psi = \Psi_e(i_k) + \Phi(q_j, \dot{q}_j) \quad (3.6.42)$$

最后得到以下形式的 Lagrange-Maxwell 方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{e}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial e_k} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}_k} &= u_k \quad (k=1, \dots, m) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_j} &= Q_j \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (3.6.43)$$

我们得到以 $m+n$ 个广义电荷及广义坐标为未知量的一组二阶常微分方程,在给定初始条件

$$e_k|_{t=0} = e_k^0, i_k|_{t=0} = i_k, q_j|_{t=0} = q_j^0, \dot{q}_j|_{t=0} = \dot{q}_j^0 \quad (3.6.44)$$

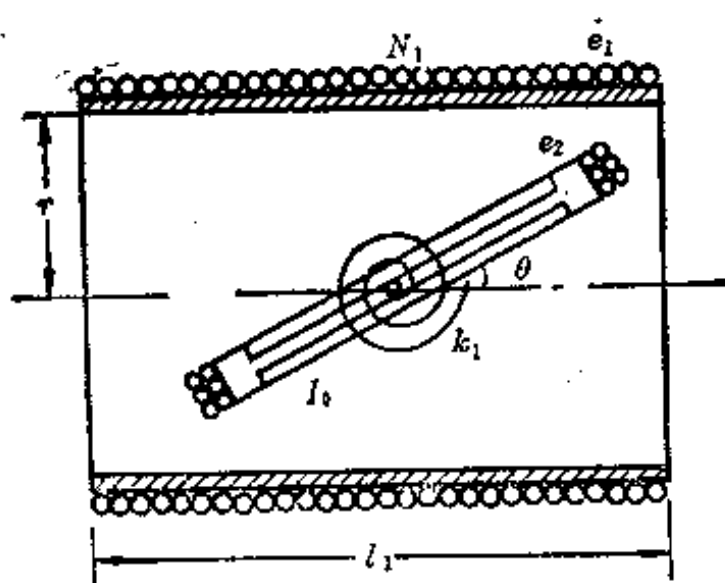
下可求得机电系统动力学的全部解。

例题3.6.1 固定的长 l_1 的螺线管 I 有 N_1 匝,半径为 r ,其轴线 Ox 沿水平方向,在此螺线管中装有一小动线圈 II,有 N_2 匝,动线圈可绕固定轴 Oy 偏转, Oy 轴垂直于图纸平面如图3.18(a)所示,设动线圈上装有一扭簧,其抗扭刚度为 k_1 ,当 $\theta=0$ 时,扭簧无变形,动线圈对 Oy 轴的转动惯量为 I_0 ,不计轴承摩擦和空气阻力,定线圈的电阻为 R ,自感系数为 L_{11} ;动线圈 II 的电阻为 R_2 ,自感系数为 L_{22} 。两线圈的互感系数为 L_{12} ,它由下式求出

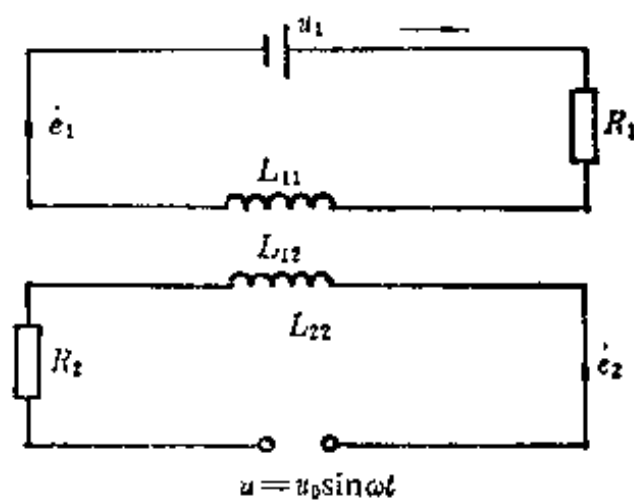
$$L_{12} = \mu (\pi r)^2 \frac{N_1 N_2}{l_1} \sin \theta \quad (a)$$

式中 μ 为导磁系数, θ 为动圈径向与定圈轴向的夹角,相对应的电路图如图3.18(b)所示,图中电源电动势 u_1 为常数, $u_2 = u_0 \sin \omega t$,试列出此系统的运动方程。

解 此系统有三个自由度:两个广义回路的电荷 e_1 及 e_2 ,一个决定系统位形的广义坐标 θ 。动能与磁能之总和为



(a)



(b)

图 3.18

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} L_{11} \dot{e}_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} \dot{e}_2^2 + L_{12} \dot{e}_1 \dot{e}_2 \quad (b)$$

因无电容器, 全部势能为扭簧之弹性势能

$$V = \frac{1}{2} k_1 \theta^2 \quad (c)$$

令

$$A = \mu (\pi r^2) \frac{N_1 N_2}{l_1} \quad (d)$$

则有

$$L_{12} = A \sin \theta \quad (e)$$

于是系统的 Lagrange 函数为

$$L(\dot{e}_1, \dot{e}_2, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} L_{11} \dot{e}_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} \dot{e}_2^2 + A \dot{e}_1 \dot{e}_2 \sin \theta - \frac{1}{2} k_1 \theta^2 \quad (f)$$

不考虑机械阻尼, 耗散函数为

$$\Psi = \Psi_0 = \frac{1}{2} R_1 \dot{e}_1^2 + \frac{1}{2} R_2 \dot{e}_2^2 \quad (g)$$

u_1 及 $u_0 \sin \omega t$ 可视为对应广义坐标 e_1 及 e_2 之广义力, 此机电系统的 Lagrange 方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\theta}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{e}_1} - \frac{\partial L}{\partial e_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}_1} &= u_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{e}_2} - \frac{\partial L}{\partial e_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}_2} &= u_2 \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

将能量函数 L 及 Ψ 代入上式后, 得到系统运动方程如下:

$$\left. \begin{aligned} I_0 \ddot{\theta} - A \dot{e}_1 \dot{e}_2 \cos \theta + k_1 \theta &= 0 \\ L_{11} \ddot{e}_1 + A \ddot{e}_2 \sin \theta + A \dot{e}_2 \dot{\theta} \cos \theta + R_1 \dot{e}_1 &= u_1 \\ L_{22} \ddot{e}_2 + A \ddot{e}_1 \sin \theta + A \dot{e}_1 \dot{\theta} \cos \theta + R_2 \dot{e}_2 &= u_0 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

这是关于 θ, e_1, e_2 的一组非线性常微分方程, 可用微分方程数值解法中的适当方法求近似解。

例题 3.6.2 电子计算机中的磁鼓悬吊装置如图所示。带有圆盘的圆柱形磁鼓一方面绕其竖轴以角速度 ω 旋转, 一方面沿竖轴方向不受机械约束可以上下移动, 磁鼓及其圆盘藉助于四个圆盘形电极可以悬浮于空中, 其中 S_3 及 S_4 接地, S_1 及 S_2 分别接以电源电压 u_1 及 u_2 , 并藉此在电极间产生电场足以保证磁鼓不接触地悬吊起来, 假定四个电极材料及面积均相同, 记面积为 s , 电极的间隙为 $2h$, S_1-S_3 所在电路之电阻为 R_1 , S_2-S_4 所在电路之电阻为

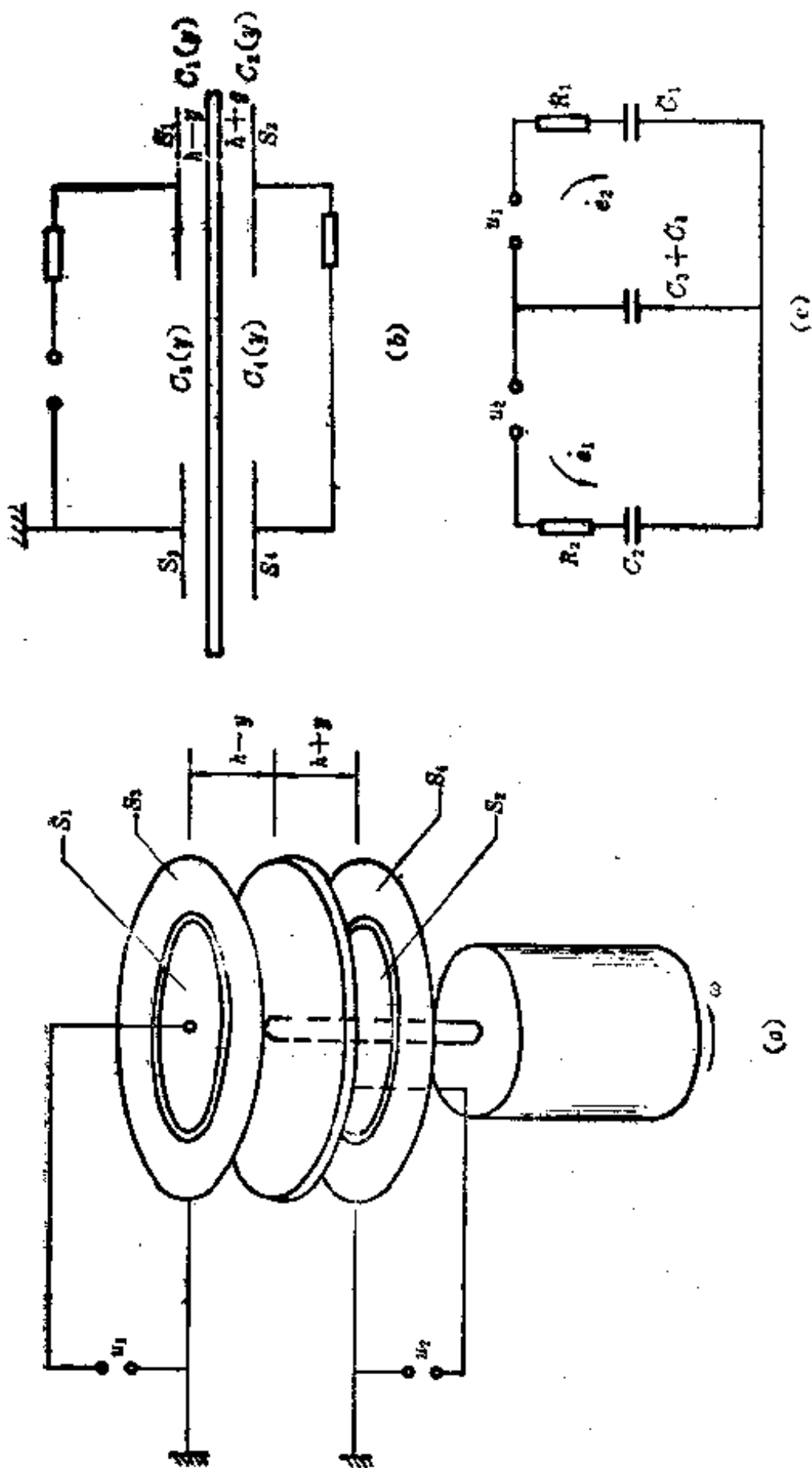


图 3.19

R_2 。试列出此系统的运动方程,并讨论平衡位置为稳定的条件*。

解 取磁鼓沿纵向从上下两对电极的中层计起的偏离为广义坐标之一,并记作 y 。每个电极和与它靠近的圆盘都形成一个电容 C_k ,显然 C_k 与圆盘的位置、亦即 y 有关:

$$C_1 = C_3 = \frac{s}{h-y}, \quad C_2 = C_4 = \frac{s}{h+y} \quad (a)$$

其中 $s = \epsilon \epsilon_0 s$; ϵ_0 ——电介质的导电率; ϵ ——电介质与电容器之间的相对导电率。

由图所示电路有两个广义回路,取 e_1 及 e_2 为系统的另外两个“广义坐标”。因之,系统具有三个自由度。

令磁鼓及圆盘的总质量为 m ,其动能则为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \quad (b)$$

重力势能为

$$V = mgy \quad (c)$$

系统的磁能可略去不计,以下只需列出电能表达式。由于电极 S_3 及 S_4 都接地,故知电容 $C_3(y)$ 及 $C_4(y)$ 是并接在一起的,它们的总电容为

$$C(y) = C_3 + C_4 = \frac{s}{h-y} + \frac{s}{h+y} = \frac{2sh}{h^2 - y^2} \quad (d)$$

通过电容的电流等于 $\dot{e}_1 + \dot{e}_2$,因之电容 $C(y)$ 上的电荷为 $e_1 + e_2$,系统的总电能为

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{e_1^2}{2C_1} + \frac{e_2^2}{2C_2} + \frac{(e_1 + e_2)^2}{2C(y)} \\ &= \frac{e_1^2}{2s}(h-y) + \frac{e_2^2}{2s}(h+y) + \frac{(e_1 + e_2)^2}{4sh}(h^2 - y^2) \end{aligned} \quad (e)$$

系统的Lagrange函数为

* 见参考文献[41]。

$$L = T - V - W_e$$

$$A) \quad = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy - \frac{e_1^2}{2s}(h-y) - \frac{e_2^2}{2s}(h+y) - \frac{(e_1+e_2)}{4sh}(h^2-y^2) \quad (f)$$

略去机械耗散力, 可得到系统的耗散函数为

$$\Psi = \frac{1}{2} R_1 \dot{e}_1^2 + \frac{1}{2} R_2 \dot{e}_2^2 \quad (g)$$

其中 R_1, R_2 是每个广义回路的电阻。

现在列出系统的 Lagrange-Maxwell 方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}_1} - \frac{\partial L}{\partial e_1} &= u_1 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}_2} - \frac{\partial L}{\partial e_2} &= u_2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{y}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

将 L 及 Ψ 的表达式代入上式后, 得到此系统的全部运动方程如下:

$$\left. \begin{aligned} R_1 \dot{e}_1 + \frac{e_1}{s}(h-y) + \frac{(e_1+e_2)}{2sh}(h^2-y^2) &= u_1 \\ R_2 \dot{e}_2 + \frac{e_2}{s}(h+y) + \frac{(e_1+e_2)}{2sh}(h^2-y^2) &= u_2 \\ m\dot{y} - mg - \frac{e_1^2}{2s} + \frac{e_2^2}{2s} - \frac{(e_1+e_2)^2}{2sh}y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

这些方程构成了一个 4 阶非线性常微分方程组, 当电阻 R_1, R_2 很小可略去不计时, 方程组 (i) 的前两方程中的 $R_1 \dot{e}_1$ 及 $R_2 \dot{e}_2$ 也可略去不计, 于是这两个微分方程成了代数方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{h-y}{s}e_1 + \frac{h^2-y^2}{2sh}(e_1+e_2) &= u_1 \\ \frac{h^2-y^2}{2sh}(e_1+e_2) + \frac{h+y}{s}e_2 &= u_2 \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

经整理后成为

$$\left. \begin{aligned} (3h+y)e_1 + (h+y)e_2 &= \frac{2hs}{h-y}u_1 \\ (h-y)e_1 + (3h-y)e_2 &= \frac{2hs}{h+y}u_2 \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

解之可得

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{s}{4h} \left(\frac{3h-y}{h-y}u_1 - u_2 \right) \\ e_2 &= \frac{s}{4h} \left(\frac{3h+y}{h+y}u_2 - u_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

将所求得之解代入(i)的第三方程,就得到圆盘沿竖轴平动的微分方程:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + mg - \frac{s}{32h^2} \left(\frac{3h-y}{h-y}u_1 - u_2 \right)^2 \\ + \frac{s}{32h^2} \left(\frac{3h+y}{h+y}u_2 - u_1 \right)^2 - \frac{sy}{8h} \left(\frac{u_1}{h-y} + \frac{u_2}{h+y} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (m)$$

经整理后,最终得到以下方程:

$$m\ddot{y} + mg + F(y) = 0 \quad (n)$$

其中

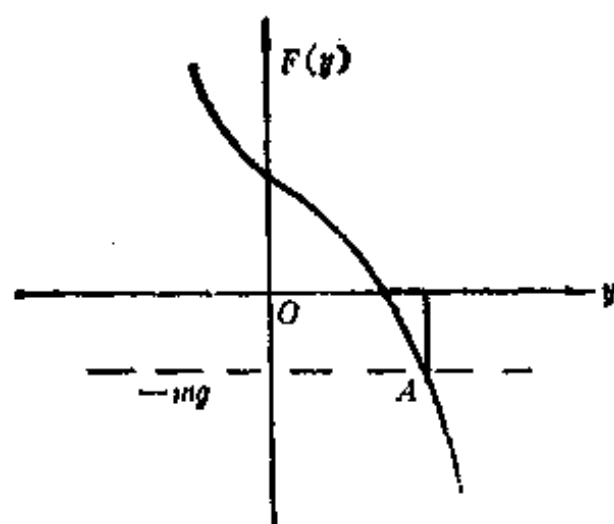
$$F(y) = \frac{s}{4} \left[\frac{u_2^2}{(h+y)^2} - \frac{u_1^2}{(h-y)^2} \right] \quad (o)$$

令 $\ddot{y}=0$, 可由(n)得到圆盘的平衡条件为

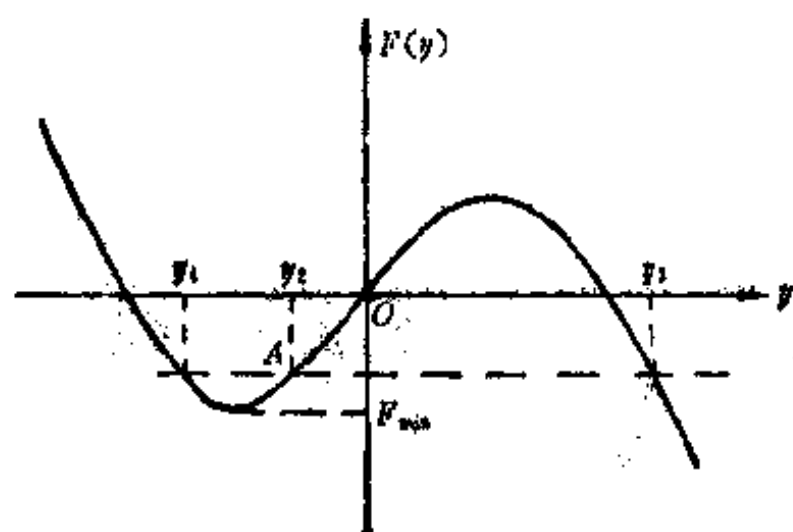
$$F(y) = -mg \quad (p)$$

$F(y)$ 的函数图形如图 3.20 所示,悬吊系统的工作要求是 y 值只能在开区间 $-h < y < h$ 内变化, 因为当 $y = \pm h$ 时圆盘将和电极接触, 当 y 非常靠近 $\pm h$ 时也会发生击穿现象, 因之, 要求平衡位置必须是稳定的, 这就要求 $F(y)$ 在平衡位置附近必须是增函数, 但图 3.20(a)表明在平衡位置(A点)处, 函数是递减的, 与上述要求完全相反。

可见, 在直流常电源 u_1 及 u_2 的条件下不能实现稳定要求, 为



(a)



(b)

图 3.20

此可要求 u_1 及 u_2 随 y 而变, 例如, 当 u_1 及 u_2 按以下规律变化时,

$$u_1 = U - ky, \quad u_2 = U + ky \quad (q)$$

就可能达到目的, 其中 U 为某个常值的基本电压。将 (q) 式代入 (o) 式, 可得新的 $F(y)$ 为

$$F(y) = \frac{s(kh - U)(Uh - ky^2)}{(h^2 - y^2)^2} y \quad (r)$$

当 $k > \frac{U}{h}$ 时, $F(y)$ 的函数图形示于图 3.20(b) 中, 在 $y=0$ 及

$y = \pm \sqrt{\frac{U_h}{k}}$ 处 $F(y)$ 等于零。因之在区间 $-\sqrt{\frac{U_h}{k}} \leq y \leq \sqrt{\frac{U_h}{k}}$ 内有两个极值 F_{\min} 及 F_{\max} ，而且 $F_{\max} = |F_{\min}|$ ，如 $mg < F_{\max}$ ，则 $F(y) = -mg$ 。在区间内有三个解 y_1 、 y_2 及 y_3 。由图 3.20(b) 可见，只有解 y_2 符合稳定要求。

第三章 习 题

3.1 一曲柄连杆机构如题 3.1 图所示。曲柄长 r ，连杆长 l ，在曲柄 OA 与 OB 线夹角为 θ 之位置受到气缸内气体爆炸的冲量 S 作用，如系统原来处于静止状态，求爆炸后的曲柄角速度 ω 。已知：曲柄对 O 点之转动惯量为 I_0 ，连杆为等截面均质杆，质量为 m_1 ，对质心之转动惯量为 I_1 ，活塞及活塞杆之总质量为 m_2 。由于 $r \ll l$ ，计算时可取至 r/l 的二阶小量。

3.2 四根相同的直杆铰接成一菱形并放置在水平面上，在顶点 A 作用一沿对角线 AC 的水平冲量 S 如图所示，欲使打击后 C 点保持不动，求 θ 。又如打击时 B 点加以约束，求此系统打击后的运动。

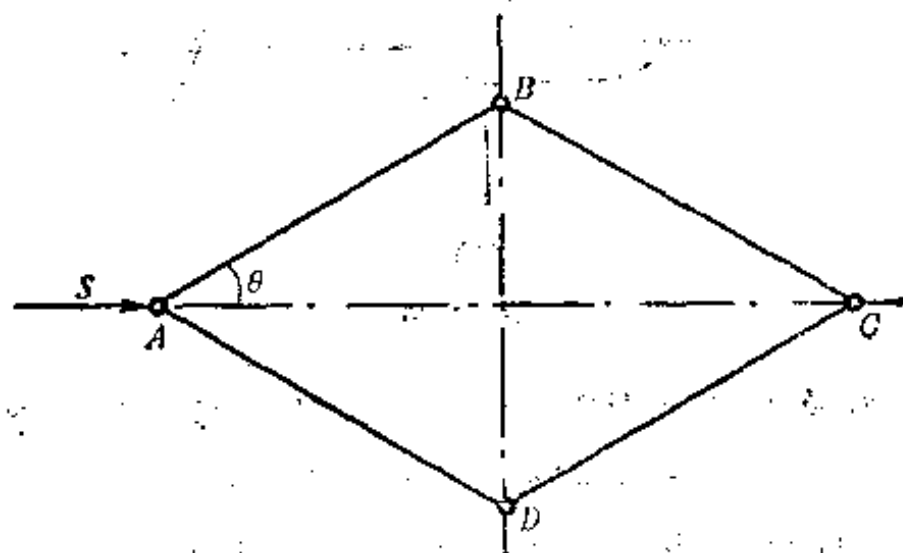
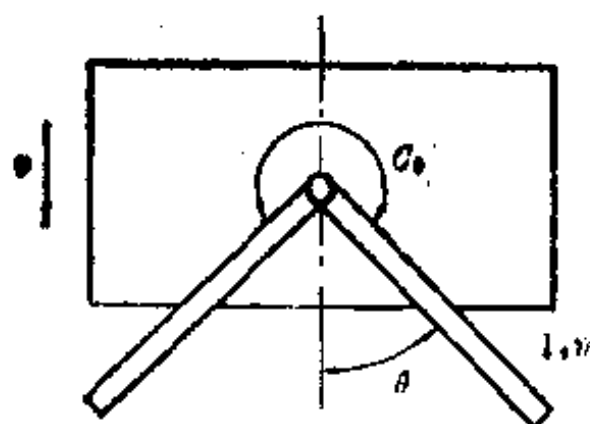


图 3.2

3.3 一飞行器在着陆时的二维运动模型如图所示，飞行器的两个支腿用刚度为 K ($\text{N} \cdot \text{m/rad}$) 的扭簧限制其转动，当支腿以速度 v 撞击在光滑非弹性平面上时，求撞击后的角速度 $\dot{\theta}$ 。假设碰撞前 $\dot{\theta} = 0$ ，且扭簧提供一瞬时冲量矩 C ，以缓冲飞行器的着陆。



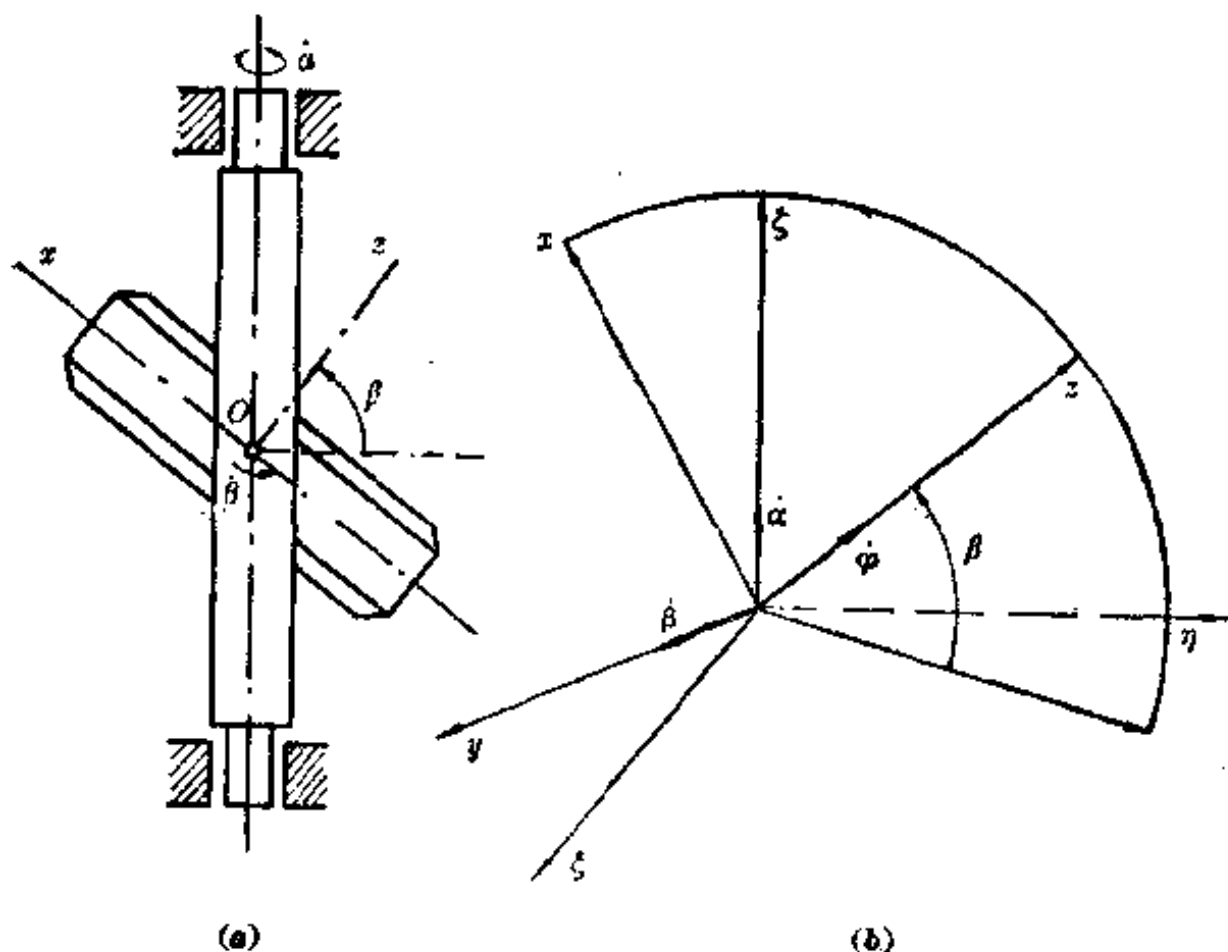
圖 3.1



题 3.3

3.4 一质点 P 在指向中心 O 点的力 $f(r)$ 作用下在一平面内运动，其中 r 为 OP 间之距离。试列出以 r, θ, \dot{r} 及 A 表示的质点运动微分方程（换言之，以推速度 \dot{r} 及 A 表示之方程）。其中 θ 为 OP 与平面内某一固定方向间之夹角，而 A 为线 OP 在单位时间内扫过之面积。

3.5 具有 Cardan 悬架的陀螺仪如图所示。转子的自转角速度为 ϕ ，内环相对外环之角速度为 β ，外环角速度为 α ，陀螺仪之方位由方位角 β 表示



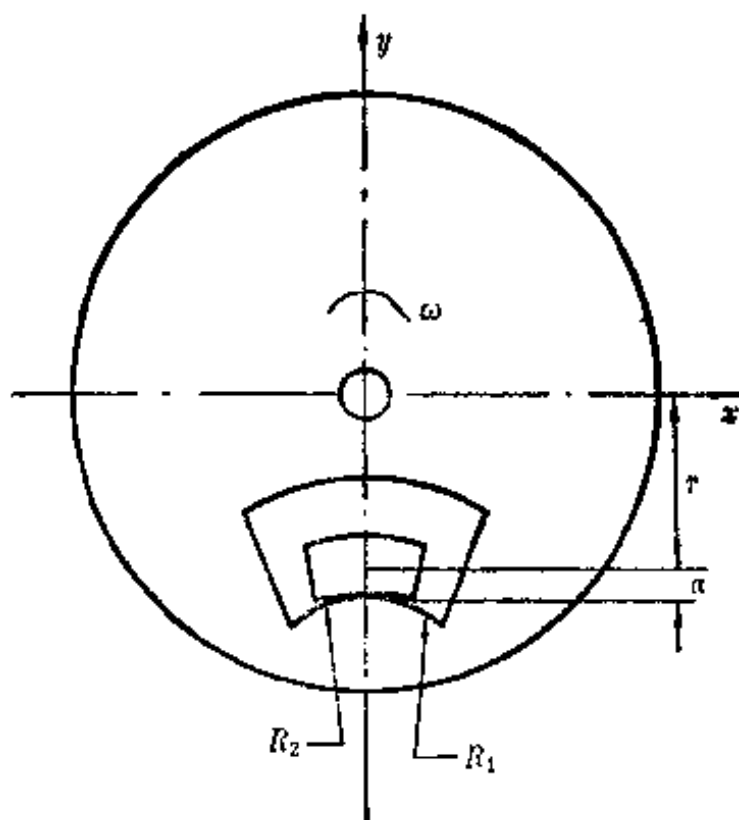
题 3.5

如图。已知转子的中心主转动惯量为 A, A, C , 对三个轴 $O\xi, Oy$, 及 Oz 之力矩分别为 M_ξ, M_y , 及 M_z , 证明转子的角速度在固结于内环上的坐标系 $Oxyz$ 的投影 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 满足以下关系

$$\omega_1 = \alpha \cos \beta, \quad \omega_2 = \beta, \quad \omega_3 = \phi + \alpha \cos \beta$$

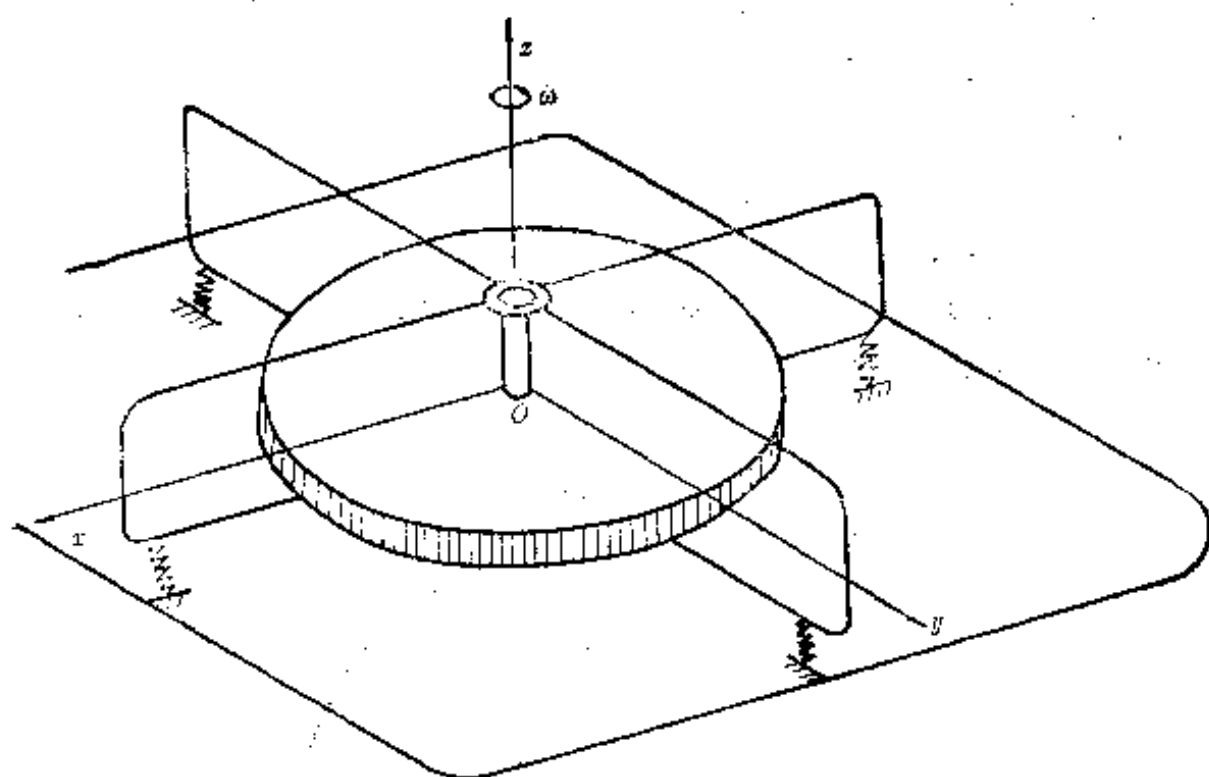
并列以角速度 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 表示的转子运动方程。

3.6 摆块式抗扭消振器的结构参数及工作条件与习题 2.27 完全相同, 用载体及被载系统理论重新解此问题。

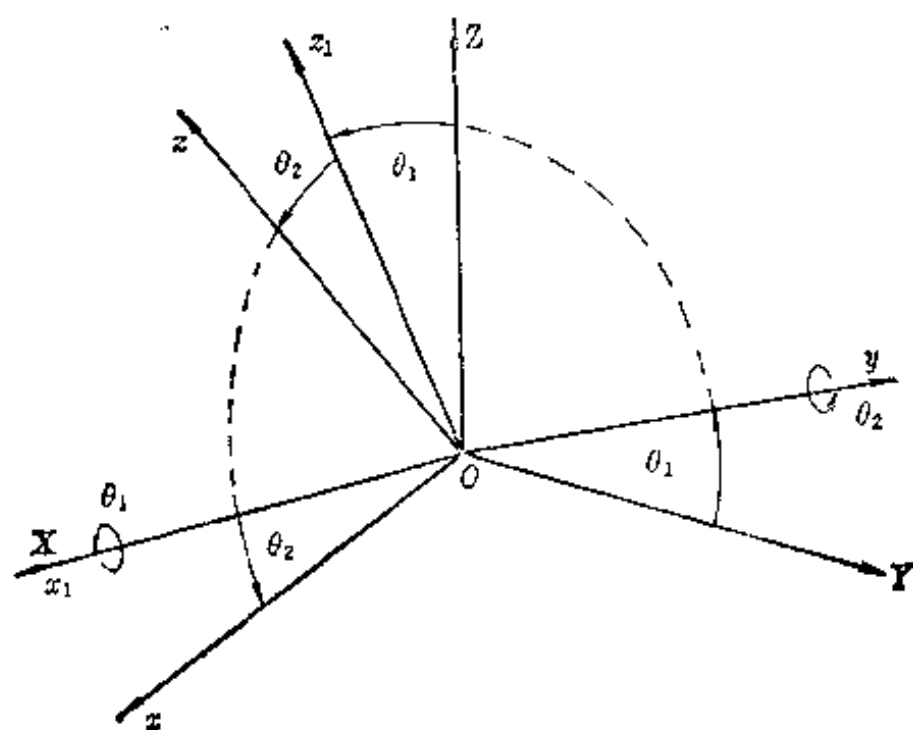


题 3.6

3.7 车辆的陀螺悬架如图所示。飞轮及其支架对于 z 轴对称, O 为质心, 坐标系 $Oxyz$ 与支架固结, Ox 轴和车辆的横轴平行, 支架用弹簧对称地安装在车辆上。已知每个弹簧的刚度为 k , 相应的阻尼系数为 c_1 , 每个弹簧到转动轴 Oz 之距离为 a , C' 与 A 为飞轮-支架系统的极转动惯量及横向转动惯量, C 为飞轮之极转动惯量, ω_r 为飞轮相对支架之角速度, $OXYZ$ 为静止坐标系, Z 轴向上, X 轴是横轴方向, 绕 x_1 轴转 θ_1 到中间坐标系 $Ox_1y_1z_1$, 再绕 y_1 轴转 θ_2 到瞬时坐标系 $Oxyz$, 车辆本身的角速度在 $OXYZ$ 上之投影为 Ω_x, Ω_y , 及 Ω_z 。试列出飞轮轴方位的运动微分方程。



(a)



(b)

题 3.7

3.8 在载体内有一个作定轴转动的转子, 设载体在空间绕固定点转动,

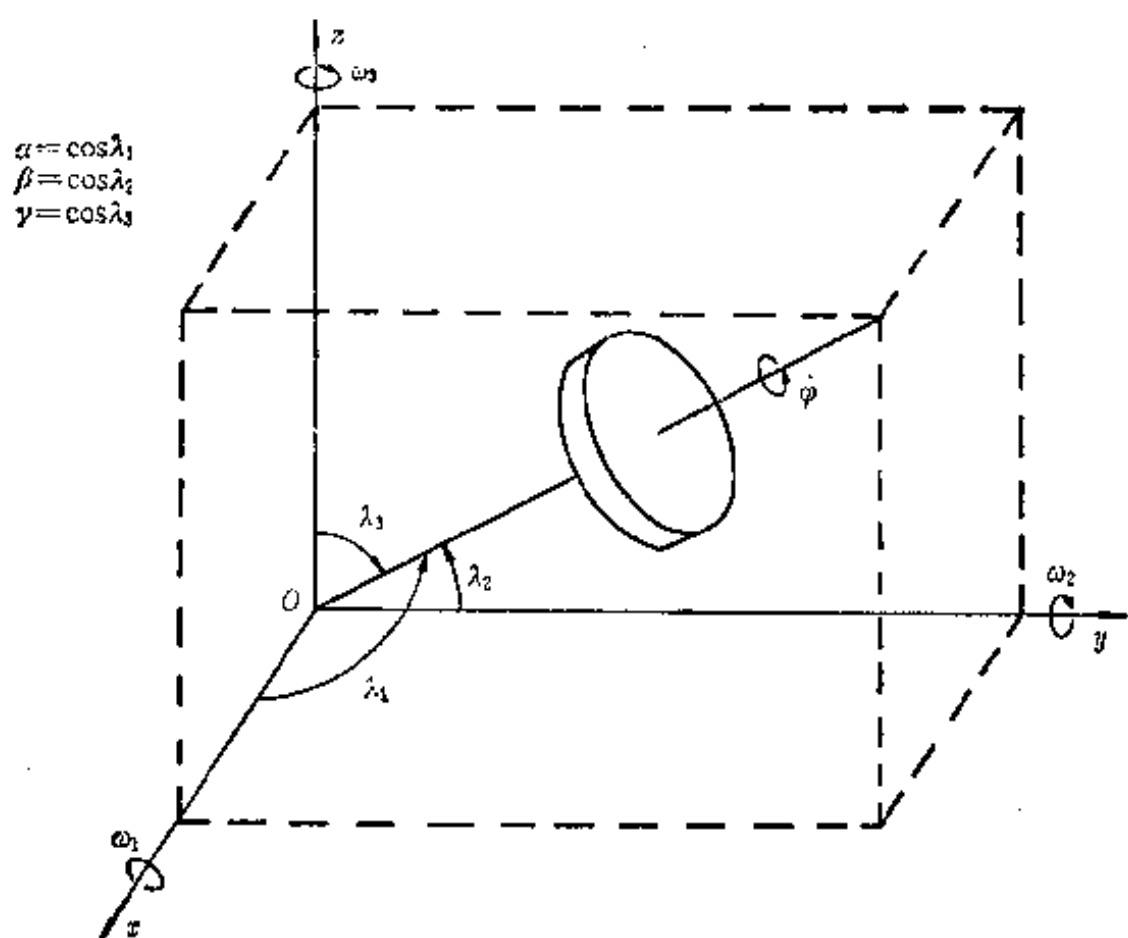


图 3.8

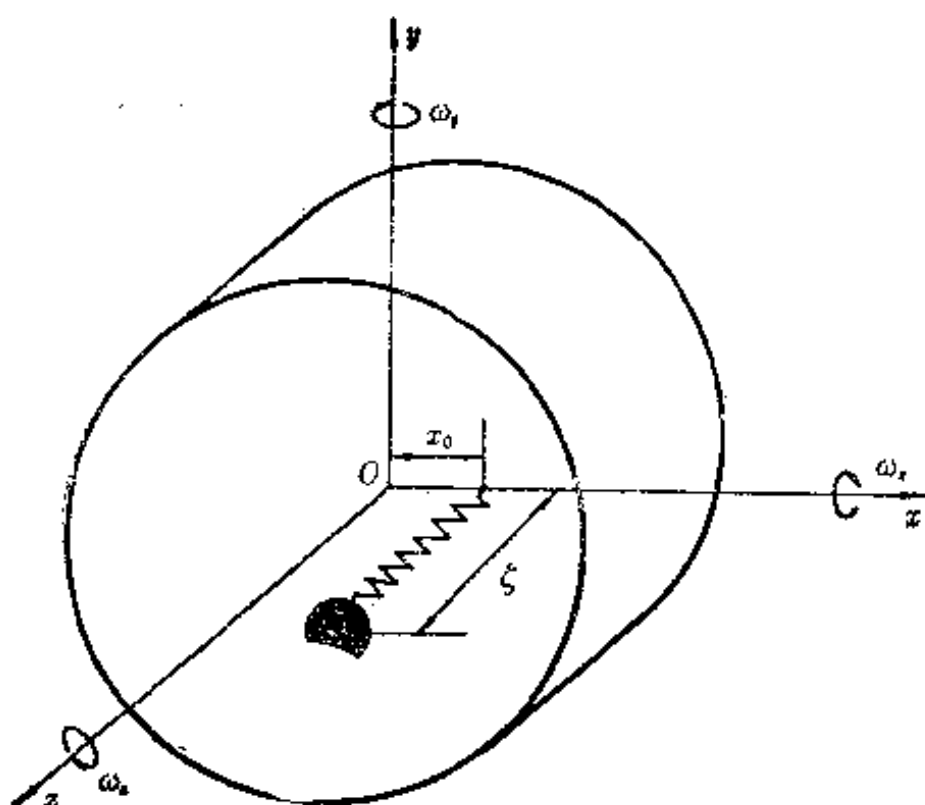
转子的轴线通过该固定点 O ，取过 O 点并与惯性主轴相联系的坐标系 $Oxyz$ ，设转子轴线与此坐标系之间的方向余弦为 α, β, γ ，三个主惯性矩为 A, B, C ，相应的角速度分量为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ，转子的自转角速度为 ϕ ，绕自转轴之惯性矩为 I 。证明载体及转子的运动方程分别为

$$\left. \begin{aligned} A\dot{\omega}_1 + (C-B)\omega_2\omega_3 + I[\alpha\dot{\phi} + (\omega_1\gamma - \omega_3\beta)\phi] &= m_x^0 \\ B\dot{\omega}_2 + (A-C)\omega_3\omega_1 + I[\beta\dot{\phi} + (\omega_3\alpha - \omega_1\gamma)\phi] &= m_y^0 \\ C\dot{\omega}_3 + (B-A)\omega_1\omega_2 + I[\gamma\dot{\phi} + (\omega_1\beta - \omega_2\alpha)\phi] &= m_z^0 \end{aligned} \right\}$$

及

$$I(\dot{\phi} + \omega_1\alpha + \omega_2\beta + \omega_3\gamma) = Q_\phi$$

3.9 在轨道上的对称旋转卫星对 x, y, z 轴之转动惯量分别为 A, A, C (包括在 $\zeta=0$ 处的质量 m_0 在内)，如质量 m_0 限制在沿 z 方向运动，弹簧刚度为 k ，阻尼(粘滞)系数为 c ，列出此系统在任意外力作用下的运动方程。设 m 为整个系统的质量， $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 为卫星绕 x, y, z 轴之角速度，作用在卫星体三个轴 Ox, Oy, Oz 上的外力分别是 F_x, F_y, F_z ，外力矩分别为 M_x, M_y 及 M_z 。列出此系统的运动方程。



题 3.9

3.10 一刚体可在另一载体内绕固定点 O 运动, 同时载体可作任意运动, 设载体的角速度为 ω , O 点与刚体的质心重合, 刚体的相对角速度为 ω' , 刚体对某一固结在其上之坐标系之惯性张量为 I 。证明离心惯性力矩 M_o^e 、转动惯性力矩 M_o^r 及科氏惯性力矩 M_o^{cr} 分别为

$$M_o^e = -\omega \times I \cdot \omega$$

$$M_o^r = -I \cdot \omega$$

$$M_o^{cr} = -\omega' \times [2I - \theta E] \cdot \omega$$

其中

$$\theta = I_{11} + I_{22} + I_{33}$$

由此进一步证明刚体的相对运动方程为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T_r}{\partial \omega'} \right\} + [\omega'] \left\{ \frac{\partial T_r}{\partial \omega'} \right\} + [\omega] [I] \{\omega\} + [I] \{\omega\} + \\ + 2[\omega] + \left[[I] - \frac{1}{2} \theta [E] \right] \{\omega\} = \{M_o\} \end{aligned}$$

3.11 利用上题结果, 证明在地球自转影响下, 刚体绕定点的运动方程为

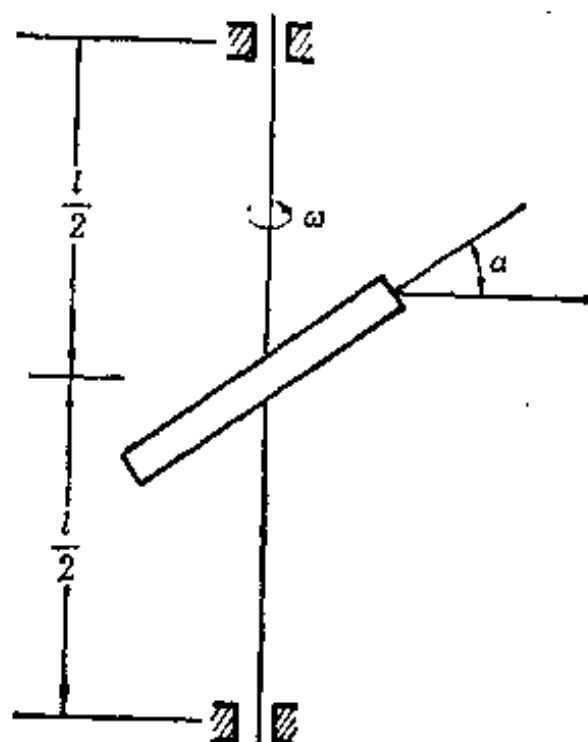
$$A\dot{\omega}_1' + (C-B)(\dot{\omega}_2'\dot{\omega}_3' + \dot{\omega}_2'\dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_3'\dot{\omega}_2) + A(\dot{\omega}_2'\dot{\omega}_3' - \dot{\omega}_3'\dot{\omega}_2) = m_1$$

$$B\dot{\omega}_2' + (A-C)(\dot{\omega}_3'\dot{\omega}_1' + \dot{\omega}_3'\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_1'\dot{\omega}_3) + B(\dot{\omega}_3'\dot{\omega}_1' - \dot{\omega}_1'\dot{\omega}_3) = m_2$$

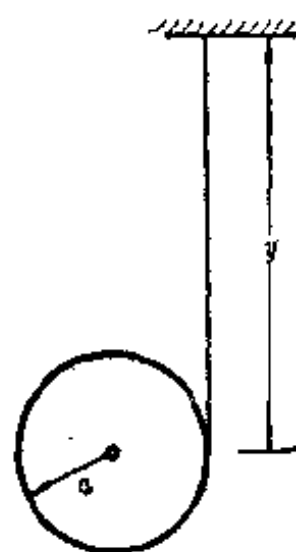
$$C\dot{\omega}_3' + (B-A)(\dot{\omega}_1'\dot{\omega}_2' + \dot{\omega}_1'\dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_2'\dot{\omega}_1) + C(\dot{\omega}_1'\dot{\omega}_2' - \dot{\omega}_2'\dot{\omega}_1) = m_3$$

其中固结在刚体上的坐标轴为惯性主轴; A, B, C 为三个主惯性矩; $\dot{\omega}_1', \dot{\omega}_2', \dot{\omega}_3'$ 为刚体相对地球运动的角速度在上述主轴系上的投影; $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$ 为地球自转角速度在上述主轴系上的投影; m_1, m_2, m_3 为作用在刚体上的外力对上述主轴系的主矩分量。注意地球自转角速度为小量, 其二阶小量可略去不计。

3.12 一带有偏角圆盘之弹性轴以等角速 ω 旋转, 均质圆盘的中心主惯性矩为 A, C 。圆盘的偏角为 α , 轴的抗弯刚度为 EI , 全长为 l , 圆盘固结在其中点, 两端轴承可视为铰支。试讨论此轴能偏离铅垂位置而保持相对平衡的条件。



题 3.12



题 3.13

3.13 缆索上端固定, 其余部分绕在轮盘周围, 假定轮盘下降时对其中心保持作直线运动, 记

m_0 ——轮盘质量

k_0 ——轮盘质量对其形心之惯性半径

m ——缆索之总质量

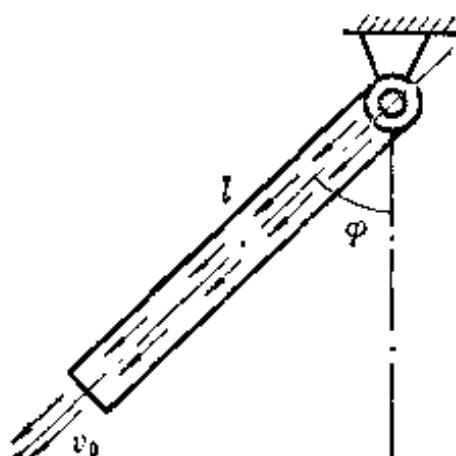
a ——轮盘之半径

y_0 —— 轮盘中心起始位置

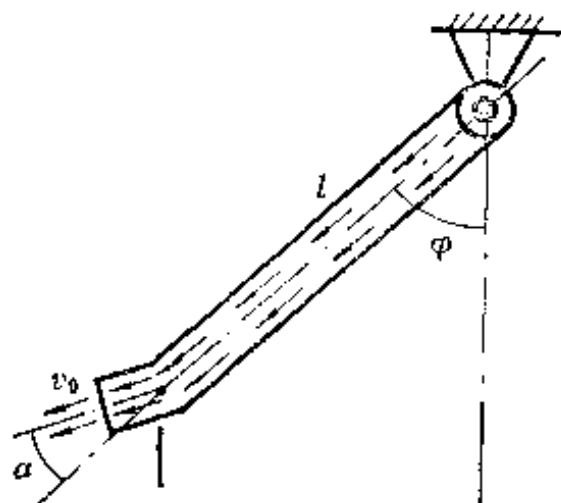
y —— 轮盘中心瞬时位置

试列出此系统之运动方程。

3.14 如图所示系统, 液体以常速 v_0 自管中流出, 管的质量为 m_0 , 长为 l , 横截面积口面积为 A_0 , 液体密度为 ρ , 管可自由地绕 A 处之轴转动, 试求此系统的小摆动频率, 并讨论使此系统频率变为零之极限流速 v_0 。



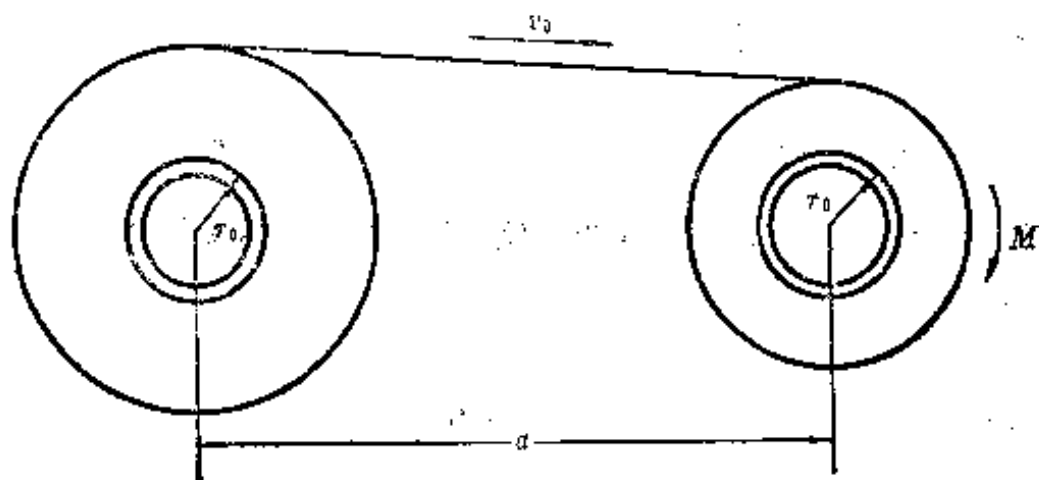
题 3.14



题 3.15

3.15 条件同上题, 但管嘴弯一角度 α , 列出此系统的运动微分方程, 并讨论实现微小摆动的条件及摆动频率。

3.16 录音磁带的总长度为 l , 单位长度质量为 ρ , 磁带厚度为 δ , 绕在半径为 r_0 、相距为 a 的两个轴套上, 每轴所受之阻力矩为 $\alpha\omega$, 其中 α 为阻尼常数, ω 为该轴之角速度。欲使磁带行走速度为固定值 v_0 , 问主动轴上的转动力矩应如何变化?

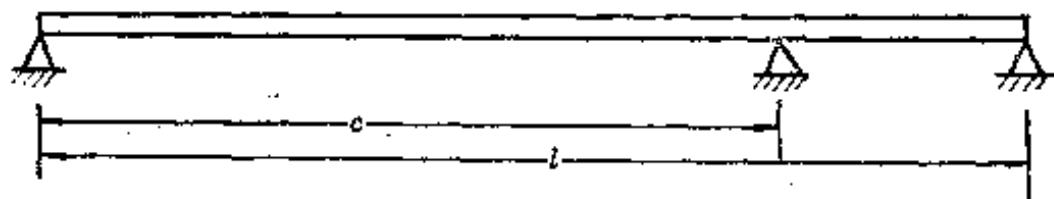


题 3.16

3.17 在两跨不均等的连续梁自由振动问题中, 建议采用以下的位移模式:

$$y = \sum_{i=1}^3 q_i \varphi_i(x)$$

其中 $\varphi_i(x) = \sqrt{2} \sin \frac{i\pi x}{l}$, $\omega_i = (i\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$



题 3.17

证明其固有频率满足以下方程:

$$\frac{\varphi_1^2(c)}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\omega_2^2(c)}{16\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\omega_3^2(c)}{81\omega_1^2 - \omega^2} = 0$$

3.18 固定在圆盘上沿径向的悬臂梁随圆盘一起以等角速 ω 转动, 设圆盘半径为 R , 梁的长度为 l , 单位长质量为 m , 截面对 y 轴及 z 轴之抗弯刚度分别为 EI_y 及 EI_z , 取梁在无转动条件下的振型函数 $\varphi_i(x)$ 组合成 y 方向及 z 方向的位移函数如下:

$$u_y = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) q_i \quad u_z = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) q_i$$

试列出在转动影响下梁在 xy 平面及 xz 平面内的自由弯曲振动方程。

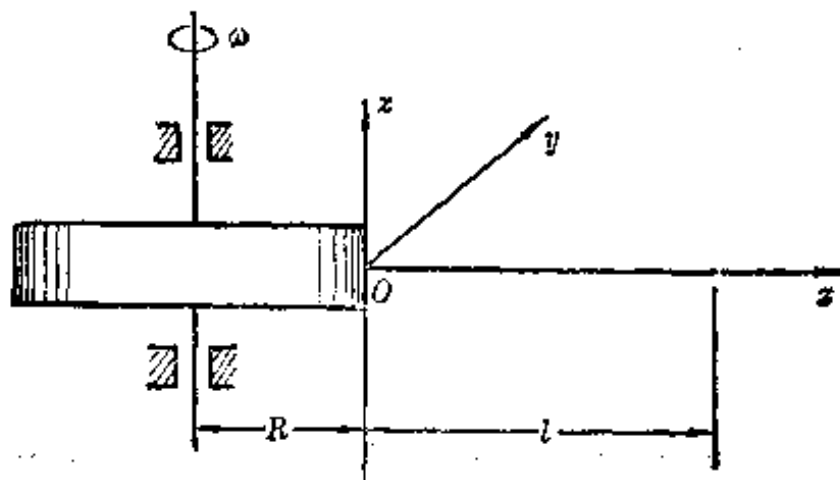
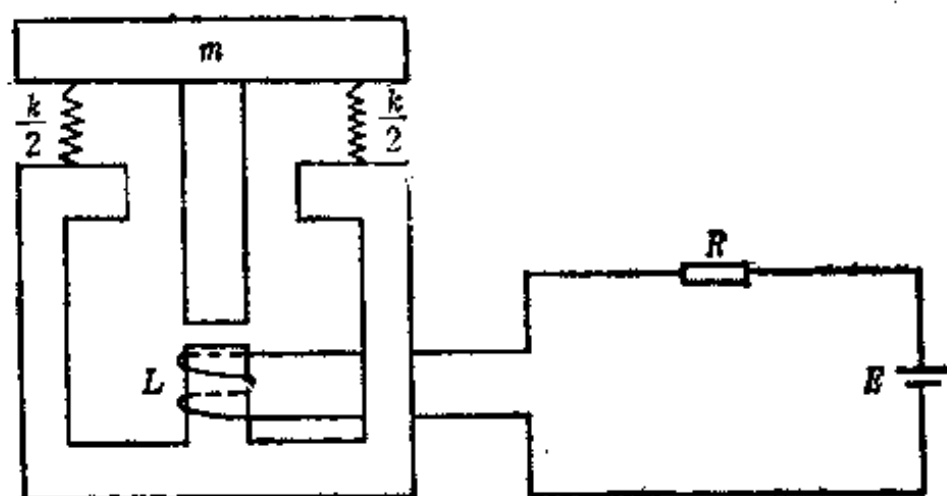


图 3.18

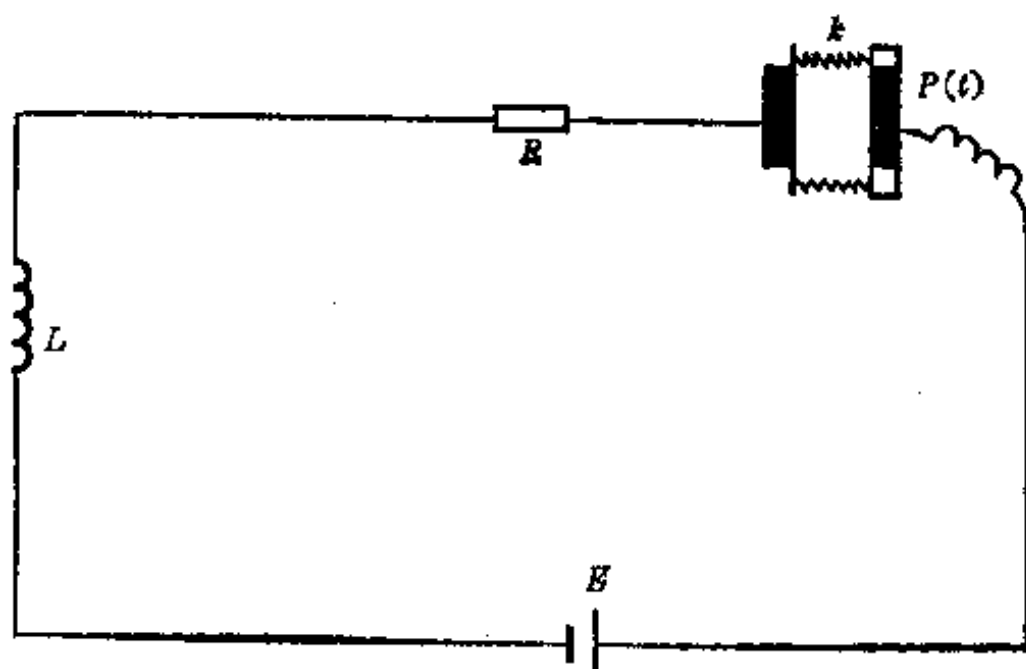
3.19 有一记录机械振动的电动拾振器线路如图所示, 其振动台的质量

为 m , 每个支撑弹簧的弹性系数为 $\frac{k}{2}$, 可变自感系数 $L=L(x)$, x 为振动台自弹簧无压缩处算起的垂直位移。电池的电动势为 E , 回路电阻为 R 。试列出此系统的运动微分方程。



题 3.19 图

3.20 电容式微音器线路如图所示, 线路中含有电感为 L 之线圈、记录电阻 R 及极板间用总刚度为 k 之弹簧相联之电容, 线路接以直流电源, 其电压为 E , 在电容器极板上作用有可变力 $P(t)$, 在平衡位置的电容器的电容为



题 3.20

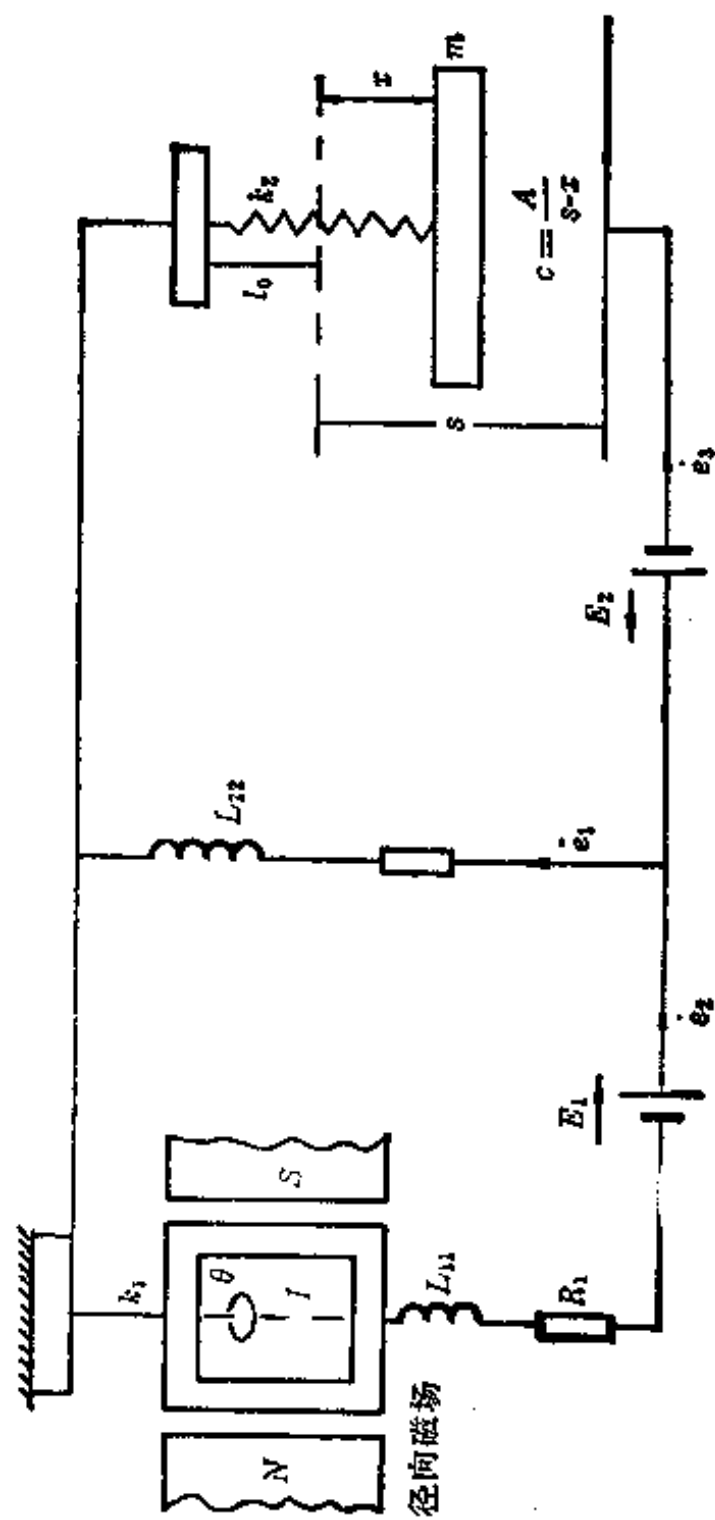


图 3.21

C_0 , 此时两极板间距为 a , 可动极板的质量为 m 。试列出此系统的运动微分方程, 并求微音器的固有频率。

3.21 图示可变电容与壁式电流计。试求系统的 Lagrange 函数, 并导出运动微分方程。

第四章 Hamilton 力学

在前两章中我们用广义坐标描述系统的运动,给出了建立完整系统的运动微分方程的方法,并讨论了它们的积分问题。但是这些被称为 Lagrange 方程的运动微分方程组,一般说来都是非线性的,除了数值解,没有一般的解法。利用循环积分及能量积分一般也只能在一定条件下求出部分首次积分,并不能求出全部积分,在动力学方程的积分理论上重要进展的是 Hamilton 和 Jacobi 的工作,Hamilton 将 n 个二阶方程组构成的 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, \dots, n)$$

变换为含有 $2n$ 个变量 p_i, q_i 的 $2n$ 个一阶方程,即通称 Hamilton 正则方程

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i=1, \dots, n)$$

其中 H 为依赖于 p_i, q_i 及 t 的函数,由于正则方程结构简单、对称,这就为动力学的变换理论创造了有利条件。由 Hamilton 和 Jacobi 创立的正则变换理论是正则方程积分理论的核心,利用正则变换不仅可将正则方程组归结为一个一阶偏微分方程 (Hamilton-Jacobi 方程),而且正则变换本身还可以引伸出正则摄动理论,它是正则方程渐近解法的基础。

本书只限于讨论存在 Lagrange 函数的完整系统,但应指出,Hamilton 及 Jacobi 的全部理论也可以推广到非完整系统中去。

4.1 Hamilton正则方程

4.1.1 Lagrange 系统的正则方程

存在 Lagrange 函数的系统称之为 Lagrange 系统。在第二章中已经给出一个由 Lagrange 函数 $L=L(q, \dot{q}, t)$ 写出系统运动微分方程的方法。我们将函数 L 中的变量 q, \dot{q} 称为 Lagrange 变量。这些变量的一组值 $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ 对应于系统的一个状态。从 (2.1.12) 式可以看出, Lagrange 方程是关于广义坐标的二阶微分方程。解出二阶导数, 其形式为

$$\ddot{q}_i = f_i(t, q, \dot{q}) \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.1.14)$$

任何 n 个二阶微分方程的方程组, 都可以通过一定的变换化成一组 $2n$ 个一阶微分方程。显然这种变换是多种多样的。例如 (2.1.14) 式可化为

$$\dot{q}_i = y_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.1.1)$$

和

$$\dot{y}_i = f_i(t, q, y) \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.1.2)$$

这就是 $2n$ 个一阶微分方程的方程组。Hamilton 以 $q_i (i=1, \dots, n)$ 和广义动量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.3.3)$$

作为描述系统状态的变量。由 (2.1.20) 及 (2.1.21) 式可知, 广义动量是广义速度的线性函数

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j + a_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.1.3)$$

由于

$$\det[a_{ij}]_{i,j=1}^n \neq 0$$

可由方程组(4.1.3)解出 \dot{q}_i :

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t, q, p) \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.1.4)$$

p_i 称为广义坐标 q_i 的共轭动量，而 q, p 的全体称为Hamilton 变量或正则变量。以正则变量 q, p 为正交坐标的空间称为相空间。

等式(4.1.3)及(4.1.4)表明，Lagrange 变量 q, \dot{q} 可用 Hamilton 变量 q, p 表出，而 Hamilton 变量也可用 Lagrange 变量表出。因此系统的状态既可用 Lagrange 变量 q, \dot{q} 描述，也可用 Hamilton 变量 q, p 描述。今后规定，对于任何 Lagrange 变量的函数 $F(t, q, \dot{q})$ ，当以(4.1.4)式右端表示其中的 \dot{q} 时，便记作 $\widehat{F}(t, q, p)$ ，即 $\widehat{F} = F(t, q, \dot{q}(t, q, p))$ 。并称 \widehat{F} 为 F 的关联表达式。

下面我们利用广义动量 p 将 Lagrange 系统的二阶方程组

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.1.19)$$

化为一阶的方程组。

由于 Lagrange 函数 $L(t, q, \dot{q})$ 对 \dot{q} 的 Hess 行列式不为零，即

$$\det \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right]_{i,j=1}^n = \det [a_{ij}]_{i,j=1}^n \neq 0$$

因此，根据 Donkin 定理(见2.6节)，将 t, q 看作参数，则由 \dot{q} 到广义动量的变换

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.1.5)$$

有以下形式的逆变换

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.1.6)$$

其中 H 是逆变换的生成函数，有如下形式(见(2.8.22))式:

$$H(t, q, p) = \sum_{i=1}^n \widehat{\dot{q}_i} p_i - \widehat{L}(t, q, p) \quad (4.1.7)$$

函数 $H(t, q, p)$ 称为 Hamilton 函数。

除逆变换(4.1.6)之外, 还有以下关系(见(2.8.26)式):

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.1.8)$$

利用以上关系, Lagrange 方程(2.1.19)变为

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.1.9)$$

方程组(4.1.9)和变换关系(4.1.6)一起构成以 Hamilton 变量 q, p 描述系统运动的 $2n$ 个一阶微分方程的方程组:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.1.10)$$

这组方程称为 Hamilton 正则方程组。求解这组方程, 便得到系统的运动规律。

建立 Hamilton 函数时, 除简单情况外, 一般需要先建立 Lagrange 函数, 然后按(4.1.3)式求得 p_i ($i=1, \dots, n$); 再将 \dot{q} 解出表成 t, q, p 的函数(见(4.1.4)式), 代入(4.1.7)式才能得到以 Hamilton 变量 q, p 表示的 Hamilton 函数。

例题 4.1.1 以球坐标表示自由质点运动的正则方程。

解 设质点的质量为 m , 则以球坐标 r, θ, φ 表示的动能和势能为

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) \\ V &= V(t, r, \theta, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

按定义(2.2.2), 由 $L = T - V$ 计算得:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

由上式解出 $\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ 得:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{m} \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

这也是正则方程的前三个, 将上式代入(4.1.7)式, 得 Hamilton 函数:

$$H(t, q, p) = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] - V \quad (d)$$

代入(4.1.10)式的后 n 个方程, 得:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{mr^3} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) - \frac{\partial V}{\partial r}, \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\varphi^2 \cos \theta}{mr^2 \sin^3 \theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta}, \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

(c)与(e)合起来就是所需求之正则方程组。

例题 4.1.2 一质量可以不计的刚性杆绕固定点 O 转动。质量为 M 的圆盘套在刚性杆上且可沿杆滑动但无相对转动。圆盘对中心轴(与刚杆中心线重合)的转动惯量为 I_0 , 对与中心轴垂直并位于圆盘平面上的任意轴的转动惯量为 I , 在 O 点与圆盘之间以刚度为 k 的弹簧连接, 设弹簧原长为 l , 写出该系统的正则方程。

解: 取杆 OA 与铅直线的夹角 θ 及 OA 、 Oz 所构成平面与 Oxz 平面的夹角 φ 以及圆盘中心离 O 点的距离 r 为广义坐标。圆盘中心 C 的速度沿径向(r)、经线(φ)、纬线(θ)三个方向的分量为

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \dot{r}, & v_\varphi &= r \sin \theta \dot{\varphi} \\ v_\theta &= r \dot{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

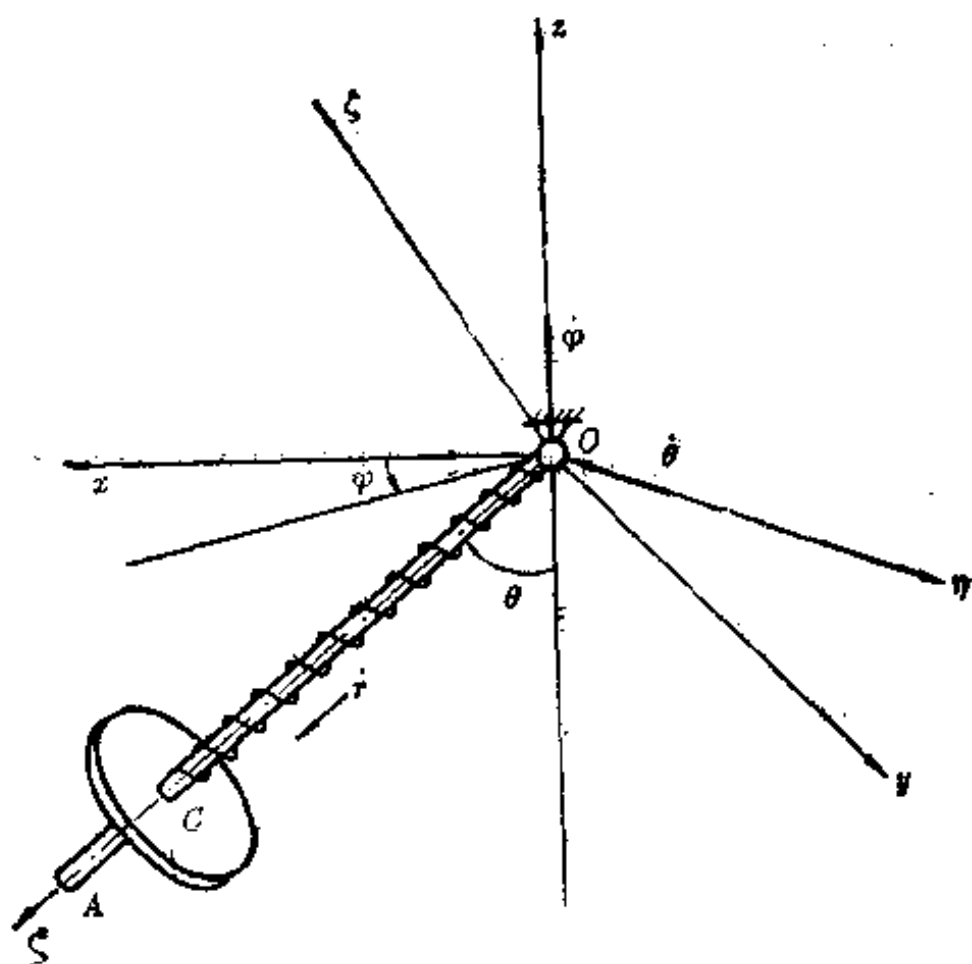


图 4.1

取坐标系 $O\xi\eta\zeta$ (如无特别说明, 本书都用右手系) 与杆相固结, 其中 $O\xi$ 沿 OA 方向, $O\xi$ 轴与 Oz 在同一铅直面内, 则圆盘的角速度在 $O\xi\eta\zeta$ 轴上的投影分别为

$$\omega_\xi = -\dot{\varphi} \cos \theta, \quad \omega_\eta = -\dot{\theta}, \quad \omega_\zeta = \dot{\varphi} \sin \theta \quad (b)$$

系统的动能 T 等于随质心平动的动能加上绕质心转动的动能:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \\ &\quad + \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2} [M \dot{r}^2 + (M r^2 + I) \dot{\theta}^2 + (M r^2 \sin^2 \theta + I \sin^2 \theta + I_0 \cos^2 \theta) \dot{\varphi}^2] \end{aligned} \quad (c)$$

系统的势能为重力势能及弹簧势能之和,即

$$V = -Mgr \cos \theta + \frac{1}{2}k(r-l)^2 \quad (d)$$

Lagrange 函数 L 等于 $T-V$ 。按 (2.6.6) 式计算得

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = M\dot{r}, & p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = Mr^2\dot{\theta} + I\dot{\theta} = (I + Mr^2)\dot{\theta} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I \sin^2 \theta + I_0 \cos^2 \theta + Mr^2 \sin^2 \theta)\dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

由上式解出广义速度如下:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{M}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{I + Mr^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{(I + Mr^2) \sin^2 \theta + I_0 \cos^2 \theta} \quad (f)$$

这便是前三个正则方程。将 (f) 式代入 (4.1.7) 式得 Hamilton 函数:

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_r^2}{2M} + \frac{p_\theta^2}{2(I + Mr^2)} + \frac{p_\varphi^2}{2[(I + Mr^2) \sin^2 \theta + I_0 \cos^2 \theta]} \\ &\quad + Mgr \cos \theta - \frac{k}{2}(r-l)^2 \end{aligned} \quad (g)$$

于是得后三个正则方程:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} \\ &= \frac{Mrp_\theta^2}{(I + Mr^2)^2} + \frac{Mr \sin^2 \theta p_\varphi^2}{[(I + Mr^2) \sin^2 \theta + I_0 \cos^2 \theta]^2} \\ &\quad - Mg \cos \theta + k(r-l) \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{-(I_0 - I - Mr^2) \sin \theta \cos \theta p_\varphi^2}{[(I + Mr^2) \sin^2 \theta + I_0 \cos^2 \theta]^2} + Mgr \sin \theta \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

正则方程的建立表明,系统的状态由 $2n$ 个正则变量 q_i, p_i 来描述,这 $2n$ 个变量实际上包含了位形和速度分布两个元素在内,这当然比 Lagrange 变量 q_i 的内容更为丰富,应该能更全面地描述

系统的运动过程,由 $2n$ 个正则变量构成的空间称之为相空间,相空间实际上是状态空间的另一种形式,系统在任一时刻的运动状态(坐标与动量)由相空间中一个点(相点)表示,系统的连续运动过程相当于相点在相空间中描绘出一条连续曲线——相轨迹,相轨迹具有状态空间中的轨迹的某些基本特征。例如,对于自治系统而言,在相空间中不同的初始条件相当于相空间中的不同点,而通过相空间中的一个指定点,正则方程只能确定一条积分曲线,所以相轨迹除了个别奇点外,不会相交,于是,全部相轨迹给出一族清晰的图象,使得我们对于各种初始条件下的运动有一个全貌的了解。然而在位形空间中的位形轨迹就没有这种优点。对于初始位形相同,但初始动量不同的条件,位形轨迹都由同一点出发,但以后的位形轨迹可以完全不同。因之,如果我们将所有可能的轨迹全部在位形空间中描绘出来,势必得到杂乱无章的混乱图象。

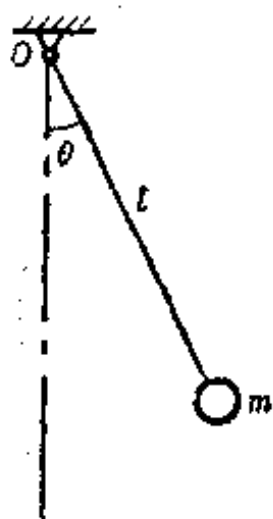


图 4.2

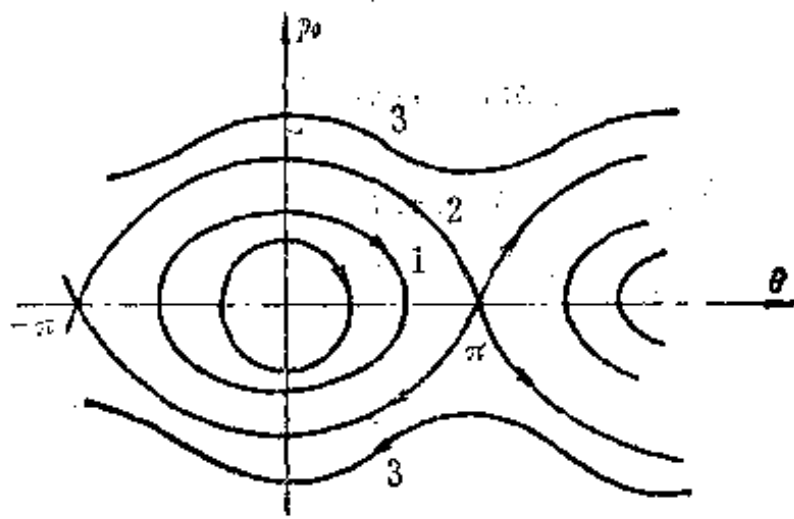


图 4.3

以单摆为例,质量为 m , 摆长为 l 的单摆的总机械能和正则变量 θ, p_θ 的关系为

$$h = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta \quad (4.1.11)$$

对于一定的总机械能 h , 相轨迹的方程为

$$p_\theta = \pm \sqrt{2ml^2(h + mgl \cos \theta)} \quad (4.1.12)$$

给 h 以不同值, 就可得到不同的相轨迹。我们注意到, 当 h 小于 mgl 时, 只有 $|\theta|$ 小于某一限定值 θ' 时, p_θ 才有解。 θ' 值由以下方程确定:

$$\cos \theta' = -\frac{h}{mgl} \quad (4.1.13)$$

这时 θ 值只能在 θ' 及 $-\theta'$ 的范围内变动。相应的相轨迹为第一类曲线, 即封闭曲线族。这就是说, 当总机械能 h 较小时, 我们得到摆动式的运动。当 h 逐渐减小并趋于零时, 封闭式的相轨迹也无限缩小, 最后缩为一个点, 即坐标原点。这个点 ($\theta = p_\theta = 0$) 就是单摆的稳定平衡位形。

当 $h > mgl$ 时, θ 取任何值都对应于 p_θ 的实数解, 这时 p_θ 永不为零, 但随 θ 周期性变动。这样我们就得到第三类相轨迹。这种不封闭的相轨迹表示单摆不再作振动式的运动, 而是作循环式的旋转。

当 $h = mgl$ 时, 相当于由摆动过渡到旋转的临界情况。这时我们得到第二类相轨迹。其特点为 $\theta = \pm(n+1)\pi$ 时 p_θ 等于零, 其中 n 为包含零在内的任何正整数。我们可以看到, 通过这些点的相轨迹不只一条, 它们都表示最高点是单摆的不稳定平衡位形。

鉴于在 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 范围之外的相轨迹实际上重复地描述了在这范围内的运动, 而且 $\theta = \pm\pi$ 实际上也表示同一位形, 所以我们可以把相轨迹画在半径为 1 (其实可以为任何值) 的圆柱面上。这时 θ 沿圆柱面的正截圆周方向度量, 只能在一 π 及 π 范围内变化。

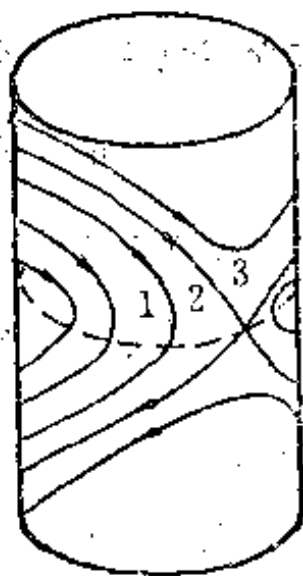


图 4.4

如果沿母线方向度量 p_i , 我们就得到圆柱面上的相轨迹如图。这时第三类相轨迹变成环绕圆柱面的封闭曲线。

以上虽然讨论的是二维相空间中的相轨迹, 但这种概念和方法仍然可以推广到任意系统中去, 这时我们在 $2n$ 维相空间中描述系统的运动。例如, 当系统作周期性运动时, 相轨迹表现为 $2n$ 维相空间中的封闭曲线, 相应地, 在每一个子空间或相平面 (q_i, p_i) 中得到封闭的平面曲线等等。当正则方程的解属于可分离变量*的情形时, $2n$ 维空间中的相轨迹也分解为 n 个二维相平面中的独立的相轨迹。

4.1.2 任意系统的正则方程

对于一般的非保守系统, 其 Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.3.1)$$

Q_i 是非保守的广义力。利用(4.1.8)式及广义动量的定义, 即得到以下形式的动力学方程:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.1.14)$$

这是非保守系统的 n 个正则方程, 加上 Legendre 变换式

$$q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i=1, \dots, n)$$

便构成了非保守系统的正则方程组:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \widehat{Q}_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.1.15)$$

其中 \widehat{Q}_i 是以广义坐标和广义动量表示的非保守广义力。

例题 4.1.3 有线性阻尼的弹簧-质点系统。质点质量为 m ,

* 见本章 4.9 节所述内容

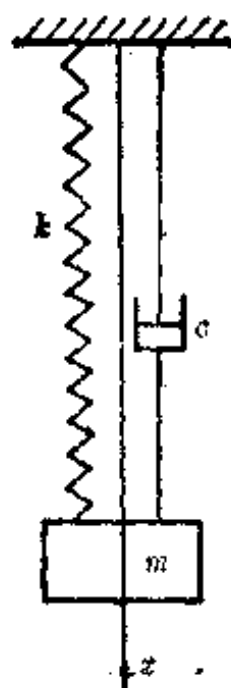


图 4.5

弹簧常数为 k , 阻尼系数为 c 。求系统的正则方程。

解 系统的动能为 $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, 势能为 $V = \frac{1}{2} k x^2$, 广义力 $Q = -c\dot{x}$, 广义动量 $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, Hamilton 函数 $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$, 正则方程:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \widehat{Q} = -kx - c\frac{p_x}{m}\end{aligned}$$

4.2 Hamilton 函数的物理意义及正则方程的首次积分

4.2.1 Hamilton 函数的物理意义

在 2.4 节我们曾讨论过完整有势系统的能量积分。比较公式 (2.4.5) 与 (4.1.7), 即可发现 Hamilton 函数正是以广义坐标 q 和

广义动量 p 表示的系统的广义能量, 即

$$H = E^* \quad (4.2.1)$$

对于一般的自然系统, 广义能量可表为 (见 (2.4.4) 式),

$$H = \widehat{T}_2 - T_0 + V \quad (4.2.2)$$

对于具有普通势的定常系统 (见 (2.4.8) 式), 有

$$H = T + V \quad (4.2.3)$$

即在此情况下, Hamilton 函数就是系统的总机械能。

4.2.2 能量积分

当函数 L 不显含时间 t 时 (即 $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$), 系统有广义能量积分 (见 2.4 节)。由 (4.1.8) 式可知, 此时有 $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, 即函数 H 也不显含时间 t , 且由正则方程 (4.1.10) 可得:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (4.2.4)$$

因此, 当函数 H 不显含时间 t 时, H 随系统的运动保持不变, 即

$$H(q, p) = h \quad (4.2.5)$$

h 是积分常数。这表明, 若以函数 L 描述系统的运动时有能量积分, 则以函数 H 描述系统的运动时, 同样有能量积分。存在 Hamilton 函数的系统今后将称之为 Hamilton 系统。

4.2.3 循环积分

若 q_r 是循环坐标 (其中 $r=1, \dots, k$), 即 q_r 不显含在函数 L 中, 那么由 (4.1.8) 式可知, q_r 一定也不会出现在函数 H 中。因而有

$$\frac{\partial H}{\partial q_r} = 0 \quad (r=1, \dots, k) \quad (4.2.6)$$

由正则方程(4.1.10), 便得:

$$p_r = h_r \quad (r=1, \dots, k) \quad (4.2.7)$$

h_r 是积分常数。也就是说当循环坐标 q_r 存在时, 与之共轭的广义动量 p_r 是运动的首次积分。

4.3 正则方程的降阶

4.3.1 利用能量积分降阶

设系统有能量积分

$$H(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) = h \quad (4.3.1)$$

函数 H 中至少有一个 p , 不失一般性, 假定它是 p_1 , 即

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = 0 \quad (4.3.2)$$

因此, 可从(4.3.1)式解出 p_1 :

$$p_1 = -K(q_1, \dots, q_n; p_2, \dots, p_n; h) \quad (4.3.3)$$

将 p_1 的表达式(4.3.3)代入(4.3.1)式, 得恒等式:

$$H(q_1, \dots, q_n; -K, p_2, \dots, p_n) \equiv h \quad (4.3.4)$$

将上式对 q_r, p_r 求偏导数:

$$\frac{\partial H}{\partial q_r} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial(-K)}{\partial q_r} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_r} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial(-K)}{\partial p_r} = 0 \quad (r=2, \dots, n) \quad (4.3.5)$$

得

$$\frac{\partial K}{\partial q_r} = \frac{\partial H}{\partial q_r} / \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial K}{\partial p_r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} / \frac{\partial H}{\partial p_1} \quad (r=2, \dots, n) \quad (4.3.6)$$

令

$$q'_r = \frac{dq_r}{dq_1}, \quad p'_r = \frac{dp_r}{dq_1}$$

则

$$q'_r = \frac{dq_r}{dq_1} = \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1}, \quad p'_r = \frac{dp_r}{dq_1} = \frac{\dot{p}_r}{\dot{q}_1} \quad (r=2, \dots, n) \quad (4.3.7)$$

将正则方程(4.1.10)代入(4.3.7)式,利用等式(4.3.6),使得:

$$\left. \begin{aligned} q'_r &= \frac{\frac{\partial H}{\partial p_r}}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{\partial K}{\partial p_r} \\ p'_r &= \frac{-\frac{\partial H}{\partial q_r}}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = -\frac{\partial K}{\partial q_r} \end{aligned} \right\} (r=2, \dots, n) \quad (4.3.8)$$

方程组(4.3.8)是以 q_1 代替 t ,以 $q_2, \dots, q_n; p_2, \dots, p_n$ 为正则变量,以 K 为Hamilton函数的正则方程,称为Whittaker方程,是 $2(n-1)$ 阶的,比原方程组降低两阶。这与2.8.1节中利用广义能量积分使Lagrange方程组降低两阶是一致的。将方程(4.3.8)积分,可得:

$$\left. \begin{aligned} q_r &= q_r(q_1, h, C_1, \dots, C_{2n-2}) \\ p_r &= p_r(q_1, h, C_1, \dots, C_{2n-2}) \end{aligned} \right\} (r=2, \dots, n) \quad (4.3.9)$$

将上式代入公式(4.3.3),得到类似表达式

$$p_1 = -K^*(q_1, h, C_1, \dots, C_{2n-2}) \quad (4.3.10)$$

q_1 与时间的关系可由 $\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$ 积分得出:

$$t = \int -\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} + C_{2n-1} \quad (4.3.11)$$

这里, $\frac{\partial H}{\partial p_1}$ 中的一切变量都需以(4.3.9)、(4.3.10)等表达式代入,

所得 t 与 q_1 的关系式中, 包含有 $h, C_1, \dots, C_{2n-2}, C_{2n-1}$ 共 $2n$ 个常数。将由 (4.3.11) 式求得的 $q_1(t)$ 代入 (4.3.9) 及 (4.3.10) 式, 便得到原正则方程的解。

4.3.2 利用循环积分降阶

设系统有 s 个循环坐标, 不失一般性, 假定它们是 q_1, \dots, q_s , 即

$$H = H(q_{s+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n; t) \quad (4.3.12)$$

则由 (4.2.7) 式, 得到以下积分

$$p_r = h_r, \quad (r = 1, \dots, s) \quad (4.3.13)$$

其中 $h_r (r = 1, \dots, s)$ 是积分常数。将上式代入 (4.3.12) 式, 可得

$$\bar{H} = \bar{H}(q_{s+1}, \dots, q_n, p_{s+1}, \dots, p_n; h_1, \dots, h_s; t) \quad (4.3.14)$$

对于 $q_{s+1}, \dots, q_n; p_{s+1}, \dots, p_n$ 这 $n-s$ 对共轭变量, 仍有如下的正则方程

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q_i} \quad (i = s+1, \dots, n) \quad (4.3.15)$$

其中函数 \bar{H} 包含 s 个任意常数 h_1, \dots, h_s 。这一正则方程组是 $2(n-s)$ 阶的, 比原方程组降低了 $2s$ 阶。这与 2.8.3 节中每一循环坐标使 Lagrange 方程降低两阶也是一致的。将方程组 (4.3.15) 积分, 可得:

$$\left. \begin{aligned} q_i &= q_i(t, h_1, \dots, h_s; C_1, \dots, C_{2n-2s}) \\ p_i &= p_i(t, h_1, \dots, h_s; C_1, \dots, C_{2n-2s}) \end{aligned} \right\} (i = s+1, \dots, n) \quad (4.3.16)$$

将正则方程组前 s 个方程积分, 便有:

$$q_r = \int \frac{\partial \bar{H}}{\partial h_r} dt + \alpha_r, \quad (r = 1, \dots, s) \quad (4.3.17)$$

其中 α_r 是积分常数, 而 $\frac{\partial \bar{H}}{\partial h_r}$ 中 q, p 均需以表达式 (4.3.16) 代入。这

样便求出了全部有限形式的运动方程。

例题 4.3.1 质点 A 的质量为 m , 在中心引力场中运动。已知引力 $F = -\frac{\mu m}{r^2}$, 其中 μ 是引力常数。求其正则方程并进行积分 (此所谓平面 Kepler 问题)。

解 由于质点在平面上运动, 可取极坐标 r, θ 为广义坐标, 于是动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \quad V = -\frac{\mu m}{r} \quad (a)$$

由 Lagrange 函数 L 或 $T - V$ 可得:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad (b)$$

因为是定常系统, Hamilton 函数为

$$H = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{\mu m}{r} \quad (c)$$

正则方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{m}, & \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{\mu m}{r^2}, & \dot{p}_\theta &= \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

本问题中函数 H 不含 θ , 故 θ 是循环坐标, 可利用循环坐标降阶。由 $\dot{p}_\theta = 0$ 得 $p_\theta = k$, 代入函数 H , 便有

$$\bar{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{k^2}{2mr^2} - \frac{\mu m}{r} \quad (e)$$

由此可得

$$\dot{r} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial r} = \frac{k^2}{mr^3} - \frac{\mu m}{r^2} \quad (f)$$

这是 2 阶的微分方程组, 比原方程降低了两阶。

又因函数 \bar{H} 中不显含时间 t , 因而有能量积分:

$$\bar{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{h_\theta^2}{2mr^2} - \frac{\mu m}{r} = h \quad (g)$$

利用能量积分降阶。由(g)解出 p_r :

$$p_r = \left[\left(h + \frac{\mu m}{r} - \frac{h_\theta^2}{2mr^2} \right) 2m \right]^{1/2} \quad (h)$$

由

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} = \frac{1}{m} \left[2m \left(h + \frac{\mu m}{r} - \frac{h_\theta^2}{2mr^2} \right) \right]^{1/2}$$

得

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{2 \left[\frac{h}{m} + \frac{\mu}{r} - \frac{h_\theta^2}{2m^2 r^2} \right]}} + C_r, \quad (h_\theta' = h_\theta^2 = \text{常数}) \quad (i)$$

由上式求积得 $r(t)$, 代入 θ 后便得出:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h_\theta}{mr^2(t)} \quad (j)$$

积分后可求得 $\theta(t)$ 。

将(d)式中的第一式除(j)式并考虑到(h)式, 则有

$$d\theta = \frac{h_\theta}{mr^2} \left[2 \left(\frac{h_\theta}{m} + \frac{\mu}{r} \right) - \frac{h_\theta^2}{m^2 r^2} \right]^{-1/2} dr \quad (k)$$

令 $z = \frac{1}{r}$, 因而 $dz = -\frac{dr}{r^2}$, 则上式可写成

$$\begin{aligned} \theta &= \int \frac{-h_\theta dz}{\sqrt{2(mh + \mu m^2 z) - h_\theta^2 z^2}} + C, \\ &= \arccos \frac{-\frac{\mu m^2}{h_\theta} + h_\theta z}{\sqrt{2mh + \frac{\mu^2 m^4}{h_\theta^2}}} + C. \end{aligned} \quad (l)$$

适当选取初值, 使积分常数 $C = 0$, 并令

$$p = \frac{h_\theta^2}{\mu m^2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2h_\theta^2 h}{m^3 \mu^2}} \quad (m)$$

即得出质点运动的轨迹方程

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (n)$$

例题 4.3.2 具有水平轨道的框架可绕铅直轴转动。沿轨道有质量为 m 的小球在运动。作用在小球上的力具有势函数 $V(r)$ ，其中 r 是小球到转轴的距离。求小球的运动微分方程

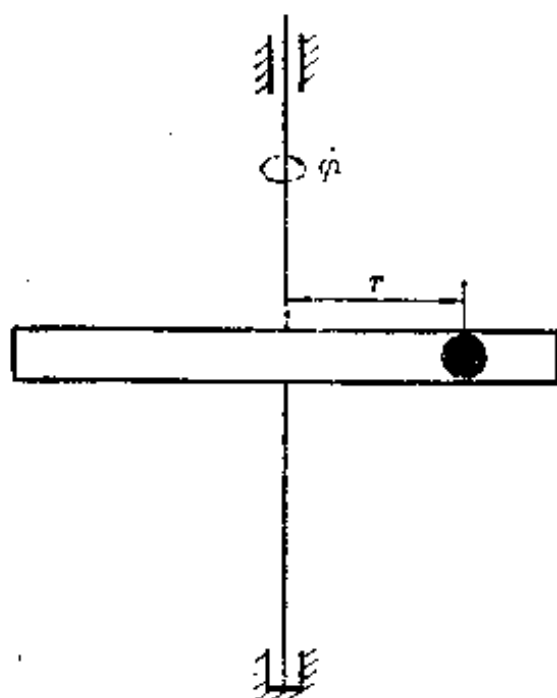


图 4.6

解 设框架转角为 φ ，框架对铅直轴的转动惯量 $I = mk^2$ 。取 r, φ 为广义坐标，则动能为

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r^2 + k^2) \dot{\varphi}^2] \quad (a)$$

两个广义动量分别为

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m(r^2 + k^2) \dot{\varphi} \quad (b)$$

这是保守系统，故 Hamilton 函数等于系统的总机械能：

$$H = T + V = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2 + k^2} \right] + V(r) \quad (c)$$

因而有能量积分

$$H = h_1 \quad (d)$$

又由于 φ 是循环坐标, 因而有循环积分

$$p_\varphi = h_2 \quad (e)$$

将 (d)、(e) 代入 (c) 式后, 得

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{h_2^2}{r^2 + k^2} \right] + V(r) = h_1 \quad (f)$$

解出 p_r :

$$p_r = \sqrt{2m[h_1 - V(r)] - \frac{h_2^2}{r^2 + k^2}} \quad (g)$$

由 (b) 式可得

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p_r}{m} = \sqrt{\frac{2[h_1 - V(r)]}{m} - \frac{h_2^2}{m^2(r^2 + k^2)}} \quad (h)$$

这便是小球运动的微分方程, 进一步积分后可求其解。

4.4 Poisson 括号与 Lagrange 括号

上一节讨论了如何利用首次积分使正则方程降阶的方法, 对于 $2n$ 阶的方程, 若能找到 $2n$ 个独立的首次积分

$$f_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n; t) = C_i \quad (i = 1, \dots, 2n) \quad (4.4.1)$$

便可以得到有限形式的运动方程:

$$q_i = q_i(t, C_1, \dots, C_{2n}), \quad p_i = p_i(t, C_1, \dots, C_{2n}) \quad (4.4.2)$$

方程中含有 $2n$ 个积分常数 C , 由系统的初始状态 q^0, p^0 决定。

对于一般系统, 要找到 $2n$ 个首次积分并不易作到, 但多一个首次积分就可以使方程多降阶一次, 因此, 应尽可能地多找一些首次积分, 以克服求解中的困难。除了前述能量积分, 循环积分之外, Poisson 提出了一个寻求首次积分的一般性方法, 见下节。

4.4.1 Poisson 括号

任意二函数 $u(t, q, p), v(t, q, p)$ 的偏导数所组成的如下表达:

式记作 (u, v) , 称为 Poisson 括号:

$$(u, v) \triangleq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) \quad (4.4.3)$$

根据上述定义, (u, v) 也可以写成

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(u, v)}{\partial(q_i, p_i)} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial q_i} & \frac{\partial u}{\partial p_i} \\ \frac{\partial v}{\partial q_i} & \frac{\partial v}{\partial p_i} \end{vmatrix} \quad (4.4.4)$$

对于任意函数 $u(t, q, p), v(t, q, p), w(t, q, p)$ 组成的 Poisson 括号有如下的性质:

- 1°. $(u, v) = -(v, u)$,
- 2°. $(cu, v) = c(u, v)$, (c 是常数)
- 3°. $(u+v, w) = (u, w) + (v, w)$
- 4°. $((u, v), w) + ((v, w), u) + ((w, u), v) = 0$
- 5°. $\frac{\partial}{\partial t}(u, v) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + \left(u, \frac{\partial v}{\partial t} \right)$

以上各条均可借助行列式性质直接证明。其中第四条称为 Poisson 恒等式

若函数 $f(t, q, p) = C$ 是正则方程 (4.1.9) 的一个首次积分, 则在运动过程中任一时刻均应有

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0 \quad (4.4.5)$$

将 (4.1.10) 式代入上式, 可得

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0$$

或写成

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0 \quad (4.4.6)$$

上式是函数 $f(t, q, p)$ 成为正则方程 (4.1.10) 的首次积分的必要且充分的条件。

最后还应指出 Poisson 括号的以下性质:

$$(q_i, q_j) = 0, (p_i, p_j) = 0, (q_i, p_j) = \delta_{ij} \quad (4.4.7)$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecker 记号。以上括号又称为基本 Poisson 括号。

4.4.2 Jacobi-Poisson 定理

定理 如果 f, g 是正则方程组 (4.1.10) 的两个首次积分, 则 (f, g) 也一定是该方程组的首次积分。

证明: 因为 f, g 是首次积分, 则必有 (见 (4.4.6) 式)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial t} + (g, H) = 0 \quad (4.4.8)$$

由上式及 Poisson 括弧性质 5° 及 1°, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f, g)}{\partial t} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}, g \right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t} \right) \\ &= -[(f, H), g] - [f, (g, H)] \\ &= [(H, f), g] + [(g, H), f] \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

在上式两边同加以 $[(f, g), H]$, 则由 Poisson 恒等式 (即性质 4°) 即可得出:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f, g)}{\partial t} + [(f, g), H] &= [(H, f), g] + [(g, H), f] \\ &\quad + [(f, g), H] = 0 \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

由 (4.4.6) 式可知, (f, g) 必为方程组的首次积分, 证毕。

上述定理给出了一个找运动积分的法则: 由两个已知的首次积分, 可以求出第三个首次积分。这样一来, 似乎我们可以得到所需要的全部 $2n$ 个首次积分了。但事实并不尽如人意。许多例子表明, 这样得到的首次积分往往恒等于零, 也可能是已知首次积分的函数 (即不是独立的首次积分)。但无论如何, Jacobi-Poisson 定

理毕竟还是提供了一个方法,有可能找到新的独立的首次积分。

例题 4.4.1 质点 A 的质量为 m , 受中心引力作用。引力与 r 的一次方成正比, 即 $F = -kr$, (k 是比例常数)。利用 Jacobi-Poisson 定理求新的首次积分。

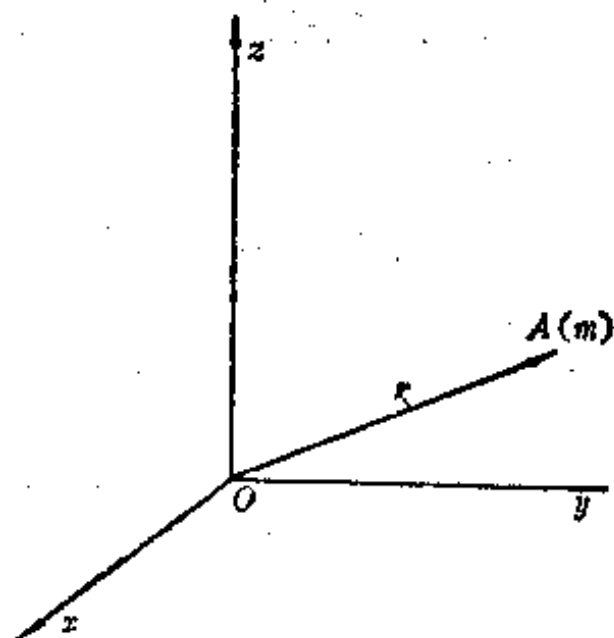


图 4.7

解: 以直角坐标表示的动能和势能为

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ V &= \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

广义动量为

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad (b)$$

因为是保守系统, 故 Hamilton 函数由以下式子表示:

$$H = T + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \quad (c)$$

于是得到正则方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p_x}{m}, & \dot{y} &= \frac{p_y}{m}, & \dot{z} &= \frac{p_z}{m}; \\ \dot{p}_x &= -kx, & \dot{p}_y &= -ky, & \dot{p}_z &= -kz \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

因为是中心力, 质点对各坐标轴之动量矩守恒, 于是有首次积分

$$f_1 = zp_y - yp_z = C_1, \quad f_2 = zp_x - xp_z = C_2 \quad (e)$$

利用 Jacobi-Poisson 定理, 得第三个积分:

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &= \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial p_x} - \frac{\partial f_1}{\partial p_x} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial p_y} - \frac{\partial f_1}{\partial p_y} \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial p_z} \\ &\quad - \frac{\partial f_1}{\partial p_z} \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ &= yp_x - xp_y = C_3 \end{aligned} \quad (f)$$

这正是质点对 z 轴之动量矩守恒。

在此问题中, 由于 H 不显含 t , 因而 $H = h$ 也是一个首次积分。但可以验证 H 和前三个动量矩积分的 Poisson 括号都恒等于零, 由此并不能得到新的首次积分。

4.4.3 Lagrange 括号

设正则变量 q_i, p_i 是变量 u, v 的函数, 定义以下微分式为 Lagrange 括号, 并记作 $[u, v]$:

$$[u, v] \triangleq \sum \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial p_i}{\partial u} \right) \quad (4.4.11)$$

根据上述定义, $[u, v]$ 也可以写成

$$[u, v] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (u, v)} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial q_i}{\partial v} \\ \frac{\partial p_i}{\partial u} & \frac{\partial p_i}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (4.4.12)$$

容易验证, Lagrange 括号有以下性质:

$$[q_i, q_k] = 0, \quad [q_i, p_k] = \delta_{ik}, \quad [p_i, p_k] = 0 \quad (i, k = 1, \dots, n) \quad (4.4.13)$$

Lagrange 括号与 Poisson 括号之间存在某种关系, 为了研究

这种关系,不失一般性,将 $2n$ 个变量 $u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_n$ 用 u_1, u_2, \dots, u_{2n} 表示,它们都是 q_i, p_i 的函数,对于任意两个指标 r, s 可以建立 Poisson 括号 (u_r, u_s) 及 Lagrange 括号 $[u_r, u_s]$, 现在来求以下两种括号乘积之和:

$$\sum_{r=1}^{2n} (u_r, u_i) [u_r, u_j] = \sum_{r=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial u_r}{\partial q_k} \frac{\partial u_i}{\partial p_k} - \frac{\partial u_r}{\partial p_k} \frac{\partial u_i}{\partial q_k} \right) \times \\ \times \left(\frac{\partial q_l}{\partial u_r} \frac{\partial p_l}{\partial u_j} - \frac{\partial q_l}{\partial u_j} \frac{\partial p_l}{\partial u_r} \right) \quad (4.4.14)$$

这个表达式共有四项,其中第一项为

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial p_l}{\partial u_j} \frac{\partial u_i}{\partial p_k} \sum_{r=1}^{2n} \frac{\partial q_l}{\partial u_r} \frac{\partial u_r}{\partial q_k} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial p_l}{\partial u_j} \frac{\partial u_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_l}{\partial q_k} \\ = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial p_l}{\partial u_j} \frac{\partial u_i}{\partial p_k} \delta_{lk} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial u_j} \quad (4.4.15)$$

其中 δ_{lk} 为 Kronecker 记号,四项中的最后一项实际上和 (4.4.15) 形式相同,只是 q_k 和 p_k 交换了位置,因此,这两项合并后成为

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial u_j} + \frac{\partial u_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u_j} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial u_j} = \delta_{ij} \quad (4.4.16)$$

展开式中第二、三两项对于求和并无贡献,其中之一包含一个含 u_r 的因子并由下式给出:

$$\sum_{r=1}^n \frac{\partial q_l}{\partial u_r} \frac{\partial u_r}{\partial p_k} = \frac{\partial q_l}{\partial p_k} = 0 \quad (4.4.17)$$

另一项和 (4.4.17) 类似,只是 p 和 q 交换了位置。因此 (4.4.16) 式就是所求的全部和:

$$\sum_{r=1}^{2n} (u_r, u_i) [u_r, u_j] = \delta_{ij} \quad (4.4.18)$$

如果把 Poisson 括号 (u_r, u_i) 看成 $2n \times 2n$ 阶矩阵 P 的元素

P_{ri} , 把 Lagrange 括号 $[u_r, u_j]$ 看成 $2n \times 2n$ 阶矩阵 L 的元素 L_{rj} , 则 (4.4.18) 就是转置矩阵 P^T 的第 i 行元素和矩阵 L 的第 j 列元素乘积之和, 根据矩阵乘法规则, 则

$$P^T L = I_{2n} \quad (4.4.19)$$

其中 I_{2n} 为 $2n$ 阶单位矩阵, 由此可知 P^T 和 L 互为逆矩阵。将 L 求逆后再转置即可得到由 Poisson 括号组成的矩阵 P , 这就是说, P 中的元素完全由 L 中的元素所决定, 反之亦然。

4.5 正则变换

4.5.1 正则变换的定义

正则方程虽然具有形式简单, 结构对称的优点, 但直接积分以求封闭形式的解析解时, 并未因此而减少多少困难*。Hamilton 所提出的正则变换理论为正则方程的求解开辟了一条新的途径。

设在 $2n$ 维相空间给定了正则变量变换(一般情况下还包含时间 t 作为参数):

$$\left. \begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p, t) \\ P_i &= P_i(q, p, t) \end{aligned} \right\} (i=1, \dots, n) \quad (4.5.1)$$

并假定

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)} \neq 0 \quad (4.5.2)$$

以保证存在逆变换:

$$\left. \begin{aligned} q_i &= q_i(Q, P, t) \\ p_i &= p_i(Q, P, t) \end{aligned} \right\} (i=1, \dots, n) \quad (4.5.3)$$

若任何正则方程

* 正则形式的方程对于编制程序在计算机上进行数值积分提供了十分有利的条件, 但这是另一问题。

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.1.10)$$

经(4.5.1)式所规定的变换后,仍保持正则形式,即

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.5.4)$$

则此种变换称为正则变换,也称为接触变换*,其中 $K=K(Q, P, t)$ 是变换后方程的 Hamilton 函数。如果新的 Hamilton 函数 K 的结构比原来的 Hamilton 函数 H 简单,就可能出现这样的情况,用新变量表示的运动方程(4.5.4)比原方程(4.1.10)易于积分。我们的目的就是要寻求建立在变换理论上的正则方程的积分方法,这里提出了两个问题:一是如何建立正则变换,或新旧变量要满足什么条件才能实现正则变换;二是如何使变换后的 Hamilton 函数具有最简单的形式。这是 Hamilton-Jacobi 理论不可分割的两个组成部分,本节着重论述正则变换理论。

4.5.2 $d\delta f = \delta df$

考察任意变量 u 的两种独立变化而导致的微分,其中之一记作 du , 另一个记作 δu , 为了区分这两种微分,假设 u 是独立变量 α 及 β 的函数,即

$$u = u(\alpha, \beta) \quad (4.5.5)$$

于是我们有

$$\left. \begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha \\ \delta u &= \frac{\partial u}{\partial \beta} \delta \beta \end{aligned} \right\} \quad (4.5.6)$$

* 在文献中,接触变换(contact transformations)一词的含义并不统一,多数作者对正则变换与接触变换不加区分,有些作者如 Sommerfeld 专指不含 t 的正则变换,有的作者如 Greenwood 专指满足 $\sum_i p_i \delta q_i - \sum_i P_i \delta Q_i = 0$ 的变换,有的作者如 Гантмахер 专指单价正则变换。

按以上求独立微分的法则, 进一步有

$$\left. \begin{aligned} d\delta u &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \delta \beta \right) d\alpha = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \delta \beta d\alpha \\ \delta du &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha \right) \delta \beta = \frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha} d\alpha \delta \beta \end{aligned} \right\} \quad (4.5.7)$$

由于二阶混合偏导数与求导次序无关, (4.5.7) 式右端应相等, 于是有以下基本关系:

$$d\delta u = \delta du \quad (4.5.8)$$

可以证明, 对于含有 $2n$ 个正则变量 $q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n$ 及 t 的函数, 同样具有类似性质, 为此分别求两种独立微分如下:

$$\left. \begin{aligned} df &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\ \delta f &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t \end{aligned} \right\} \quad (4.5.9)$$

两式分别求微分 $\delta(df)$ 及 $d(\delta f)$ 后, 有

$$\begin{aligned} \delta df &= \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} dq_j \delta q_i + \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} dp_j \delta p_i \right) + \\ &+ \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \delta dq_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta dp_i \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \delta t dt + \frac{\partial f}{\partial t} \delta dt \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

$$\begin{aligned} d\delta f &= \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \delta q_j dq_i + \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \delta p_j dp_i \right) + \\ &+ \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} d\delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} d\delta p_i \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt \delta t + \frac{\partial f}{\partial t} d\delta t \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

将以上两式相减可得:

$$d\delta f - \delta df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} (d\delta q_i - \delta dq_i) - \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} (d\delta p_i - \delta dp_i) +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial t}(d\delta t - \delta dt) \quad (4.5.12)$$

但由于

$$d\delta q_i - \delta dq_i = 0, \quad d\delta p_i - \delta dp_i = 0, \quad d\delta t - \delta dt = 0 \quad (4.5.13)$$

于是有

$$d\delta f = \delta df \quad (4.5.14)$$

性质(4.5.8)及(4.5.14)是为证明正则变换判别定理作准备的。

4.5.3 正则变换的判别定理

定理：如以下微分恒等式

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - K dt + dF \quad (4.5.15)$$

能满足，其中 F 为新、旧正则变量及 t 的函数，则变换(4.5.3)是正则变换。

方程(4.5.15)称为正则变换的判别条件。

本定理可用多种方法证明，在这里先用双线性协变量的性质证明，以后在第六章再用 Hamilton 原理给出另一证明。

取以下记号：

$$\omega_d = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt \quad (4.5.16)$$

$$\Omega_d = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - K dt \quad (4.5.17)$$

它们分别是关于 p_i, q_i, t 及 P_i, Q_i, t 的 Pfaff 式，再定义两个类似的 Pfaff 式：

$$\omega_\delta = \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \quad (4.5.18)$$

$$\Omega_\delta = \sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i - K \delta t \quad (4.5.19)$$

(4.5.15)式可表为以下两种独立微分式:

$$\omega_d = \Omega_d - dF \quad (4.5.20)$$

$$\omega_\delta = \Omega_\delta - \delta F \quad (4.5.21)$$

将(4.5.20)式作“ δ ”运算,将(4.2.1)式作“ d ”运算,然后相减,并考虑到

$$d\delta F - \delta dF = 0 \quad (4.5.22)$$

便有以下关系:

$$d\omega_\delta - \delta\omega_d = d\Omega_\delta - \delta\Omega_d \quad (4.5.23)$$

$d\omega_\delta - \delta\omega_d$ 及 $d\Omega_\delta - \delta\Omega_d$ 分别称为变换前及变换后的双线性协变量,以上结果表明:双线性协变量对于满足判别条件(4.5.15)的变换而言是不变量。

下面要证明,任何 Hamilton 系统的双线性协变量必为零,反之亦然。为此展开 $d\omega_\delta - \delta\omega_d$ 如下:

$$\begin{aligned} d\omega_\delta - \delta\omega_d &= \sum_{i=1}^n (dp_i \delta q_i - \delta p_i dq_i) + \sum_{i=1}^n p_i (d\delta q_i - \delta dq_i) \\ &\quad - (dH \delta t - \delta H dt) - H (d\delta t - \delta dt) \end{aligned} \quad (4.5.24)$$

由上一节所论证的 $d\delta$ 交换关系,上式可简化为

$$d\omega_\delta - \delta\omega_d = \sum_{i=1}^n (dp_i \delta q_i - \delta p_i dq_i) - (dH \delta t - \delta H dt) \quad (4.5.25)$$

但是因为 $H = H(q, p, t)$, 所以应有

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) \quad (4.5.26)$$

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial t} \delta t + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) \quad (4.5.27)$$

于是(4.5.25)式可化为

$$\begin{aligned} d\omega_5 - \delta\omega_4 = & \left(-\frac{\partial H}{\partial t} dt + dH \right) \delta t + \\ & + \sum_{i=1}^n \left\{ \left(dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \right) \delta p_i - \left(dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt \right) \delta q_i \right\} \end{aligned} \quad (4.5.28)$$

对于以 p, q 变量所规定的 Hamilton 系统而言, 上式中 δt 、 δp_i 、 δq_i 之系数应恒等于零:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial t} dt + dH &= 0 \\ dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt &= 0 \\ dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.5.29)$$

由此得出结论: 任何 Hamilton 系统的双线性协变量必为零, 反之亦然。但由双线性协变量的不变性可知, 如旧变量 q, p, H 的双线性协变量为零, 则在满足判别条件(4.5.5)的前提下, 新变量 Q, P, H 的双线性协变量也必为零, 因之变量 Q, P 及函数 K 也必然构成 Hamilton 系统。证毕。

关于正则变换, 以下几点值得注意:

(1) 正则变换并不是指能将某一个特定的正则方程变为另一正则方程的变换, 而是指能将由任何 Hamilton 函数 H 所确定的正则方程都变为正则方程的变换, 以上的论证充分说明了这一点。

(2) 在固定时间的条件下正则变换的判别条件常写成以下变分形式:

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i = \sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i + \delta F \quad (4.5.30)$$

对于一个给定的变换(4.5.1), 直接用(4.5.30)式检验其是否为正

则变换更为方便。

(3) 无论是判别条件(4.5.15)或(4.5.30)都是判别正则变换的充分条件,而非必要条件,就是说,当已知变换满足(4.5.15)或(4.5.30)式时,可以肯定该变换一定是正则的;但一个正则变换并不一定要满足(4.5.15)或(4.5.30)式。至于判别正则变换的必要且充分的条件则应要求以下等式成立:

$$c\left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt\right) = \sum_{i=1}^n (P_i dQ_i - K dt) + dF \quad (4.5.31)$$

或

$$\sum_{i=1}^n P_i dQ_i - c \sum_{i=1}^n p_i dq_i = R dt - dF \quad (4.5.32)$$

其中 c 为不为零的任意常数,此定理需用积分不变量的性质证明,详见有关著作*。常数 c 称为正则变换的价。满足判别条件(4.5.15)或(4.5.30)的变换称为单价正则变换,它只是一般正则变换(4.5.31)中的特殊情形,但也是得到广泛实际应用的情形。今后如无特别说明,凡提到正则变换时都指单价正则变换。

4.6 正则变换的一些重要性质

正则变换是保持正则形式不变的变换。由于正则形式的不变性会在变换中产生其它一些量的不变性,研究这些在变换中保持不变性的量,不但有重要的理论意义,而且它们作为和条件(4.5.15)或(4.5.30)等价的判别条件也有实用上的重要价值。下面讨论一些对正则变换保持不变的若干性质,简称正则不变性。

(1) 双线性协变量的正则不变性

* 见参考文献[36]。

双线性协变量具有正则不变性已在上一节得到证明, 对于固定时间的变换, 双线性协变量的正则不变性(4.5.23)可表为:

$$\sum_{i=1}^n (dp_i \delta q_i - dq_i \delta p_i) = \sum_{i=1}^n (dP_i \delta Q_i - \delta P_i dQ_i) \quad (4.6.1)$$

(2) 相对积分不变量的正则不变性

首先简要介绍相对积分不变量的概念。在任意正则变量 q_i, p_i ($i=1, \dots, n$) 构成的增广相空间中任取一连续封闭曲线 γ_0 , 并取 $t=t_0$ 及曲线 γ_0 上的任何正则变量 p_i, q_i 值作为初始状态。由每一个这种初始状态规定的运动表现为相空间中的一条随 t 而变的相轨迹, 所有这些相轨迹在相空间中形成一个“流线管”。在 $t=t_1$ 的另一时刻, 曲线 γ_0 随着相轨迹变为另一封闭曲线 γ_1 。Poincaré指出, 对于任何 Hamilton 系统, 沿回路 γ_0 及 γ_1 的以下积分不变:

$$I = \oint_{\gamma_0} \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \oint_{\gamma_1} \sum_{i=1}^n p_i dq_i \quad (4.6.2)$$

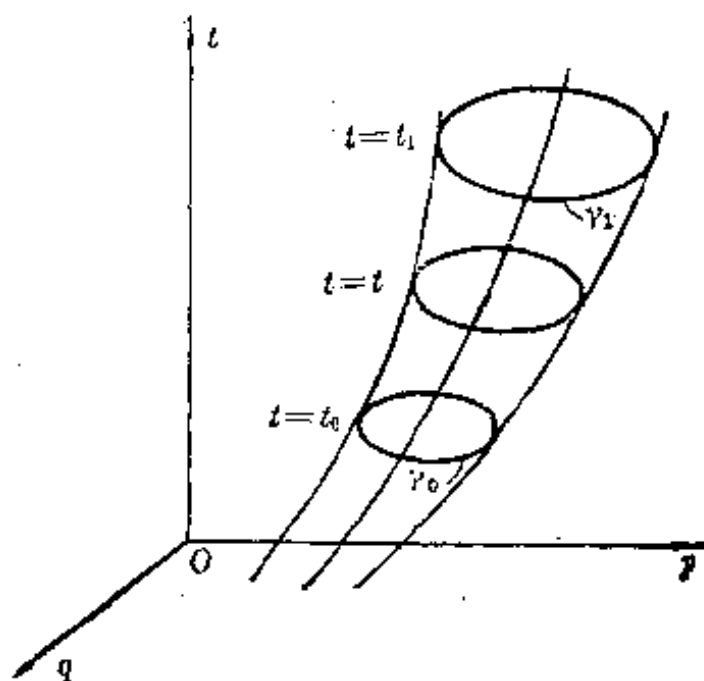


图 4.8

反之,如(4.6.2)式成立,该系统必定是正则的*。对应任意时刻 t 的流管上封闭曲线 γ 所作的环线积分 $I = \oint_{\gamma} p_i dq_i$ 称为 Poincaré 的相对积分不变量。

现在证明相对积分不变量具有正则不变性。对于固定时间的情况下,正则变换的判别条件可表为:

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i + dF \quad (4.6.3)$$

在 p, q 空间中的任何封闭曲线 γ 变换至 P, Q 空间后,应得到另一封闭曲线 Γ , 它们都对应同一时刻 t 。现在对(4.6.3)式左端及右端分别按环线 γ 及 Γ 积分,至于最后一项的环线积分 $\oint dF$ 应恒等于零,于是我们有:

$$I = \oint_{\gamma} \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \oint_{\Gamma} \sum_{i=1}^n P_i dQ_i \quad (4.6.4)$$

上式表明,相对积分不变量对正则变换保持不变,即具有正则不变性。

(3) Lagrange 括号及 Poisson 括号的正则不变性

在研究相对积分不变量时, $2n$ 维相空间的任意环线 γ 可视为二维子空间域的边界,相当于用参数 u, v 表示的 $2n$ 维相空间中的曲面边界,因之可取

$$\left. \begin{aligned} q_i &= q_i(u, v) \\ p_i &= p_i(u, v) \end{aligned} \right\} \quad (4.6.5)$$

积分不变量可表为

$$I = \oint_{\gamma} \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \oint_{\gamma} \sum_{i=1}^n \left(p_i \frac{\partial q_i}{\partial u} du + p_i \frac{\partial q_i}{\partial v} dv \right) \quad (4.6.6)$$

* 证明见前引甘特马赫著作

在 u, v 平面中由环线 γ 所包围的域用 σ 表示, 用 Stokes 定理可将上述环线积分化为面积分:

$$I = \iint_{\sigma} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(p_i \frac{\partial q_i}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(p_i \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) \right] du dv \quad (4.6.7)$$

或

$$I = \iint_{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial p_i}{\partial u} \right) du dv \quad (4.6.8)$$

由 Lagrange 括号的定义, 又可化为

$$I = \iint_{\sigma} [u, v]_{qp} du dv \quad (4.6.9)$$

既然积分不变量经正则变换后保持不变, 故应有

$$I = \iint_{\Sigma} [u, v]_{qp} du dv \quad (4.6.10)$$

其中 Σ 为域 σ 经变换至 P, Q 空间中的域, 于是由 (4.6.9) 及 (4.6.10) 式可知: Lagrange 括号对于正则变换具有不变性。以上结论显然可由一对变量 u, v 推广至 $2n$ 个变量 u_1, \dots, u_{2n} 。设 q_i, p_i 都是这 $2n$ 个变量的函数, 则上述不变性可表为:

$$[u_r, u_s]_{qp} = [u_r, u_s]_{QP} \quad (4.6.11)$$

由 4.4.3 节所述 Lagrange 括号与 Poisson 括号的矩阵关系可知, 如对于任何下标 r, s 的 Lagrange 括号上式成立, 则对于任何下标 r, s 的 Poisson 括号上式也成立:

$$(u_r, u_s)_{qp} = (u_r, u_s)_{QP} \quad (4.6.12)$$

因之, Poisson 括号对于正则变换也具有不变性。

在结束本节之前, 提出以下几个值得注意的问题:

(1) 上述几种正则不变性都是和固定时间条件下的正则变换判别条件

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i = \sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i + \delta F \quad (4.5.30)$$

相等价的,换言之,这些正则不变性都是使判别条件成立的充分必要条件,由上述正则不变性的论证不难确信这一点。

(2) 虽然正则不变性是根据在固定时间条件下的判别条件(4.5.30)论证的,但并不因此而使结论带来局限性。事实上,判别条件(4.5.30)和可变时间的判别条件

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - K dt + dF \quad (4.5.15)$$

是等价的,为了证明这一点,只要注意到在相对积分不变量的定义中,所有的 dq_i 及 dQ_i 都是等时变分而与 dt 无关,另外再由以下等式决定函数 K :

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (4.6.13)$$

(4.5.15)式就简化为固定时间的判别条件:

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i = \sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i + \delta F \quad (4.5.30)$$

反之,由(4.5.30)及(4.6.13)式又可得到(4.5.15)式,因之所有本节讨论的正则不变性,不仅对于判别条件(4.5.30),而且对于判别条件(4.5.15)都是它们成立的充分必要条件。

(3) 在讨论 Lagrange 括号及 Poisson 括号的正则不变性时, u_1 至 u_{2n} 是任意独立变量,如取

$$\left. \begin{aligned} u_i &= Q_i \\ u_{n+i} &= P_i \end{aligned} \right\} (i=1, \dots, n) \quad (4.6.14)$$

则方程(4.6.5)变成新旧正则变量的变换方程:

$$\left. \begin{aligned} q_i &= q_i(Q, P) \\ p_i &= p_i(Q, P) \end{aligned} \right\} \quad (4.6.15)$$

在这种情况下, Lagrange 括号的正则不变性(4.6.11)包括了以下三类恒等式:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_r} \frac{\partial p_i}{\partial Q_s} - \frac{\partial q_i}{\partial Q_s} \frac{\partial p_i}{\partial Q_r} \right) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial Q_r} \frac{\partial P_i}{\partial Q_s} - \frac{\partial Q_i}{\partial Q_s} \frac{\partial P_i}{\partial Q_r} \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial P_r} \frac{\partial p_i}{\partial P_s} - \frac{\partial q_i}{\partial P_s} \frac{\partial p_i}{\partial P_r} \right) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial P_r} \frac{\partial P_i}{\partial P_s} - \frac{\partial Q_i}{\partial P_s} \frac{\partial P_i}{\partial P_r} \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_r} \frac{\partial p_i}{\partial P_s} - \frac{\partial q_i}{\partial P_s} \frac{\partial p_i}{\partial Q_r} \right) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial Q_r} \frac{\partial P_i}{\partial P_s} - \frac{\partial Q_i}{\partial P_s} \frac{\partial P_i}{\partial Q_r} \right) = \delta_{rs} \end{aligned} \right\} \quad (4.6.16)$$

或

$$[Q_r, Q_s] = 0, \quad [P_r, P_s] = 0, \quad [Q_r, P_s] = \delta_{rs} \quad (4.6.17)$$

完全类似地, Poisson 括号的正则不变性等价于以下恒等式

$$(Q_r, Q_s) = 0, \quad (P_r, P_s) = 0, \quad (Q_r, P_s) = \delta_{rs} \quad (4.6.18)$$

利用(4.6.17)或(4.6.18)式判别一个给定变换的正则性是比较方便的。

例题 4.5.1 给定以下变换

$$Q = \sqrt{e^{-2q} - p^2}, \quad P = \arccos(pe^q)$$

判别其是否为正则变换。

解 由所给变换可求得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial q} &= \frac{-e^{-2q}}{\sqrt{e^{-2q} - p^2}}, & \frac{\partial Q}{\partial p} &= \frac{-p}{\sqrt{e^{-2q} - p^2}} \\ \frac{\partial P}{\partial q} &= \frac{-p}{\sqrt{e^{-2q} - p^2}}, & \frac{\partial P}{\partial p} &= \frac{-1}{\sqrt{e^{-2q} - p^2}} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

因此不难得到以下结果

$$\left. \begin{aligned} (Q, Q) &= 0, & (P, P) &= 0 \\ (Q, P) &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

完全符合条件(4.6.18)式, 因之给定变换是正则变换。

4.7 生成函数

4.7.1 生成函数的简单方案

(1) 以上我们讨论了正则变换的判别条件及某些性质, 现在转入建立正则变换的显式, 由判别条件

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - K dt + dF \quad (4.5.15)$$

来看, 生成函数(或母函数)的选择对正则变换的建立起了决定性作用。函数 F 一般可显含 t 及所有 $4n$ 个新旧正则变量 q, p, Q, P , 但由于新旧变量由(4.5.1)或(4.5.3)式相联系, 独立变量只有 $2n$ 个, 至于如何从 $4n$ 个变量选取 $2n$ 个独立变量, 要看判别条件的不同形式。由(4.5.15)式的构造可知, 方程含有 dq_i 及 dQ_i 两类变量微分, 因此自然应取 q, Q, t 作为独立变量。有人将这种变换称为自由正则变换。为了在变换式(4.5.1)中将 p 用 t, q, Q 表出, 必须满足以下不等式:

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \neq 0 \quad (4.7.1)$$

于是可从(4.5.1)式的前 n 个等式中解出 p :

$$p_i = p_i(q, Q, t) \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.7.2)$$

将上式再代入(4.5.1)式的后 n 个等式, 便可将 P 同样表达为 t, q, Q 的函数:

$$P_i = P_i(q, Q, t) \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.7.3)$$

生成函数 F 也只能显含 q, Q, t , 并记作

$$S(q, Q, t) = F(q, p(q, Q, t), Q, P(q, Q, t), t) \quad (4.7.4)$$

于是判别条件(4.5.15)有以下形式:

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - K dt + dS(q, Q, t)$$

$$= \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - K dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial S}{\partial t} dt \quad (4.7.5)$$

由于诸微分 $dq_1, \dots, dq_n, dQ_1, \dots, dQ_n, dt$ 是互相独立的, 于是 (4.7.5) 式等价于以下关系式:

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.7.6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_i} = -P_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.7.7)$$

当生成函数 S 选定后, (4.7.6) 式便决定了新正则方程的 Hamilton 函数 K , 而 (4.7.7) 则给出了所欲求之变换, 为了能从 (4.7.7) 的前 n 个方程解出 Q , 应要求 $\frac{\partial S}{\partial q_i} (i=1, \dots, n)$ 作为 Q_1, \dots, Q_n 的函数是独立的, 即应要求以下不等式满足:

$$\det \left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial Q_j} \right] \neq 0 \quad (4.7.8)$$

于是由 (4.7.7) 的前 n 个方程可解出 Q_i :

$$Q_i = Q_i(q, p, t) \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.7.9)$$

再代入 (4.7.7) 的后 n 个方程, 便可得到

$$P_i = P_i(q, p, t) \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.7.10)$$

至此, 所有的新变量均已用旧变量 q, p 表出。以 q, Q, t 为独立变量的生成函数 S 常称为第一类生成函数或第一类母函数。

(2) 取 $p_1, \dots, p_n, Q_1, \dots, Q_n$ 作为 $2n$ 个独立变量, 为此, 对判别条件作如下变化: 利用恒等式

$$d(p_i, q_i) = p_i dq_i + q_i dp_i \quad (4.7.11)$$

判别条件可以写为

$$d \sum_{i=1}^n p_i q_i - \sum_{i=1}^n q_i dp_i - H dt = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - K dt + dS$$

$$\text{或} \quad -\sum_{i=1}^n q_i dp_i - H dt = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - K dt + d\left(S - \sum_{i=1}^n p_i q_i\right)$$

由于 $p_1, \dots, p_n, Q_1, \dots, Q_n$ 是 $2n$ 个独立变量, 因此记

$$\left(S - \sum_{i=1}^n p_i q_i\right) \Big|_{(p, Q)} = S_2(p, Q, t) \quad (4.7.12)$$

判别条件成为

$$-\sum_{i=1}^n q_i dp_i - H dt = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - K dt + dS_2 \quad (4.7.13)$$

由于诸微分 $dp_1, \dots, dp_n, dQ_1, \dots, dQ_n, dt$ 是独立的, (4.7.13) 式等价于以下关系式:

$$K = H + \frac{\partial S_2}{\partial t} \quad (4.7.14)$$

$$q_i = -\frac{\partial S_2}{\partial p_i}, \quad P_i = \frac{\partial S_2}{\partial Q_i} \quad (4.7.15)$$

(4.7.14) 式给出了新的 Hamilton 函数 K , (4.7.15) 式给出了 $2n$ 个所需之正则变换, 为了将所有新变量表为旧变量的函数, 需保证变换的可逆性, 即要求 S_2 满足以下条件

$$\det \left[\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_i \partial Q_j} \right] \neq 0 \quad (4.7.16)$$

$S_2(p, Q, t)$ 称为第二类生成函数, 或第二类母函数。

(3) 取 $q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n$ 作为 $2n$ 个独立变量, 为此需利用恒等式

$$d(P_i Q_i) = P_i dQ_i + Q_i dP_i \quad (4.7.17)$$

将判别条件改写为

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = d \sum_{i=1}^n P_i Q_i - \sum_{i=1}^n Q_i dP_i - K dt + dS \quad (4.7.18)$$

由于 $q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n$ 是 $2n$ 个独立变量, 因此记

$$\left(S + \sum_{i=1}^n P_i Q_i \right) \Big|_{(q, P)} = S_3(q, P, t) \quad (4.7.19)$$

(4.7.18)式可改写为

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = - \sum_{i=1}^n Q_i dP_i - K dt + dS_3 \quad (4.7.20)$$

再由 $dq_1, \dots, dq_n, dP_1, \dots, dP_n, dt$ 的独立性, 便可得到和上式相等价的关系式:

$$K = H + \frac{\partial S_3}{\partial t} \quad (4.7.21)$$

$$p_i = \frac{\partial S_3}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S_3}{\partial P_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.7.22)$$

(4.7.21)式给出了新的 Hamilton 函数 K , (4.7.22)式给出了 $2n$ 个所需之变换, 为了将所有新变量表为旧变量的函数, 需保证变换的可逆性, 即要求 S_3 满足以下条件:

$$\det \left[\frac{\partial^2 S_3}{\partial q_i \partial P_j} \right] \neq 0 \quad (4.7.23)$$

函数 $S_3(q, P, t)$ 称为第三类生成函数或第三类母函数。

(4) 取 $p_1, \dots, p_n, P_1, \dots, P_n$ 作为 $2n$ 个独立变量, 为此需利用以下两组恒等式

$$d(p_i q_i) = p_i dq_i + q_i dp_i, \quad d(P_i Q_i) = P_i dQ_i + Q_i dP_i \quad (4.7.24)$$

判别条件可改写为

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n d(p_i q_i) - \sum_{i=1}^n q_i dp_i - H dt \\ &= \sum_{i=1}^n d(P_i Q_i) - \sum_{i=1}^n Q_i dP_i - K dt + dS_3 \end{aligned} \quad (4.7.25)$$

由于 $p_1, \dots, p_n, P_1, \dots, P_n$ 是独立变量, 因此记

$$\left[S + \sum_{i=1}^n (P_i Q_i - p_i q_i) \right] \Big|_{(p, P)} = S_4(p, P, t) \quad (4.7.26)$$

判别条件成为

$$-\sum_{i=1}^n q_i dp_i - H dt = -\sum_{i=1}^n Q_i dP_i - K dt + dS_4 \quad (4.7.27)$$

由 $dp_1, \dots, dp_n, dP_1, \dots, dP_n$ 及 dt 的独立性, (4.7.27) 式等价于以下关系式

$$K = H + \frac{\partial S_4}{\partial t} \quad (4.7.28)$$

$$q_i = -\frac{\partial S_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S_4}{\partial P_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.7.29)$$

其中 (4.7.28) 给出新的 Hamilton 函数, (4.7.29) 给出所需之 $2n$ 个变换, 为了保证变换的可逆性, 要求 S_4 满足以下不等式

$$\det \left[\frac{\partial^2 S_4}{\partial p_i \partial P_j} \right] \neq 0 \quad (4.7.30)$$

$S_4(p, P, t)$ 称为第四类生成函数或第四类母函数。

以上的讨论表明, 只要按四种方案之一选取独立变量, 则任意给定由这些变量构成的生成函数, 便可得到一个正则变换。但是对于给定的正则变换, 独立变量的选取是不能任意的。例如, 恒等变换

$$Q_i = q_i, \quad P_i = p_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.7.31)$$

显然是正则变换。但是此时显然不能取 $q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n$ 作为独立变量, 因 q_i 与 Q_i 不能独立变化, 同样, 也不能选取 $p_1, \dots, p_n, P_1, \dots, P_n$ 作为独立变量。

下面举几个简单的例子。首先, 取第三类生成函数为

$$S_3 = \sum_{i=1}^n P_i q_i \quad (4.7.32)$$

由 (4.7.21) 及 (4.7.22) 式给出以下变换关系

$$\left. \begin{aligned} K &= H \\ p_i &= \frac{\partial S_2}{\partial q_i} = P_i \\ Q_i &= \frac{\partial S_2}{\partial P_i} = q_i \end{aligned} \right\} \quad (4.7.33)$$

这就回答了上面提出的问题：恒等变换所要求的独立变量应取 $q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n$ 。

再取以下形式的生成函数：

$$S_2 = \sum_{j=1}^n f_j(q_1, \dots, q_n, t) P_j \quad (4.7.34)$$

其变换关系为

$$\left. \begin{aligned} K &= H + \frac{\partial S_2}{\partial t} \\ p_i &= \frac{\partial S_2}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial q_i} P_j \\ Q_i &= \frac{\partial S_2}{\partial P_i} = f_i(q_1, \dots, q_n, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.7.35)$$

值得注意的是，新坐标 Q_i 只和旧坐标 q_i 及时间 t 有关，而与旧动量无关，所以这种变换其实是很普通的坐标变换，又称为点变换。点变换的特征是在位形空间 (q_1, \dots, q_n) 及 (Q_1, \dots, Q_n) 之间建立了一一对应的关系。由于 f_j 是完全任意的函数，我们可以肯定一切点变换都是正则变换。

再取以下形式的第一类生成函数：

$$S = \sum_{i=1}^n q_i Q_i \quad (4.7.36)$$

其变换关系为

$$\left. \begin{aligned} K &= H \\ p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i} = Q_i \\ P_i &= -\frac{\partial S}{\partial Q_i} = -q_i \end{aligned} \right\} \quad (4.7.37)$$

这个变换在仅差一个正负号的情况下对坐标和动量进行了互换, 这个例子说明了经过正则变换后的变量一般不再具有坐标和动量那样的含义, 它们作为地位平等的一组独立的 $2n$ 个变量出现在运动方程中, 既不可能也无必要追究它们的物理意义。

4.7.2 生成函数的一般方案

以上讨论了构成生成函数的四种方案, 虽然这些方案已有足够广泛的应用, 但仍不能说它们已概括了全部生成函数的各种情况, 上面提到的四种方案都有一个共同特点: 在新变量中取全部的 Q_i 或全部的 P_i , 在旧变量中也是取全部的 q_i 或全部的 p_i 。更一般的方案是在这四组变量中各取一部分, 但不能包括互为共轭的正则变量 q_r, p_r 或 Q_r, P_r 。因之, 独立变量应有以下形式:

$$(q_1, \dots, q_l; p_{l+1}, \dots, p_n; Q_1, \dots, Q_m, P_{m+1}, \dots, P_n) \\ 0 \leq l, \quad 0 \leq m \leq n \quad (4.7.38)$$

可以证明*, 在变换(4.5.1)所联系的 $4n$ 个变量 q, p, Q, P 中, 恒能选出 $2n$ 个独立变量, 其中不包含任何一对共轭变量 q_r, p_r 或 Q_r, P_r , 即按(4.7.38)方式来选取独立变量总是可能的。

假设已将独立变量按(4.7.38)方式选取, 利用恒等式

$$\left. \begin{aligned} p_i dq_i &= d(p_i q_i) - q_i dp_i \\ P_i dQ_i &= d(P_i Q_i) - Q_i dP_i \end{aligned} \right\} \quad (4.7.39)$$

将判别条件写成

* 见前引甘特马赫的著作

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l p_i dq_i - \sum_{j=l+1}^n q_j dp_j - H dt = \\ = \sum_{s=1}^m P_s dQ_s - \sum_{k=m+1}^n Q_k dP_k - K dt + dU \end{aligned} \quad (4.7.40)$$

其中
$$U = F + \sum_{k=m+1}^n Q_k P_k - \sum_{j=l+1}^n q_j p_j \quad (4.7.41)$$

由于 $4n$ 个变量 q, p, Q, P 都可用 $2n$ 个独立变量(4.7.38)表出, 因此可认为 U 是独立变量(4.7.38)的函数, 于是由(4.7.40)式可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_i} &= p_i \quad (i=1, \dots, l); \quad \frac{\partial U}{\partial p_j} = -q_j \quad (j=l+1, \dots, n) \\ \frac{\partial U}{\partial Q_s} &= -P_s \quad (s=1, \dots, m); \quad \frac{\partial U}{\partial P_k} = Q_k \quad (k=m+1, \dots, n) \\ K &= H + \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (4.7.42)$$

这就是一般形式下的生成函数及由此导出的一般形式的变换, 显然, 上一节所述的四种变换都不过是这种一般变换的特例。

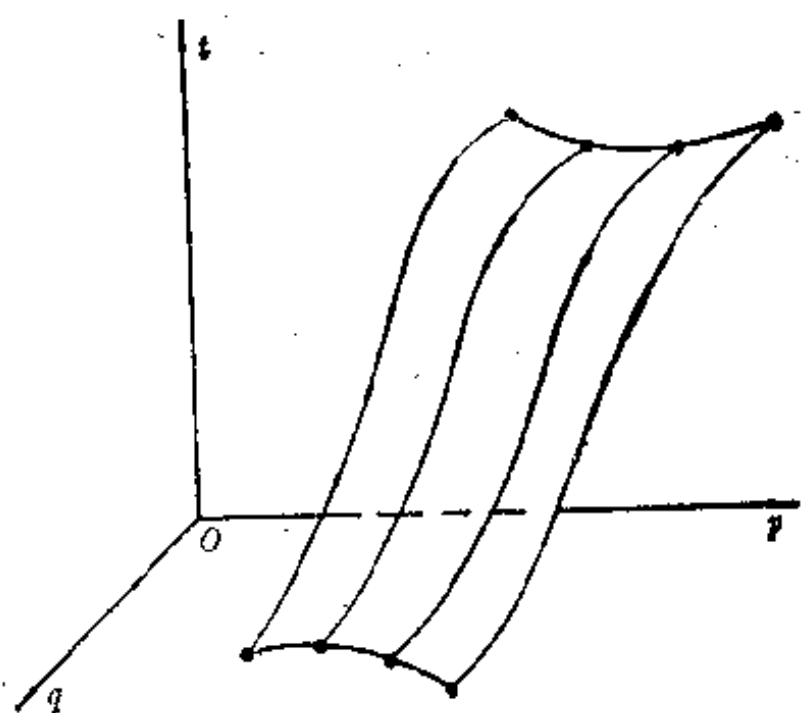
4.8 Hamilton-Jacobi 方程

4.8.1 Hamilton-Jacobi 方程

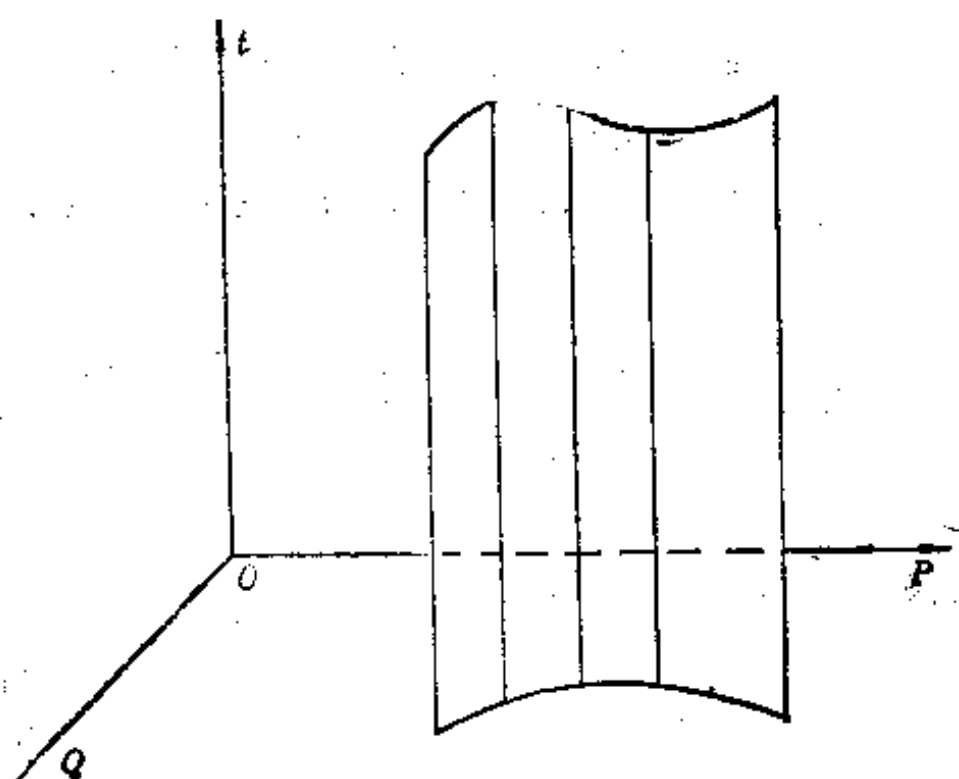
在 4.7 节我们讨论了由生成函数决定正则变换的方法, 变换后的 Hamilton 函数 K 也同时由生成函数所决定。但是寻找正则变换的目的是要通过变换使 K 有更多的循环坐标或更简单的形式, 以利于求解。因此也可以从相反方向提出问题, 即按照要求变换后的 Hamilton 函数 K 所具有的形式去求生成函数。

最简单的 Hamilton 函数莫过恒等于零。若令

$$K \equiv 0 \quad (4.8.1)$$



(a)



(b)

图 4.9

则由(4.7.42)式得

$$K = H + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (4.8.2)$$

满足上式的生成函数 U 所产生的变换称为化零正则变换。由于变换后的 Hamilton 函数 $K \equiv 0$, 故有

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.8.3)$$

即

$$Q_i = \alpha_i, \quad P_i = \beta_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.8.4)$$

α_i, β_i 是 $2n$ 个积分常数。这样便得到了动力学问题的解。从几何意义看, 就是原相空间 (q, p) 中每一条解曲线都变换成新相空间 (Q, P) 中的一点 (α, β) 。或者说, 原增广相空间 (t, q, p) 中的解曲线, 在新增广相空间 (t, Q, P) 都成了平行于 t 轴的直线 (图 4.9)。

下面着重研究在第一类生成函数 $S(q, Q, t)$ 中的化零正则变换, 将 $S(q, Q, t)$ 中的 Q_i 用 α_i 代入 (见 (4.8.4) 式), 即:

$$S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) \quad (4.8.5)$$

将 (4.8.4) 式代入第一类变换公式 (4.7.7) (代入其他变换公式也一样) 得

$$\left. \begin{aligned} P_i &= -\frac{\partial S}{\partial Q_i} \Big|_{Q_i=\alpha_i} = -\frac{\partial S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i \\ P_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \quad (4.8.6)$$

为了实现第一类正则变换, 还应满足不等式 (4.7.8):

$$\det \left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial Q_j} \right] = \det \left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right] \neq 0 \quad (4.8.7)$$

因而可由 (4.8.5) 式的前 n 个方程将 q 作为 α, β 的函数解出

$$q_i = q_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, t) \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.8.8)$$

将 q 的这个表达式再代入 (4.8.6) 式的后 n 个等式, 便得到

$$p_i = p_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, t) \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.8.9)$$

(4.8.8) 及 (4.8.9) 两组表达式就是以原变量表示的系统状态方程的通解, 它包含有 $2n$ 个任意常数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n$, 这些常数可由 $t=t_0$ 时系统的初始状态 $q_1^0, \dots, q_n^0, p_1^0, \dots, p_n^0$ 决定。

由此可见, 只要找到了化零正则变换的生成函数 S , 动力学问题就解决了。下面讨论如何找这个生成函数。

第一类变换的生成函数为 S , 应满足 (4.7.6) 式:

$$H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (4.8.10)$$

即由 S 决定的正则变换使新 Hamilton 函数变为零, 但是 p_i 并非变换中的独立变量, 它们由变换关系 (4.8.6) 所决定, 因此生成函数 S 应含有 n 个任意常数 α , 并满足如下的关系式 (见 (4.8.6) 式)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) = 0 \quad (4.8.11)$$

这是关于 S 的一阶偏微分方程, 称为 Hamilton-Jacobi 方程, 简记作 H-J 方程, 其中自变量为 t, q_1, \dots, q_n , 共 $n+1$ 个。

如果不采用第一类变换而用其它三类变换及相应的生成函数, 则有类似的 Hamilton-Jacobi 方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_2}{\partial t} + H\left(t, p, \frac{\partial S_2}{\partial p}\right) &= 0 \\ \frac{\partial S_3}{\partial t} + H\left(t, q, \frac{\partial S_3}{\partial q}\right) &= 0 \\ \frac{\partial S_4}{\partial t} + H\left(t, p, \frac{\partial S_4}{\partial p}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8.12)$$

对于四类特殊的生成函数而言, 实际上只有两种不同的 H-J 方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + H\left(t, q, \frac{\partial U}{\partial q}\right) &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + H\left(t, p, \frac{\partial U}{\partial p}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8.13)$$

实际应用时,对于每一个给定的 Hamilton 函数 H ,究竟应采用何种 $H-J$ 方程,要由最易于求得生成函数来决定。

4.8.2 Hamilton-Jacobi 定理

根据偏微分方程理论,偏微分方程的通解要包含任意函数,而对于有 $n+1$ 个自变量的偏微分方程,其仅含 $n+1$ 个独立的任意常数的解,称为该偏微分方程的全积分。从以上的讨论可知,我们所需要的生成函数正是 $H-J$ 方程的全积分。但由于方程不包含函数 S 本身,只含有其偏导数,所以如果 S 是解,则 $S+c$ (c 是任意常数)也是解。这个常数 c 称为可加常数,它对正则方程的求解不起作用,可以不予考虑。于是我们所需要的全积分只要求包含 n 个独立的任意常数。而这个要求恰好和(4.8.5)式中的生成函数 S 含有 n 个积分常数 α_i 是一致的。

以上的讨论归结为如下的 Hamilton-Jacobi 定理:

如果 $S(q, \alpha, t)$ 是 $H-J$ 方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) = 0$$

的一个积分,则在满足以下条件

$$\det \left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right] \neq 0 \quad (4.8.14)$$

时,由下列方程

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.8.15)$$

解出的

$$q_i = q_i(t, \alpha, \beta), \quad p_i = p_i(t, \alpha, \beta) \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.8.16)$$

必是原 Hamilton 方程的通解,其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n$ 是积分常数。

4.9 几种特殊情况下 Hamilton-Jacobi 方程的求解

4.9.1 H 不显含时间 t 的情况

当 Hamilton 函数不显含 t 时, 有 $\frac{\partial H}{\partial t}=0$, 于是存在广义能量积分

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = h \quad (4.9.1)$$

方程(4.8.11)简化为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0 \quad (4.9.2)$$

因方程(4.9.2)不显含 t , 故可取 S 为以下形式:

$$S = -ht + W(q_1, \dots, q_n) \quad (4.9.3)$$

W 是只含广义坐标 q 的未知函数。将 S 的表达式(4.9.3)代入 $H-J$ 方程(4.9.2), 得:

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = h \quad (4.9.4)$$

这是简化的 $H-J$ 方程, 函数 W 的地位和生成函数 S 类似, 称为 Hamilton 特性函数。由于这个偏微分方程不显含时间 t , 只有 n 个自变量 q_1, \dots, q_n , 也不包含未知函数 W 本身, 因而其全积分只包含 $n-1$ 个任意常数。但由于方程本身已有常数 h , 所以它的积分中也应含有 h , 因而其全积分应有如下形式:

$$W = W(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, h) \quad (4.9.5)$$

由(4.9.4)式求出 W 之后, 根据 Hamilton-Jacobi 定理, 便有

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.9.6)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_j} = \beta_j \quad (j=1, \dots, n-1) \quad (4.9.7)$$

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t + \gamma \quad (4.9.8)$$

其中 α, β, γ 都是任意常数, 共 $2n$ 个。

值得注意的是, 由 (4.9.6) 至 (4.9.8) 式表示的解中, 只有 (4.9.8) 式显含 t , 其余均不含 t 。因之, (4.9.7) 式表示原系统在位形空间中的位形轨迹, 而与代表点在轨迹的速率无关; (4.9.6) 与 (4.9.7) 式表示原系统在相空间中之相轨迹, 而与沿相轨迹的运动方式无关。

由 (4.9.7) 及 (4.9.8) 式可以解出 q_1, \dots, q_n 表为 t 及 α, β, γ, h 的函数, 将其代入 (4.9.6) 便得到 p_1, \dots, p_n 对 t 的关系, 即

$$\left. \begin{aligned} q_i &= q_i(t, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, h, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \gamma) \\ p_i &= p_i(t, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, h, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \gamma) \end{aligned} \right\} (i=1, \dots, n) \quad (4.9.9)$$

这便是原正则方程的通解。能量积分的存在, 使要解的偏微分方程减少了一个自变量 t 。

4.9.2 存在循环坐标的情况

若 Hamilton 函数 H 中有 $n-m$ 个循环坐标 q_{m+1}, \dots, q_n , 即

$$H = H(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_n, t) \quad (4.9.10)$$

因而由原正则方程有

$$p_r = \alpha_r \quad (r = m+1, \dots, n) \quad (4.9.11)$$

于是由变换公式 (4.7.7) 便有

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_r} = \alpha_r \quad (r = m+1, \dots, n) \quad (4.9.12)$$

满足以上要求的全积分可以写成如下形式:

$$S = \sum_{r=m+1}^n \alpha_r q_r + S_0(q_1, \dots, q_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n, t) \quad (4.9.13)$$

而 S_0 是如下方程的全积分:

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_m, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n, t\right) = 0 \quad (4.9.14)$$

$n-m$ 个循环坐标的存在,使要解的偏微分方程减少了 $n-m$ 个自变量,变成一个只有 $m+1$ 个变量的偏微分方程。

4.9.3 可分离变量的情况

(1) 如果广义保守系统的 Hamilton 函数 H 具有如下形式:

$$H = G(f_1(q_1, p_1), \dots, f_n(q_n, p_n)) \quad (4.9.15)$$

即 G 是 f_1, \dots, f_n 的函数,而每个 f_i 只含有一对共轭变量 (q_i, p_i) ,又因 H 不显含时间 t ,所以应取 (4.9.4) 形式的 $H-J$ 方程,它在此情况下有如下形式:

$$G\left[f_1\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\right), \dots, f_n\left(q_n, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right)\right] = h \quad (4.9.16)$$

显然,由于 (4.9.16) 右端为常数,而左端的每一个函数 f_i 都是任意函数,故也必为常数,可令

$$f_i\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.9.17)$$

α_i 是任意常数。由此而得

$$h = G(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (4.9.18)$$

由关系式 (4.9.17) 解出 $\frac{\partial W}{\partial q_i}$ (为此要求 f_i 必须显含 p_i , 即 $\frac{\partial f_i}{\partial p_i} \neq 0$),

由此得出

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = F_i(q_i, \alpha_i) \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.9.19)$$

积分之,可得

$$W = \sum_{i=1}^n \int F_i(q_i, \alpha_i) dq_i \quad (4.9.20)$$

将 (4.9.18) 及 (4.9.20) 式代入 (4.9.3) 式,得

$$S = -ht + W$$

$$= -G(\alpha_1, \dots, \alpha_n)t + \sum_{i=1}^n \int F_i(q_i, \alpha_i) dq_i \quad (4.9.21)$$

由于在本情况中有

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i} = \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} = 0 \quad (i \neq j \text{ 时}) \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (4.9.22)$$

因而基本不等式(4.8.14)成为

$$\det \left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right] = \prod_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} \neq 0 \quad (4.9.23)$$

这是因为由(4.9.17)式,一方面有

$$\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_i} = 1 \quad (4.9.24)$$

另一方面又有

$$\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial f_i}{\partial p_i} \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} \quad (4.9.25)$$

所以

$$\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_i} \right)^{-1} \neq 0 \quad (4.9.26)$$

因此由公式(4.9.21)给出的 S 是 H - J 方程的全积分。将此全积分代入 H - J 定理中要求的正则变换式

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.8.15)$$

并注意利用(4.4.24)及(4.4.25)式,便有

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial G}{\partial \alpha_i} t + \int \frac{\partial F_i(q_i, \alpha_i)}{\partial \alpha_i} dq_i &= \beta_i \\ p_i &= F_i(q_i, \alpha_i) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.9.27)$$

由上式的前 n 个方程给出位形空间中的解答,再和后 n 个方程相结合,便给出相空间中的解答。

例題 4.9.1 单自由度振子的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}$$

令

$$G(\alpha) \equiv \alpha, \quad f(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2},$$

则得

$$p = F(q, \alpha) = \sqrt{2m\alpha - mcq^2} \quad (a)$$

因此运动方程(4.9.27)有如下形式:

$$-t + \int \frac{mdq}{\sqrt{2m\alpha - mcq^2}} = \beta \quad (b)$$

即

$$q = A \sin(\omega t + \beta) \quad (c)$$

其中 $A^2 = \frac{2\alpha}{c}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}$

(2) 如果 Hamilton 函数有如下形式:

$$H = g_n \{ \cdots g_3 \{ g_2 [g_1 (q_1, p_1), q_2, p_2], q_3, p_3 \} \cdots, q_n, p_n \} \quad (4.9.28)$$

则含有函数 W 的 H - J 方程便可写成

$$g_n \left\{ \cdots g_3 \left\{ g_2 \left[g_1 \left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1} \right), q_2, \frac{\partial W}{\partial q_2} \right], q_3, \frac{\partial W}{\partial q_3} \right\} \cdots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_n} \right\} = h \quad (4.9.29)$$

现引入任意常数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n = h$, 并依次令

$$\left. \begin{aligned} g_1 \left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1} \right) &= \alpha_1 \\ g_2 \left(\alpha_1, q_2, \frac{\partial W}{\partial q_2} \right) &= \alpha_2 \\ &\cdots \cdots \cdots \\ g_n \left(\alpha_{n-1}, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_n} \right) &= \alpha_n \end{aligned} \right\} \quad (4.9.30)$$

设函数 $g_i(\alpha_{i-1}, q_i, p_i)$ 中确实含有 p_i , 因而 $\frac{\partial g_i}{\partial p_i} \neq 0$ 。由 (4.9.30) 式

便可解出各偏导数如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial q_1} &= G_1(q_1, \alpha_1) \\ \frac{\partial W}{\partial q_2} &= G_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial W}{\partial q_n} &= G_n(q_n, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \end{aligned} \right\} \quad (4.9.31)$$

W 的全微分为

$$dW = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i = \sum_{i=1}^n G_i(q_i, \alpha_i) dq_i \quad (4.9.32)$$

于是, 便有

$$W = \sum_{i=1}^n \int G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) dq_i \quad (4.9.33)$$

$$S = -\alpha_n t + \sum_{i=1}^n \int G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) dq_i \quad (4.9.34)$$

这里

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i} = \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} = 0 \quad \text{当 } i < j \text{ 时, } (i, j = 1, \dots, n) \quad (4.9.35)$$

因此基本不等式 (4.8.14) 为

$$\det \left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right] = \prod_{i=1}^n \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} \neq 0 \quad (4.9.36)$$

这个不等式成立的理由是因为存在下列诸式

$$g_i(\alpha_{i-1}, q_i, p_i) = \alpha_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.9.37)$$

它们等价于

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= G_1(q_1, \alpha_1) \\ p_i &= G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \quad (i=2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (4.9.38)$$

由此可得:

$$\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial p_i} \right)^{-1} \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_i} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial p_i} \right)^{-1} \neq 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.9.39)$$

由方程(4.9.38)还可得:

$$\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_{i-1}} = - \left(\frac{\partial g_i}{\partial \alpha_{i-1}} / \frac{\partial g_i}{\partial p_i} \right) \quad (i=2, \dots, n) \quad (4.9.40)$$

于是将 S 的表达式(4.9.34)代入变换式(4.8.15)即得

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} dq_i + \int \frac{\partial G_{i+1}}{\partial \alpha_i} dq_{i+1} &= \beta_i \quad (i=1, \dots, n-1) \\ -t + \int \frac{\partial G_n}{\partial \alpha_n} dq_n &= \beta_n \\ p_1 &= G_1(q_1, \alpha_1) \\ p_i &= G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \quad (i=2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (4.9.41)$$

在积分时,视情况可利用(4.9.39)及(4.9.40)式以简化计算。这里,(4.9.41)式中的前 $n-1$ 个方程规定了代表点在位形空间中的一族轨迹;这些方程包含 $2n-1$ 个任意常数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ 。(4.9.41)式的第二个方程给出坐标 q_n 和时间变量 t 的关系,并包含新的任意常数 β_n 。将 $q_i (i=1, \dots, n)$ 解出且表为 t 的函数,代入(4.9.41)式的最后一组方程,便得到 $p_i (i=1, \dots, n)$ 与 t 之间的关系,其中包含 $2n$ 个任意常数 $\alpha_i, \beta_i (i=1, \dots, n)$ 。

例题 4.9.2 质量为 m 的质点在中心引力场作用下运动,力的大小与质点到引力中心距离的平方成反比。(这种运动称之为 Kepler 运动。)

解 用球坐标 r, θ, ψ 决定质点的位置。因此动能和势能分别为

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\psi}^2) \quad (a)$$

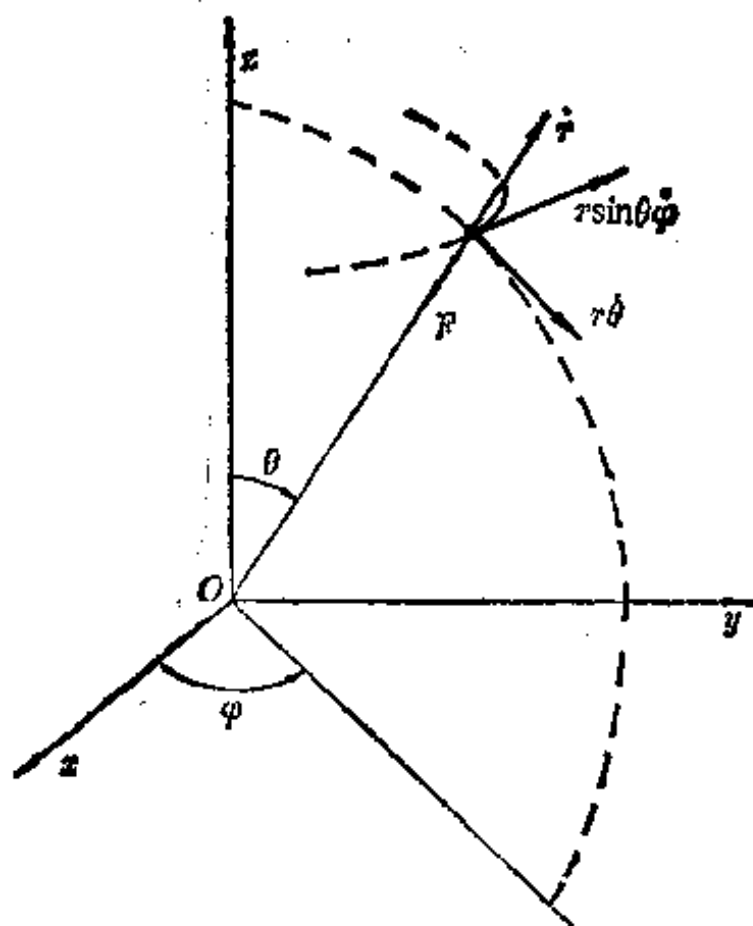


图 4.10

$$V = -\frac{\mu}{r} \quad (b)$$

广义动量为

$$p_r = \dot{r}, \quad p_\theta = r^2 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \quad (c)$$

Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{\mu}{r} \quad (d)$$

令

$$g_1 = p_\varphi = \alpha_1, \quad g_2 = p_\theta^2 + \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \theta} = \alpha_2, \quad g_3 = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{\alpha_2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} = \alpha_3$$

立即可看出 H 的构造属于可分离变量的第三种情形, 由 (4.9.41) 式可求得积分如下

$$\psi - \alpha_1 \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \theta}}} = \beta_1 \quad (e)$$

$$\int \frac{d\theta}{2\sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \theta}}} - \int \frac{\frac{1}{r^2} dr}{2\sqrt{2m\alpha_3 + \frac{2m\mu}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}}} = \beta_2 \quad (f)$$

$$-t + \int \frac{m dr}{\sqrt{2m\alpha_3 + \frac{2m\mu}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}}} = \beta_3 \quad (g)$$

这便是 Kepler 运动的一般解。

如果初始速度位于某子午面上，因而 $\alpha_1 = 0$ ，于是由式(d)便有：

$$\psi = \beta_1 = \text{常数} \quad (h)$$

即质点作平面运动。将方程(f)、(g)逐项微分后，可得

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{2m} = \text{const} \quad (i)$$

即在运动平面上，自引力中心到质点的矢径，在单位时间内所扫过的面积是不变的，这就是所谓的面积定律。

为了确定轨道，我们令 $\frac{1}{r} = x$ ，于是由公式(f)得(式中 $\alpha_1 = 0$)：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c + 2kx - x^2}} = \beta - \theta \quad (j)$$

其中

$$c = \frac{2m\alpha_3}{\alpha_2}, \quad k = \frac{m\mu}{\alpha_2}, \quad \beta = 2\sqrt{\alpha_2}\beta_2 \quad (k)$$

积分后可得

$$\arccos \frac{x-k}{\sqrt{k^2+c^2}} = \theta - \beta \quad (l)$$

解出 x ：

$$x = k + \sqrt{k^2 + c} \cos(\theta - \beta) \quad (m)$$

再变至原变量 r , 便得到焦点在引力中心的圆锥曲线方程:

$$r = \frac{1}{x} = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \beta)} \quad (n)$$

式中

$$p = \frac{\alpha_2}{m\mu}, e = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_2\alpha_3}{m\mu^2}} \quad (o)$$

轨道形状(椭圆, 抛物线或双曲线)视初始条件 α_2, α_3 而定。

例题 4.9.3 质量为 m 的质点在两个固定中心的牛顿引力场作用下作平面运动(图 4.11)。设两引力中心的距离为 $2c$, 用 H - J 方程求解。

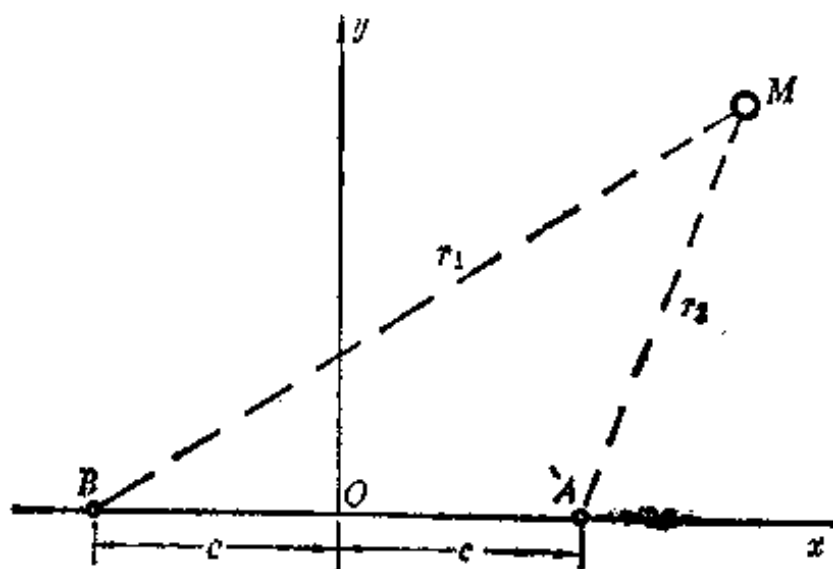


图 4.11

解 如取直角坐标 Oxy 描述运动, 显而易见不可能使变量分离。取椭圆坐标 ξ, η , 即令

$$\left. \begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \xi \cos \eta \\ y &= c \operatorname{sh} \xi \sin \eta \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

则变量可分离, 作法如下: 根据(a)式, 距离 $r_{1,2}$ 可表为

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} \\ &= c \sqrt{(1 \pm \operatorname{ch} \xi \cos \eta)^2 + \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta} = c(\operatorname{ch} \xi \pm \cos \eta) \end{aligned}$$

即

$$r_1 = c(\operatorname{ch} \xi + \cos \eta), \quad r_2 = c(\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) \quad (b)$$

将变换 (a) 两边对 t 求导数, 得

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= c(\xi \operatorname{sh} \xi \cos \eta - \eta \operatorname{ch} \xi \sin \eta) \\ \dot{y} &= c(\xi \operatorname{ch} \xi \sin \eta + \eta \operatorname{sh} \xi \cos \eta) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

因而质点的动能为

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{mc^2}{2} (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) (\xi^2 + \eta^2) \quad (d)$$

系统的势能为

$$V = -\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) = -\frac{(\mu_1 + \mu_2) \operatorname{ch} \xi + (\mu_2 - \mu_1) \cos \eta}{c(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)} \quad (e)$$

广义动量为

$$\left. \begin{aligned} p_\xi &= \frac{\partial T}{\partial \xi} = mc^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) \xi \\ p_\eta &= \frac{\partial T}{\partial \eta} = mc^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) \eta \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

于是得

$$\begin{aligned} H &= T + V \\ &= \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{2mc^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)} - \frac{(\mu_1 + \mu_2) \operatorname{ch} \xi + (\mu_2 - \mu_1) \cos \eta}{c (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)} \end{aligned} \quad (g)$$

因为是保守系统, 所以 H - J 方程为

$$\frac{\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2}{2mc^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)} - \frac{(\mu_1 + \mu_2) \operatorname{ch} \xi + (\mu_2 - \mu_1) \cos \eta}{c (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)} = h \quad (h)$$

其中 h 为能量常数, 由初始条件所决定。将上式改写为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2 - 2mc(\mu_1 + \mu_2) \operatorname{ch} \xi - 2mc(\mu_2 - \mu_1) \cos \eta \\ = 2mc^2 h (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) \end{aligned} \quad (i)$$

容易看出, 这是可分离变量的情形, 令 $W = W_1(\xi, h, \alpha) + W_2(\eta, h,$

α), 其中 h 为式 (h) 中的常数, α 为待出现的另一常数, (见下面的 (k) 式), 并将与 ξ 及 η 有关的项分别集中, 就有

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW_1}{d\xi}\right)^2 - 2mc^2 h c h^2 \xi - 2mc(\mu_1 + \mu_2) c h \xi \\ = - \left[\left(\frac{dW_2}{d\eta}\right)^2 + 2mc^2 h \cos^2 \eta - 2mc(\mu_2 - \mu_1) \cos \eta \right] \end{aligned} \quad (j)$$

由于上式左右两端分别属于不同变量的函数, 等式成立的条件只能是它们都等于一个共同的常数, 将此常数记作 $2mc\alpha$, 于是得:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dW_1}{d\xi}\right)^2 - 2mc^2 h c h^2 \xi - 2mc(\mu_1 + \mu_2) c h \xi &= 2mc\alpha \\ \left(\frac{dW_2}{d\eta}\right)^2 + 2mc^2 h \cos^2 \eta - 2mc(\mu_2 - \mu_1) \cos \eta &= -2mc\alpha \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

或写成

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dW_1}{d\xi}\right)^2 - 2mc[\alpha + (\mu_1 + \mu_2) c h \xi + h c c h^2 \xi] &= 0 \\ \left(\frac{dW_2}{d\eta}\right)^2 - 2mc[-\alpha + (\mu_2 - \mu_1) \cos \eta - h c c \cos^2 \eta] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

从而得 H - J 方程的全积分

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 \\ &= \int \sqrt{2mc[(\mu_1 + \mu_2) c h \xi + h c c h^2 \xi + \alpha]} d\xi \\ &\quad + \int \sqrt{2mc[(\mu_2 - \mu_1) \cos \eta - h c c \cos^2 \eta - \alpha]} d\eta \end{aligned} \quad (m)$$

即

$$W = W(\xi, \eta, \alpha, h) \quad (n)$$

将 W 的表达式 (m) 代入 (4.9.6) 至 (4.9.8) 式, 便得到积分如下:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \xi} &= p_{\xi} = \sqrt{2mc[(\mu_1 + \mu_2)ch\xi + hcch^2\xi + \alpha]} \\
\frac{\partial W}{\partial \eta} &= p_{\eta} = \sqrt{2mc[(\mu_2 - \mu_1)\cos\eta - hc\cos^2\eta - \alpha]} \\
\frac{\partial W}{\partial \alpha} &= \sqrt{\frac{mc}{2}} \left\{ \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\mu_1 + \mu_2)ch\xi + hcch^2\xi + \alpha}} \right. \\
&\quad \left. + \int \frac{d\eta}{\sqrt{(\mu_2 - \mu_1)\cos\eta - hc\cos^2\eta - \alpha}} \right\} \\
\frac{\partial W}{\partial h} &= t - t_0 \\
&= c\sqrt{\frac{mc}{2}} \left\{ \int \frac{ch^2\xi d\xi}{\sqrt{(\mu_1 + \mu_2)ch\xi + hcch^2\xi + \alpha}} \right. \\
&\quad \left. - \int \frac{\cos^2\eta d\eta}{\sqrt{(\mu_2 - \mu_1)\cos\eta - hc\cos^2\eta - \alpha}} \right\}
\end{aligned} \right\} (o)$$

其中第三式表示质点的轨道,前三式相结合表示相空间中的轨迹,四个式子合起来给出增广相空间中的轨迹,即问题的全部解答。

4.10 正则摄动理论

设有由 $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ 描述的 Hamilton 正则系统, 它的 Hamilton 函数由两部分组成:

$$H = H_0 + H_1 \quad (4.10.1)$$

其中 H_0 是函数 H 的主要部分, 系统运动的主要特征由 H_0 所决定, 函数 H_1 远比 H_0 要小, 常称之为摄动函数。正则摄动理论的问题是这样提出的: 如果已经求得以下方程

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.10.2)$$

的解(通常称为理想系统的解), 如何在这组解的基础上计入摄动函数 H_1 的影响, 即求以下的所谓受摄系统方程

$$\dot{q}_i = \frac{\partial (H_0 + H_1)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial (H_0 + H_1)}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.10.3)$$

的解,和方程(4.10.3)相比,方程(4.10.2)的解通常比较容易利用 H - J 方法求得,常称为摄动问题的基本解。正则摄动方法的实质就在于利用基本解简化方程(4.10.3)的求解过程。

摄动方法的思想首先见于 Lagrange 的工作,他在研究行星绕太阳运动的轨道时,考虑了其它小天体的影响,或摄动影响。Lagrange 先排除掉摄动因素,求得椭圆轨道参数的基本解后,再把这些参数视为可变的,找出这些参数和摄动因素的关系,即摄动方程,由摄动方程的解再反过来修正基本解中视为常数的轨道参数,结果发现它们都是时间的慢变函数。由 Lagrange 提出的方法常称之为常数变分法,是正则摄动法的基础,也是非线性振动理论中小参数法的基础。

理想系统运动方程(4.1.2)的 H - J 方程为

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + H_0 \left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t \right) = 0 \quad (4.10.4)$$

设它的一个全积分 $S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$ 已经求得,于是据 Hamilton-Jacobi 定理,由变换关系

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.10.5)$$

可求得基本解如下:

$$\left. \begin{aligned} q_i &= q_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, t) \\ p_i &= p_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, t) \end{aligned} \right\} (i=1, \dots, n) \quad (4.10.6)$$

这里的 α_i, β_i 既是理想系统变换后的正则变量,又是积分常数,通常称为正则常数。

现在考虑受摄系统方程(4.10.3)的解,如仍取 H - J 方程(4.10.4)的全积分,并按(4.10.5)进行变换时,当然不可能使变换后的正则变量 α_i, β_i (相当于以前的记号 Q_i, P_i) 继续保持常数,而是时间的某种函数。当取(4.10.4)的全积分作为受摄系统的生成

函数时,新的 Hamilton 函数为:

$$K = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_1 + \frac{\partial \widehat{S}_0}{\partial t} \quad (4.10.7)$$

其中符号 $\widehat{}$ 表示函数中的变量 q_i, p_i 一律用基本解(4.10.6)代入,因而它们都是 α_i, β_i 的函数。由于 \widehat{H}_0 及 $\frac{\partial \widehat{S}}{\partial t}$ 应满足 $H-J$ 方程(4.10.4),故(4.10.7)化简为

$$K = \widehat{H}_1 \quad (4.10.8)$$

就是说,当我们用理想系统的 $H-J$ 方程的全积分作为受摄系统的生成函数时,新的Hamilton函数恰好等于摄动函数 \widehat{H}_1 ,变换后的正则方程应为

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial \widehat{H}_1}{\partial \beta_i}, \dot{\beta}_i = -\frac{\partial \widehat{H}_1}{\partial \alpha_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.10.9)$$

(4.10.9)式称为摄动方程,求得它们的解 $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ 后,代入基本解(4.10.6)中,就完成了正则常数的修正,也就是受摄系统的解答。

正则摄动法的特点在于摄动方程(4.10.9)仍保持正则形式,这是正则摄动较之其它摄动法优越之处。由于这个特点,在求摄动方程的解时,可以继续应用正则变换或 $H-J$ 方法。正则摄动法的局限性在于它只能适用于保守系统或运动方程能正则化的系统,对于非正则系统,摄动方程的形式就要复杂得多*。

在实际问题中,我们常遇到周期运动,求摄动方程的解时,可以近似地取 \widehat{H}_1 在一个周期内的平均值**,即

$$\bar{K} = \frac{1}{T} \int_0^T \widehat{H}_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, t) dt \quad (4.10.10)$$

其中 T 为周期,经过平均后的摄动函数 $\langle H \rangle$ 不再显含时间 t ,这对

* 见参考文献[37]。

** 平均法的理论根据见[22]。

于求振动方程的近似积分是十分有利的。

例题 4.11.1 用正则振动方法求 Duffing 方程

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + \mu q^3 = 0 \quad (a)$$

的近似解。这是最简单的单自由度非线性振动方程。许多具有非线性恢复力的保守系统都可以归结为这个形式,例如,大摆幅的单摆等。不难看出,(a)式的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_0^2 q^2) + \frac{1}{4}\mu q^4 \quad (b)$$

我们将 H 分为 $H_0 = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_0^2 q^2)$ 与 $H_1 = \frac{1}{4}\mu q^4$ 之和。因而理想系统的 H - J 方程为

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + \omega_0^2 q^2 \right] = 0 \quad (c)$$

这是保守系统,可将变量 q 及 t 分离而求得

$$S_0(t, q, \alpha) = -\alpha t + \int \sqrt{2\alpha - \omega_0^2 q^2} dq \quad (d)$$

α 即能量积分常数。由 S_0 决定的运动方程为:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega_0} \sin \omega_0(t - \beta) \\ p &= \sqrt{2\alpha} \cos \omega_0(t - \beta) \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

将上式作为 (q, p) 到 (α, β) 的正则变换,则变换后的 Hamilton 函数

$$\begin{aligned} K(\alpha, \beta, t) &= \widehat{H}_1 = \frac{\mu \alpha^2}{\omega_0^4} \sin^4 \omega_0(t - \beta) \\ &= \frac{\mu \alpha^2}{\omega_0^4} \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\omega_0(t - \beta) + \frac{1}{8} \cos 4\omega_0(t - \beta) \right] \end{aligned} \quad (f)$$

为了得到 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$, 可将 H_1 代入 (4.10.9) 式求解, 但是函数 K 本身就很复杂, 要积分得到精确解仍很困难, 此时可用平均法求一个周期 $\left(T = \frac{2\pi}{\omega_0} \right)$ 内 K 的平均值:

$$\bar{K} = \frac{1}{T} \int_0^T \widehat{H}_1 dt = \frac{3}{8} \frac{\mu \alpha^2}{\omega_0^4} \quad \left(T = \frac{\pi}{\omega_0} \right) \quad (g)$$

代入(4.10.9)式,得平均摄动方程

$$\alpha = \frac{\partial \bar{K}}{\partial \beta} = 0, \quad \beta = -\frac{\partial \bar{K}}{\partial \alpha} = -\frac{3}{4} \frac{\mu \alpha}{\omega_0^4} \quad (h)$$

由此可得

$$\alpha(t) = \alpha_0, \quad \beta(t) = -\frac{3}{4} \frac{\mu \alpha_0}{\omega_0^4} t + \beta_0 \quad (i)$$

再代入(e)的第一式,得

$$q = \frac{\sqrt{2\alpha_0}}{\omega_0} \sin \left[\omega_0 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\mu \alpha_0}{\omega_0^4} \right) t - \omega_0 \beta_0 \right] \quad (j)$$

这个近似解和用其它方法(例如Krylov-Bogoliubov-Mitropolski方法)得到的近似解一致*。

第四章 习 题

4.1 质点的质量为 m , 在中心引力场中运动, 引力常数为 μ 。用球坐标列出正则方程及能量积分、循环积分。

4.2 用 Euler 角表示具有固定点的对称重力陀螺的运动。设陀螺重心至固定点距离为 a , 重量为 P ; 对固定点的主惯性矩为 A, A, C 。列出正则方程及能量积分、循环积分。

4.3 弹簧摆质量为 m , 弹簧刚度为 k 。在任一位置时, 弹簧线与铅垂线夹角为 φ , 弹簧伸长为 x 。用 φ 及 x 作为广义坐标, 列出正则方程及能量积分。

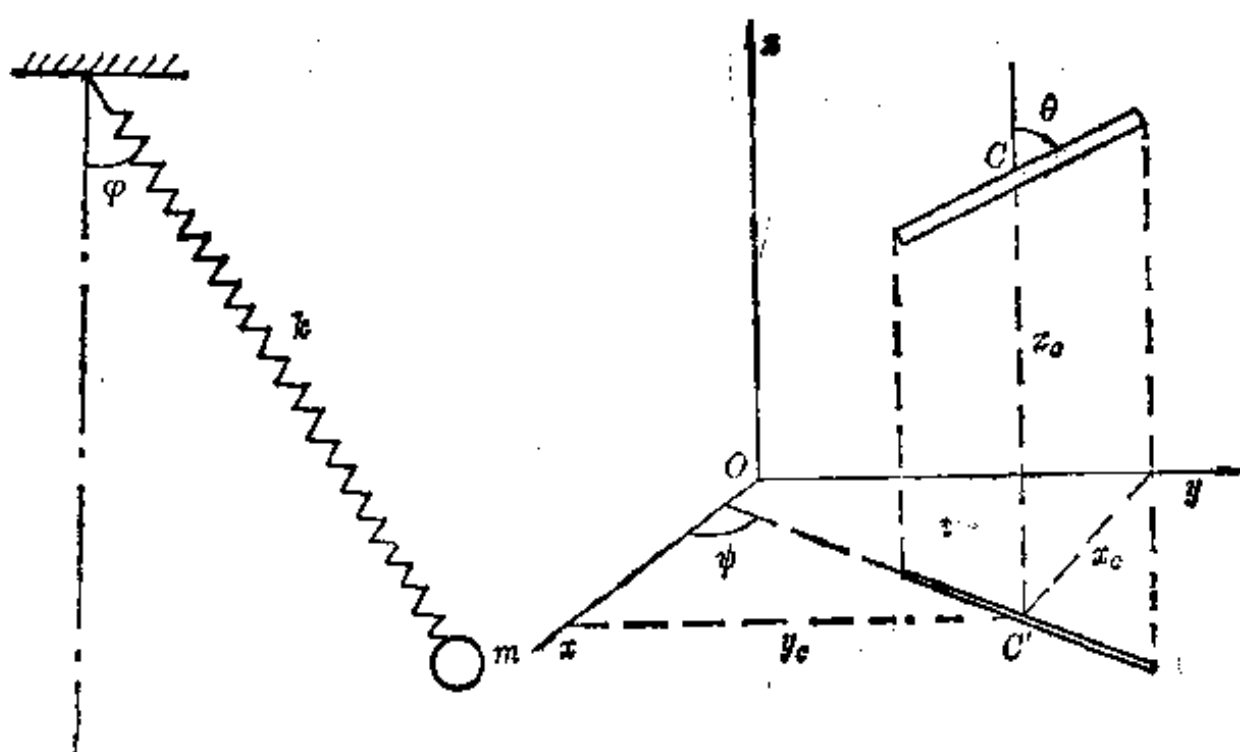
4.4 质量为 m , 长度为 $2l$ 的匀质细杆在重力场中自由运动。取 $x_0, y_0, z_0, \theta, \psi$ 为广义坐标如图所示, 列出系统的正则方程并积分。

4.5 试证明变换

$$Q = \frac{1}{2}(q^2 + p^2), \quad P = -\operatorname{tg} \frac{q}{p}$$

是正则变换, 并求出母函数。

* A. H. 奈弗,《摄动方法》,上海科技出版社 § 5.4, 1984,



题 4.3

题 4.4

4.6 证明

$$Q = \sqrt{2qe^t} \cos p, \quad P = \sqrt{2qe^{-t}} \sin p$$

为正则变换, 并求出母函数。

4.7 证明变换

$$Q = \ln\left(\frac{1}{q} \sin p\right), \quad P = q \operatorname{ctg} p$$

是正则变换, 并求出变换的四种类型的母函数。

4.8 求正则变换

$$Q_i = \left(\frac{p_i}{\alpha - 1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - q_i, \quad P_i = -p_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

的第一类母函数 $S(q_i, Q_i)$ 。

4.9 求正则变换

$$Q_i = q_i + \ln p_i - e^{p_i}, \quad P_i = p_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

的第二类母函数 $S_2(q_i, P_i)$ 。

4.10 试证变换

$$Q = q - tp + \frac{1}{2}gt^2, \quad P = p - gt$$

是正则变换, 并求新的 Hamilton 函数及四种形式的母函数。

4.11 利用 Poisson 条件证明

$$f_k(q_k, p_k) = H(q_s, p_s) \varphi_k(q_k, p_k)$$

是 Hamilton 系统

$$H(q_s, p_s) = \frac{\sum_{k=1}^n f_k(q_k, p_k)}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(q_k, p_k)}$$

的首次积分。

4.12 试用 Poisson 条件证明函数

$$\varphi_1 = p_1^2 + q_2^2, \quad \varphi_2 = p_2^2 + q_1^2, \quad \varphi_3 = (\varphi_1, \varphi_2)$$

是 Hamilton 系统 $H = p_1 p_2 + q_1 q_2$ 的首次积分。

4.13 设系统的 Hamilton 函数为

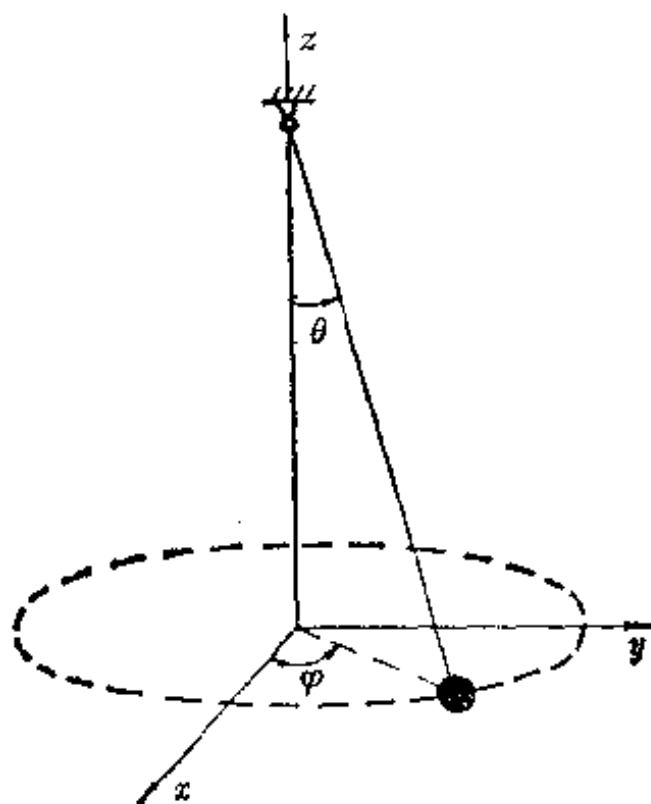
$$(1) H = p + q, \quad (2) H = \frac{p^2}{2m} e^{-\frac{q}{a}} \quad (a \text{ 为常数})$$

试用 Hamilton-Jacobi 方法求解。

4.14 已知力学系统的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2} \left[p_1^2 + p_2^2 + \frac{(p_3 - p_2 \sin q_1)^2}{\cos^2 q_1} \right],$$

试建立 Hamilton-Jacobi 方程, 求其全积分及运动规律。



题 4.16

4.15 已知力学系统的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{p_1^2 q_1^2 + p_2^2 q_2^2}{2p_1^2 q_1^2 + 3p_2^2 q_2^2} \sin t$$

试建立 Hamilton-Jacobi 方程, 并求全积分及运动规律。

4.16 质量为 m 、摆长为 l 的空间单摆如图所示。以 θ 及 φ 为广义坐标, 试用 Hamilton-Jacobi 方法求解。

4.17 应用正则摄动理论求以下方程

$$\ddot{q} + q + \mu \dot{q}^3 = 0$$

的近似解。

4.18 试用正则摄动理论讨论 Mathieu 方程

$$\ddot{q} + (\omega_0^2 + \mu \cos 2t) q = 0$$

的平凡解的稳定性 ($\mu \ll 1, \omega_0^2 \approx 1$)

第五章 力学的变分原理

5.1 变分原理概述

在本章中,我们要研究分析力学的几个普遍原理,由于这些原理都带有变分特点,因此它们又称为变分原理。力学的变分原理是古典力学发展到成熟阶段的产物,它们对于力学及理论物理的进一步发展起了非常重要的作用。为了搞清楚原理一词的含义,我们有必要对定律、定理及原理等词的含意分别加以阐明:

定律——对物理或其他领域中的现象进行观察、实验,在积累了大量观察事实或实验结果的基础上,经过归纳和概括而得到一门科学的基本规律,如力学中的牛顿定律、热力学第一及第二定律、几何光学的三大定律等。总之,定律直接来自实践,其正确性直接由实践来检验。

定理——从基本定律出发,由数学演绎和逻辑推理的方法得到的进一步的事物间的内在联系。这种内在联系往往由定量的数学关系表达出来,如动量定理,动量矩定理及动能定理等都属于这一类。定理的应用范围只是局部的、个别的命题。如果说定律是根,定理便是枝和干。在力学的发展过程中,某些特殊的定理(如活力定理和面积定理)往往比基本定律先被人们认识到,但在形成科学的理论体系后,它们却处于从属于基本定律的地位。

原理——也是由基本定律出发,经过演绎及推理得到的命题,但和定理不同,它们是带有根本性的命题。原理在发展过程中,直接的观察和实验有时也起了重要作用(如简单机械的平衡对于虚功原理的形成所起的作用),但是最终严格地建立起来,仍必须依

靠演绎及推理的决定性作用。原理不同于定理之处在于：原理具有高度的概括性。在这点上，原理可以认为和基本定律是等价的。如力学的变分原理蕴含了在各种条件下力学问题所需的全部方程，它可作为整个古典力学的基本原则。原理（特别是变分原理）的正确性往往不易由实践直接检验，但可由它所得到的方程及方程的解和实践相比较来间接检验其正确性。在建立基本方程的功能上，虽然原理和基本定律是等价的，但原理所揭露出来的事物之间的本质性联系往往要比基本定律更为深刻。大家知道，虚功原理比起几何静力学的公理不仅更普遍，而且所包含的物理内容也要深刻得多。

力学的变分原理是在基本定律基础上用变分方法得到的。变分原理的特征在于提出了将真实运动（或真实平衡状态）与在同样条件下的可能运动（或可能平衡状态）区分出来的准则。例如，d'Alembert 原理给出了任一瞬时在主动力作用下的真实运动区别于在同样约束条件下运动学上的可能运动的准则。这个准则就在于，只有真实运动才满足以下方程：

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (5.1.1)$$

同样，虚功原理则给出了在主动力作用下系统的真实平衡位形区别于在同样约束条件下的可能平衡位形的准则。

本章中要着重研究的是这样一类变分原理，这类原理不仅给出了在满足一定条件下从可能运动中区分出真实运动的准则，而且给出这个准则表现为某个由系统运动的物理量组成的函数或泛函（作用量）具有驻值的条件。简言之，归结为函数或泛函的极大极小值问题。归结为泛函极值问题的变分原理和作为数学的一个分支——变分法的理论有密切关系。这类变分原理对于力学本身及物理学各领域都有重要意义。这是因为，第一，直接展开原理中的

函数或泛函极值条件就可得到动力学系统的基本方程，它比用其它方法推导要简易得多。第二，变分原理可以提供动力学问题的近似解法，这一点对于那些运动微分方程难于积分的力学问题都有特殊的重要意义。而易于求解的运动微分方程是极少的。第三，变分法常常揭示了力学与物理学中其他学科之间的密切关联。例如，由光学与力学之间的比拟（下文将详细论述）对于建立力学的变分原理起了很重要的推动作用，由力学与电动力学之间的比拟可建立电磁系统及机械-电磁系统的变分原理。力学的变分原理对于从古典力学过渡到广义相对论起了桥梁作用。总之，力学的变分原理形成后，已经成为力学研究的新起点，具有开拓新方法、新领域的作用。可以毫不夸张地说，无论是一般力学、固体力学或流体力学，没有那个领域的现代研究成果不受到变分原理的影响。

力学的变分原理可分为两类：（一）微分原理，它研究在任一瞬时区分真实运动与可能运动的准则。属于微分原理的除了我们熟知的 *d'Alembert-Lagrange* 原理（1760）外，还有 *Gauss* 原理（1829）及 *Jourdain* 原理（1908）。（二）积分原理，它研究在任一有限时间历程中区分真实运动与可能运动的准则。属于积分原理的有 *Maupertuis* 的最小作用量原理（1744）及 *Hamilton* 原理（1835）。

物理学中最早出现的变分原理并非出现在力学领域，而是出现在几何光学领域，这就是著名的 *Fermat* 原理。当时的几何光学仍然受到牛顿的微粒学说的统治，因此很容易促使人们用质点运动的观点来研究光学现象。*Maupertuis* 曾作过力学中的牛顿定律和几何光学基本定律之间纯属形而上学的类比，在这种很不严密的类比基础上，提出了力学中的最小作用量原理。因为 *Maupertuis* 采用的是很脆弱的比拟法，没有多少科学根据，所以引起人们很大怀疑因而发生激烈的争论，*Maupertuis* 不得不求助于上

帝,宣称极小原理是造物主的力量与智慧的结果,并提出造物主给予自然界以最经济的帮助——自然经济原理。

此后过了将近十年,经过 Euler(1753) 及 Lagrange(1761) 的严密论证之后,最小作用量原理才确立为科学原理。

光学的发展推动了对力学变分原理的进一步研究。Huygens 提出了光的波动学说后,出现了两种不同理论——微粒理论和波动理论同时并存的局面,但是两种理论都没有被普遍接受。Hamilton 首先在几何光学中提出一种新方法,这种方法既能表达微粒理论又能表达波动理论,这是 Hamilton 理论的主要优点,将两种理论统一起来的观点已被后来的量子力学的实验所证实。Hamilton 随后就将他在光学中创立的新方法移植到力学中,提出了著名的 Hamilton 原理。Hamilton 同 Maupertuis, Euler 等人不同,他并不承认自然经济法则,相反他认为在某些场合,一贯被认为是“经济化”或“极小化”的量是取极大值,这就促使 Hamilton 在光学和力学中提出驻值原理而不是极小值原理。由于 Hamilton 原理的应用范围比“最小作用量原理”更广泛,所以它的地位也更为重要。

值得注意的是,微分原理几乎和积分原理同时平行地发展。Gauss 原理的发展是和 Gauss 本人在研究误差理论中建立的最小均方差理论有密切关系。把 Gauss 原理的数学表达式和最小均方差条件相对比,不难发现它们之间的内在联系。从理论体系来看, Jourdain 原理介于 d'Alembert-Lagrange 原理和 Gauss 原理之间,但 Jourdain 原理却直到本世纪初才被发现。具有更大普遍性的万有 d'Alembert 原理是 Mangeron 于本世纪六十年代提出的。

5.2 非完整约束条件下的虚位移的定义

在第一章中,我们讨论了完整及一阶非完整约束条件下的虚

位移,在本节中先对这问题作一简短的回顾,并作进一步推广。

5.2.1 一阶约束情形

用直角坐标表示的一阶非完整约束具有以下形式的约束方程:

$$F_k(x, \dot{x}, t) = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.2.1)$$

其中 x 代表 x_1, x_2, \dots, x_{3N} 的全体, \dot{x} 有同样的意义, N 为质点数, g 为约束方程数, 约束对速度变分 $\delta\dot{x}_i$ 的限制条件为

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial F_k}{\partial \dot{x}_i} \delta\dot{x}_i = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.2.2)$$

凡是在给定时刻、给定位形情况下,任一组满足约束方程的速度 $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{3N}$ 称为系统的可能速度, 速度变分 $\delta\dot{x}_i$ 实际上是任两组无限接近的可能速度之差, 或是可能速度的微变更。 $3N$ 个 $\delta\dot{x}_i$ 满足 (5.2.2) 式给出的线性方程, 它们构成一个线性空间, 称为 $\delta\dot{r}$ 空间。

Appell-Четаев 关于一阶非完整系统的虚位移定义可由 (5.2.2) 式借助于 $\delta x_i = \dot{x}'_i dt - \dot{x}''_i dt = \delta\dot{x}_i dt$ 导出:

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial F_k}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.2.3)$$

两相比较, 可以发现 (5.2.2) 式与 (5.2.3) 式除了记号 $\delta\dot{x}_i$ 与 δx_i 不同外, 其它都相同; 即 $\delta\dot{x}_i$ 和 δx_i 都应满足同样的约束条件。人们在不同情况下根据需求和习惯采用约束条件 (5.2.2) 或 (5.2.3) 式, 按照 (5.2.2) 式所规定的 $\delta\dot{x}_i$ 被称为速度空间的虚位移*或一阶导数空间虚位移**。本书为了简单明了, 又不致造成误解, 称为

* 见参考文献[4]。

** 见参考文献[13]。

$\delta\dot{\mathbf{r}}$ 空间规定的虚位移。

当约束方程用广义坐标表示时,有下方程:

$$f_k(q_j, \dot{q}_j, t) = 0 \quad \begin{pmatrix} j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, g \end{pmatrix} \quad (5.2.4)$$

约束对广义速度变分的限制条件为

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.2.5)$$

按 Appell-Чераев 定义,则可改写为

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.2.6)$$

同样,只要考虑到这是在给定时刻、给定位形下研究约束对系统状态微变的限制, (5.2.5) 和 (5.2.6) 式只是形式上不同,本质上并无区别。

如将约束方程 (5.2.1) 对时间 t 求导,可得:

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial F_k}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial F_k}{\partial t} = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.2.7)$$

这是一组含 $x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i$ 及 t 等变量的约束方程。我们给出以下定义:
凡在给定时刻、给定位形、给定速度情况下,任一组满足 (5.2.7) 式的加速度 $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dots, \ddot{x}_{3N}$ 称为系统的可能加速度。如记可能加速度的微变更为 $\delta \ddot{x}_i$, 则由 (5.2.7) 式显然可知, $\delta \ddot{x}_i$ 应满足以下限制方程:

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial F_k}{\partial \ddot{x}_i} \delta \ddot{x}_i = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.2.8)$$

满足以上方程的加速度变分构成一个线性空间,称为 $\delta\ddot{\mathbf{r}}$ 空间。比较 (5.2.2) 和 (5.2.8) 式可知,除了记号上不同之外, $\delta\dot{\mathbf{r}}$ 空间和 $\delta\ddot{\mathbf{r}}$ 空间是一致的,换句话说,将约束方程对 t 求导后虽然得到高一阶

的约束,但约束对虚位移的限制条件不变。

5.2.2 高阶约束的情形

当系统受以下形式的任意 m 阶非完整约束

$$F_k(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(m)}, t) = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.2.9)$$

时,是指约束仅是对坐标的最高阶导数 $x^{(m)}$ 的限制,因此,在给定 $t, x, \dot{x}, \dots, x^{(m-1)}$ 的前提下,约束对 $x^{(m)}$ 的变更 $\delta x^{(m)}$ 应满足以下限制条件:

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial F_k}{\partial x_i^{(m)}} \delta x_i^{(m)} = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.2.10)$$

满足以上方程的 $\delta x_1^{(m)}, \delta x_2^{(m)}, \dots, \delta x_{3N}^{(m)}$ 构成的线性空间称为 $\delta r^{(m)}$ 空间。如果将 $\delta x_i^{(m)}$ 视为高阶约束的虚位移,可称其为由 $\delta r^{(m)}$ 空间规定的虚位移。

为了阐明高阶 $\delta r^{(m)}$ 空间规定的虚位移的实质,我们将可能位移记作 Δx 及 $\Delta x'$,并按无限小时间 dt 展开,只保留到 $(dt)^m$ 的项,便得:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \dot{x}dt + \frac{1}{2}\ddot{x}(dt)^2 + \dots + \frac{(dt)^{m-1}}{(m-1)!}x^{(m-1)} + \frac{(dt)^m}{m!}x^{(m)} \\ \Delta x' &= \dot{x}dt + \frac{1}{2}\ddot{x}(dt)^2 + \dots + \frac{(dt)^{m-1}}{(m-1)!}x'^{(m-1)} + \frac{(dt)^m}{m!}x'^{(m)} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.11)$$

我们应注意,这是在给定 \dot{x}, \ddot{x}, \dots , 直至 $x^{(m-1)}$ 及给定 dt , 但 $x^{(m)}$ 可变的限制下展开的,根据定义,虚位移等于无限小可能位移之差:

$$\delta x = \Delta x' - \Delta x = \frac{(dt)^m}{m!}(x'^{(m)} - x^{(m)}) = \frac{(dt)^m}{m!}\delta x^{(m)} \quad (5.2.12)$$

上式表明, $\delta r^{(m)}$ 空间规定的虚位移概念确实是我们所熟知的虚位移

概念, 只不过这里 Δx 和 $\Delta x'$ 的选择不是任意的, 而是要求它们有共同的位形及一阶速度 \dot{x} 直至 $m-1$ 阶速度 $x^{(m-1)}$, 换言之, 就是决定虚位移 δx 的两个可能位移 Δx 和 $\Delta x'$ 所沿之可能运动的轨迹曲线必须在位形 x 处有 $(k-1)$ 阶接触度。例如, 一个质点作空间曲线运动, 受到三阶微分约束 $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, t) = 0$ 的限制, 因此在给定时刻 t 如果质点所在位置为 C , 则取可能位移 Δx , $\Delta x'$ 的两条可能运动轨迹曲线在 C 点必须有相同的切线(一阶接触)和速度, 以及相同的切线加速度 s , 因而在 C 点有共同的密切圆(二阶接触)。两条曲线的挠率相近但可以不同, 这样的两个可能位移之差 $\delta \ddot{x}$ (相差一无关紧要的系数)便是 t 时刻质点在 C 处的虚位移。由此可知, m 阶约束对 $\delta x^{(m)}$ 的限制方程就变为

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial F_k}{\partial x_i^{(m)}} \delta x_i = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.2.13)$$

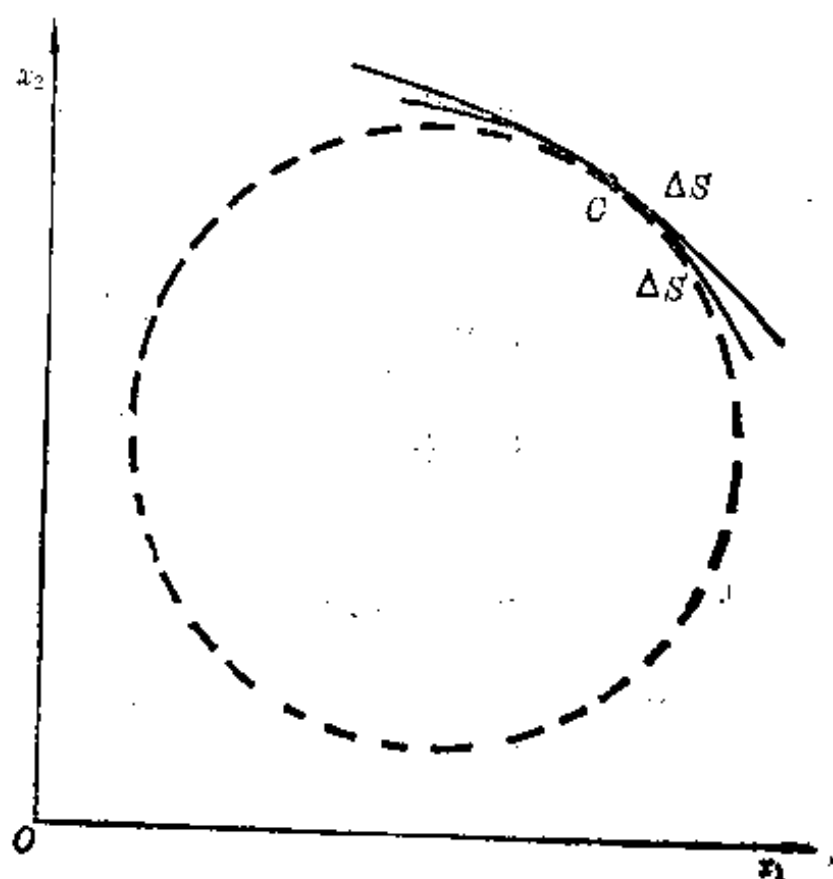


图 5.1

可以看出,当 $m=1$ 时,便得到 Appell-Четаев 虚位移定义,(5.2.13) 式可以看成 Appell-Четаев 定义在 m 阶非完整约束条件下的推广。

总之,在仅差一个无关紧要的常数因子的情况下,(5.2.10) 和 (5.2.13) 式同样正确地表达了高阶非完整约束的虚位移概念。

以上所说的 $\delta r^{(m)}$ 空间的虚位移概念是在 m 阶非完整约束情况下提出的,但是这个限制是不必要的。如系统受有比 m 要低的 l 阶非完整约束甚至完整约束:

$$\Phi_k(x, \dot{x}, \dots, x^{(l-1)}, x^{(l)}, t) = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 \leq l < m \\ k=1, \dots, g \end{pmatrix} \quad (5.2.14)$$

现在将 (5.2.14) 式对 t 求导 $(m-l)$ 次后,可得到一组 m 阶的约束方程:

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \Phi_k^{(m)}}{\partial x_i^{(l)}} x_i^{(m)} + \dots = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.2.15)$$

其中 $x_i^{(m)}$ 为最高阶,因此相当于 m 阶约束方程,对这个方程我们按以上所述,在 $\delta x = \dots = \delta x^{(m-1)} = 0$ 的条件下,可以求得 $\delta x_i^{(m)}$ 应满足的限制条件为

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i^{(l)}} \delta x_i^{(m)} = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.2.16)$$

由此可见,在低阶约束中可以提出高阶虚位移概念,这是因为低阶约束经若干次求导后可以化为高阶约束。但反过来,在高阶约束中不可能提出低阶约束虚位移概念,这是因为高阶约束一般是不可积的非完整约束,因之既然不能化为等价的低阶约束,也就不存在低阶虚位移。

5.3 微分变分原理

在第一章中,我们曾指出,d'Alembert-Lagrange 原理或动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^N (F_i - m_i \ddot{r}_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (5.3.1)$$

是动力学的普遍原理,原理除理想约束外不需任何其它假设,至于虚位移 δr_i 则要求是符合约束条件的无限小位移,现在我们对各种类型约束(包括完整,一阶非完整直到任意 m 阶非完整约束)条件下的虚位移都给出了明确的定义后,就可以给出和各阶约束相适应的更具体化的微分原理。

5.3.1 Mangeron 原理

如果系统受有不高于 m 阶的非完整约束,可以取虚位移 δr_i 为 $\delta r^{(m)}$ 空间的虚位移,即有以下限制条件

$$\delta t = 0, \delta r_i = \delta \dot{r}_i = \cdots = \delta r_i^{(m-1)} = 0 \quad (5.3.2)$$

而 $\delta r_i^{(m)}$ 不全为零,因之,在不考虑无关紧要的常数的情况下,可用 $\delta r_i^{(m)}$ 代替原理(5.3.1)中的 δr_i :

$$\sum_{i=1}^N (F_i - m_i \ddot{r}_i) \cdot \delta r_i^{(m)} = 0 \quad (5.3.3)$$

这便是 Mangeron 原理,也称万有 d'Alembert 原理,“万有”是指它包括了约束的各种情况,从 $m=0$ (完整约束)直到任意 m 阶约束都普遍有效。

虽然有工程实际意义的高阶非完整约束现在还不多见,但万有 d'Alembert 原理仍然有一定的理论价值,下面将看到,有重要理论及应用价值的几个低阶微分原理,如 d'Alembert-Lagrange

原理, Jourdain 原理及 Gauss 原理, 都不过是万有 d'Alembert 原理的特殊情形。

5.3.2 Jourdain 原理

如果系统受有不高于一阶的约束(完整约束、一阶线性或非线性非完整约束), 则可取 $\delta\dot{\mathbf{r}}$ 空间所规定的虚位移, 即取

$$\delta t = 0, \quad \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (5.3.4)$$

但 $\delta\dot{\mathbf{r}}_i$ 不全为零的限制条件下的虚位移, 因之, 在 Mangeron 原理中令 $m=1$ 便得到 Jourdain 原理:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i = 0 \quad (5.3.5)$$

已经发现的非完整约束大多数是一阶的, 因之 Jourdain 原理在非完整系统动力学中有重要地位。

用广义坐标表示的速度 $\dot{\mathbf{r}}_i$ 为

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i(q_j, \dot{q}_j, t) \quad \begin{pmatrix} i=1, \dots, N \\ j=1, 2, \dots, n \end{pmatrix} \quad (5.3.6)$$

根据 $\delta\dot{\mathbf{r}}$ 空间所要求的变分法则

$$\delta t = 0, \delta q_j = 0, \delta \dot{q}_j \neq 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.3.7)$$

可得到用广义坐标表示的虚位移:

$$\delta \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta \dot{q}_j \quad (i=1, \dots, N) \quad (5.3.8)$$

其中利用了 Lagrange 的经典关系, Jourdain 原理可表为

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta \dot{q}_j = 0 \quad (5.3.9)$$

以下仿照推导 Lagrange 方程类似的过程, 可得到以广义坐标表示的 Jourdain 原理或 Lagrange 形式的 Jourdain 原理:

$$\sum_{j=1}^n \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j \right) \delta q_j = 0 \quad (5.3.10)$$

在第六章中将会看到, 广义坐标形式的 Jourdain 原理是推导各种形式一阶非完整系统动力学方程的基础。

5.3.3 Gauss 原理

如果系统受不高于二阶的约束(完整约束, 一阶非完整约束, 二阶非完整约束), 则可取 $\delta \ddot{\mathbf{r}}$ 空间所规定的虚位移, 即取

$$\delta t = 0, \delta \mathbf{r}_i = 0, \delta \dot{\mathbf{r}}_i = 0 \quad (5.3.11)$$

但 $\delta \ddot{\mathbf{r}}_i$ 不全为零的限制下的虚位移, 因之, 在 Mangeron 原理中令 $m=2$ 便得到 Gauss 原理:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \ddot{\mathbf{r}}_i = 0 \quad (5.3.12)$$

因为在时刻 t 的主动力不参与变分, 所以 Gauss 原理可以改写成以下形式:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \left(\frac{\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i}{m_i} \right) = 0 \quad (5.3.13)$$

或

$$\delta \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i)^2 = 0 \quad (5.3.14)$$

Gauss 将下面的量

$$Z = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i)^2 \quad (5.3.15)$$

定义为运动的拘束函数或拘束, 而(5.3.14)式则是 Gauss 原理的另一种表达形式, 它表明: 在理想双面约束条件下, 对于所有由不

同的加速度所表示的可能运动中,其真实运动应使拘束取极小值。

很容易证明 Gauss 原理是极小值原理,如 $\ddot{\mathbf{r}}_i$ 为真实加速度,而 $\ddot{\mathbf{r}}_i + \delta\ddot{\mathbf{r}}_i$ 为任何可能加速度,则拘束的变化为

$$\begin{aligned}\Delta Z &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} [(F_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - m_i \delta\ddot{\mathbf{r}}_i)^2 - (F_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i)^2] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\delta\ddot{\mathbf{r}}_i)^2 - \sum_{i=1}^N (F_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta\dot{\mathbf{r}}_i\end{aligned}\quad (5.3.16)$$

但上式最后一项由 Gauss 原理可知恒等于零,因此我们有

$$\Delta Z > 0 \quad (5.3.17)$$

所以 Gauss 原理又叫做最小拘束原理, Gauss 原理的极值性质在动力学问题的近似计算方法中有很大的实用价值。Gauss 原理中的“拘束”的含义可以作如下解释:将 Z 写为

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \ddot{\mathbf{r}}_i \right)^2 \quad (5.3.18)$$

式中 $\ddot{\mathbf{r}}_i$ 表示在约束条件下的可能加速度, $\frac{\mathbf{F}_i}{m_i}$ 表示在不受约束条件下,作为自由质点系的加速度,二者之差则表示在约束条件下可能运动对自由运动的加速度的偏离或误差,函数 Z 则表明加权 m_i 后的加速度总平方偏离或总平方误差。Gauss 原理的实质就是这个加权总平方差对真实运动应取极小值。

读者不难证明,以广义坐标表示的 Gauss 原理可写为

$$\sum_{j=1}^N \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j \right) \delta q_j = 0 \quad (5.3.19)$$

对于完整系统,不但 δq_j 之间是互相独立的,而且 $\delta \dot{q}_j$ 之间及 $\delta \ddot{q}_j$ 也是互相独立的,因此由 d'Alembert-Lagrange 原理、Jourdain 原理及 Gauss 原理都可导出完整系统的 Lagrange 方程。Jo-

urdain 原理可用以推导一阶非完整系统运动方程已由上一小节予以说明。现在要着重说明的是,由 Gauss 原理同样可推导一阶非完整系统方程(因为空间阶数提高时不改变虚位移的几何特征),当然它还可推导具有二阶约束系统的运动方程。由此看来,对于工程中常见的各种约束而言, Gauss 原理具有最大的概括性。

5.4 微分-变分交换关系

5.4.1 问题的提出

微分运算 d 和变分运算 δ 的交换关系是在研究泛函驻值问题即变分法的基本问题中必然要遇到的问题,对于在函数空间中

$$q_j = q_j(t) \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.4.1)$$

满足时间端点条件

$$t_0=0, \quad \delta q_j=0; \quad t_1=0, \quad \delta q_j=0 \quad (5.4.2)$$

的泛函驻值问题

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} f(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0 \quad (5.4.3)$$

中,如果 q_j 之间不存在任何其它约束条件,则 d - δ 交换关系

$$\frac{d}{dt} \delta q_j = \delta \dot{q}_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.4.4)$$

恒能成立,但是在分析力学中由于非完整约束的存在,而使 d - δ 交换关系变得复杂起来,在分析力学中 d - δ 交换关系的提出是与在位形空间中研究一阶非完整系统动力学有密切关系。例如,利用中心方程(它是位形空间中的微分原理,即 d'Alembert-Lagrange 原理的变型)推导 Hamel 方程,或利用 Hamilton 原理(它是位形空间中的积分原理)推导 Routh 方程时都要涉及 d - δ 的可交换性问题。对交换关系有两种处理方法,一种是 Hölder 方法,他是将非完整约束解除,代之以约束力,因此对系统的所有坐标而言,运算

d - δ 都可以交换, 而不论完整与否; 另一方法是 Cycloz 提出的, 他是由非完整约束中解出不独立的广义速度, 在推导中考虑到非完整约束。 d - δ 交换关系仅对完整系统或非完整系统中的独立变分 (其数目等于广义坐标数减去非完整约束条件数) 才能运用。下面就分别介绍这两种处理方法。

5.4.2 Hölder 定义交换关系

设具有 n 个广义坐标

$$q_j = q_j(t) \quad (5.4.5)$$

的系统受到 g 个一阶非完整约束

$$f_k(q_j, \dot{q}_j, t) = 0 \quad \begin{pmatrix} k=1, \dots, g \\ j=1, \dots, n \end{pmatrix} \quad (5.4.6)$$

的限制。Hölder 认为对所有的广义坐标都存在 d - δ 交换关系:

$$\frac{d}{dt} \delta q_j = \delta \dot{q}_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.4.7)$$

下面考察 Hölder 观点在位形空间中的实质。设系统在位形空间中的某一可能运动由位形轨迹 C 表示, 它应满足约束方程 (5.4.6), 现在通过变分 $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ 使位形轨迹由 C 变至 C' , 在这组变分中令其满足约束条件 (Четаев)

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.4.8)$$

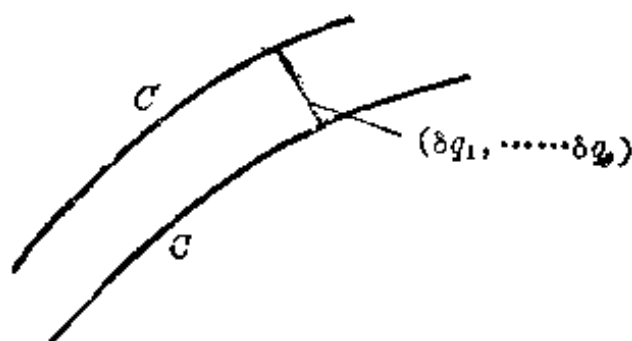


图 5.2

同时令所有的变分 δq_j 都满足交换关系 (5.4.7), 然后来考察位形轨迹 C 是否为新的可能运动。

可以认为, 如果 C' 是新的可能运动, 它应满足以下约束方程

$$f_k(q_j + \delta q_j, \dot{q}_j + \delta \dot{q}_j, t) = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.4.9)$$

按多元函数的 Taylor 公式展为 δq_j 及 $\delta \dot{q}_j$ 的幂级数, 并略去二阶以上的小量, 再考虑到 (5.4.6) 式后, 便应有

$$\delta f_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \delta q_j = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.4.10)$$

但是 $\delta f_k = 0$ 一般来说是不能成立的, 为证明这一点, 利用交换关系 (5.4.7) 可得

$$\delta f_k = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$(k=1, 2, \dots) \quad (5.4.11)$$

根据 Чернав 定义的虚位移约束条件 (5.4.8), 上式可化为

$$\delta f_k = - \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.4.12)$$

显然可见, 对于任意的一阶非完整约束, δf_k 不会等于零。由此可知, 从位形空间中代表某一可能运动的轨迹出发, 经过符合约束条件的坐标变分及 Hölder 交换关系后, 一般说来不能得到代表另一可能运动的轨迹。因此, 仅对于那些不要求变更后的轨迹为可能运动的讨论, 才可以应用 Hölder 交换关系; 反之, 对于变更后的轨迹要求为可能运动的讨论就不能应用 Hölder 交换关系了。

对于完整系统, 位形空间中的可能轨迹经过等时变分 $\delta q_j(t)$ 后总是得到另一可能轨迹, 只要 δq_j 足够光滑就行, 这是由完整系统在位形空间中的特性所决定的, 即位形空间中任何足够光滑的轨道都是可能运动。因此对 q_j 是否加上交换关系那样的限制, 不

会影响上述结论,即变更后的轨迹必定是可能轨迹。

5.4.3 Сулов 定义的交换关系

Сулов 定义的实质是保持变更后的运动为可能运动,但不保持对所有坐标的交换关系,仅对独立的变分取交换关系,换言之,Сулов 定义可表为

$$\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt}(\delta q_j) \quad \left(\begin{matrix} j=1, \dots, m \\ m=n-g \end{matrix} \right) \quad (5.4.13)$$

及按 Четаев 定义确定的

$$\delta f_k = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.4.14)$$

其中 $n-g$ 个独立变分 $\delta \dot{q}_j$ 服从交换关系(5.4.13),剩下的 g 个变分 $\delta \dot{q}_j$ 由(5.4.14)确定。

设约束方程

$$f_k(q_j, \dot{q}_j, t) = 0 \quad \left(\begin{matrix} k=1, \dots, g \\ j=1, \dots, n \end{matrix} \right) \quad (5.4.15)$$

是独立的,即下标做适当调整后, Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_g)}{\partial(\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \dots, \dot{q}_n)} \neq 0$$

因此,可将后面 g 个广义速度 \dot{q}_{m+p} 用前面 m 个广义速度 \dot{q} 表出

$$\dot{q}_{m+p} = \dot{q}_{m+p}(q_j, \dot{q}_k, t) \quad \left(\begin{matrix} j=1, \dots, n; k=1, \dots, m \\ p=1, \dots, g; m=n-g \end{matrix} \right) \quad (5.4.16)$$

于是 $\delta f_k = 0$ 变为

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}_{m+p} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{s=1}^g \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial \dot{q}_{m+s}} \delta \dot{q}_{m+s} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

对于 Четаев 型约束, 或满足 Четаев 定义的约束应有

$$\delta q_{m+p} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \quad (5.4.18)$$

将(5.4.18)代入(5.4.17)式可得

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}_{m+p} = & \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial q_j} + \sum_{s=1}^g \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial q_{m+s}} \cdot \frac{\partial \dot{q}_{m+s}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \\ & + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

将(5.4.18)式两边对 t 求导, 得

$$\frac{d}{dt} (\delta q_{m+p}) = \sum_{j=1}^m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\delta q_j) \quad (5.4.20)$$

将(5.4.19)与(5.4.20)两式相减, 得

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}_{m+p} - \frac{d}{dt} (\delta q_{m+p}) = & \sum_{j=1}^m \frac{\delta \dot{q}_{m+s}}{\delta \dot{q}_j} \left[\delta \dot{q}_j - \frac{d}{dt} (\delta q_j) \right] \\ & - \sum_{j=1}^m T_j^{m+p} \delta q_j \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

其中

$$T_j^{m+p} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial q_j} - \sum_{s=1}^g \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial q_{m+s}} \cdot \frac{\partial \dot{q}_{m+s}}{\partial \dot{q}_j}$$

利用(5.4.13)式中对独立变分的交换关系, (5.4.21)式可化简为

$$\delta \dot{q}_{m+p} = \frac{d}{dt} (\delta q_{m+p}) - \sum_{j=1}^m T_j^{m+p} \delta q_j \quad \left(\begin{matrix} p=1, \dots, g \\ m=n-g \end{matrix} \right) \quad (5.4.22)$$

显然, 当不存在非完整约束时, $p=0$, $T_j^{m+p}=0$, 交换差关系(5.4.22)不存在了, 只剩下(5.4.13)式, 换言之, 按 Суслов 定义,

只有完整系统才能对全部坐标实行 $d-\delta$ 交换法则。

5.5 Hamilton 原理

5.5.1 变分法导引

在讨论 Hamilton 原理及其它积分原理之前, 需要先对古典变分法有一个基本的了解。

古典变分法的研究对象是泛函的驻值问题, 什么是泛函驻值问题? 它和函数驻值问题有何区别? 又如何求解? 这些问题不容易一下子搞清楚。为此, 我们先从一个典型的经典问题——最速降落曲线(捷线)(Brachistorone)问题入手。

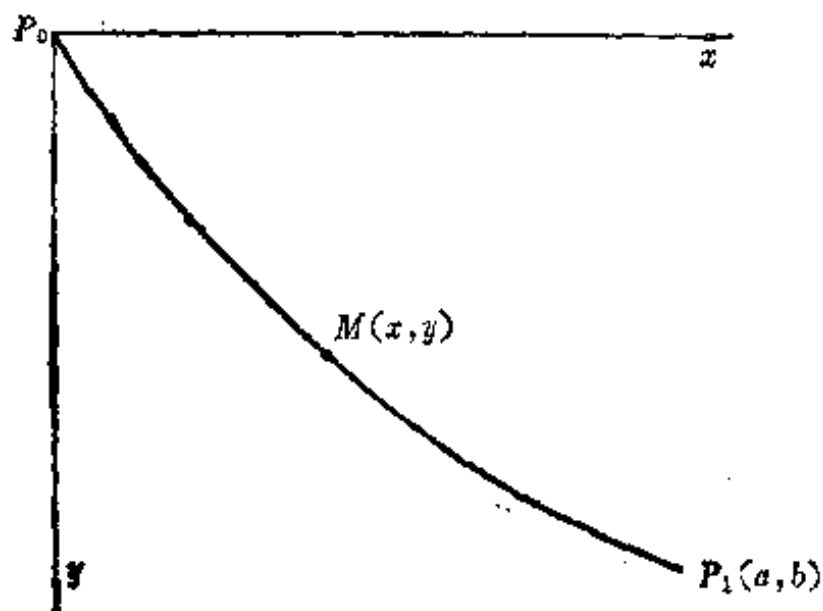


图 5.3

质点在重力作用下从指定点 P_0 (初速为零) 沿光滑固定曲线运动至另一指定点 P_1 时, 要使滑行时间最短, 问应通过怎样的曲线? 显然, 捷线应位于包含 P_0 及 P_1 的铅垂平面内。取 P_0xy 坐标系如图, 设曲线方程为

$$y = y(x) \quad (5.5.1)$$

质点滑过的微小弧段为

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (5.5.2)$$

设重力加速度为 g , 在任意点 $M(x, y)$ 处质点的速度为 $\sqrt{2gy}$, 因此滑过 ds 所需的时间为

$$dt = \sqrt{(2gy)^{-1} [1 + y'(x)^2]} dx \quad (5.5.3)$$

由 P_0 至 P_1 所需之全部时间为

$$J(y(x)) = \int_0^a \sqrt{(2gy)^{-1} [1 + y'(x)^2]} dx \quad (5.5.4)$$

其中 (a, b) 为 P_1 点的坐标。捷线问题归结为在满足端点条件

$$y(0) = 0, \quad y(a) = b \geq 0 \quad (5.5.5)$$

下寻求使 $J(y(x))$ 成为最小的函数 $y(x)$ 。

$J(y(x))$ 和依赖于有限个变量的函数不同, $J(y(x))$ 依赖于满足条件 (5.5.5) 的一切曲线 $y = y(x)$, 它是函数 $y(x)$ 的函数, 故称 $J(y(x))$ 为定义在函数族 $\{y(x)\}$ 上的泛函。

将捷线问题一般化, 就可提出古典变分法的最简单问题: 在给定端点条件

$$q(t_0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1 \quad (5.5.6)$$

下寻求使定义在函数族 $\{q(t)\}$ 上的泛函 J

$$J[q(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F(q, \dot{q}, t) dt \quad (5.5.7)$$

取极小(大)值的解函数 $q(t)$ 。

设在 (5.5.6) 式的条件下存在使 (5.5.7) 式的值成为驻值(包括极大、极小、及驻值各种情况)的函数, 记作

$$q = \bar{q}(t) \quad (5.5.8)$$

今另取满足

$$\eta(t_0) = 0, \quad \eta(t_1) = 0 \quad (5.5.9)$$

的函数 $\eta(t)$ 与任意实数 ε , 若令

$$q_\varepsilon(t) = \bar{q}(t) + \varepsilon \eta(t) \quad (5.5.10)$$

显然对于所有满足 (5.5.9) 式的 $\eta(t)$ 都能使 $q_\varepsilon(t)$ 满足 (5.5.6)

式,称 $q_*(t)$ 为“可取函数”,若将 $q=q_*(t)$ 代入 (5.5.7) 式,则 $J[q_*]$ 就成为 ε 的函数,而依假设它在 $\varepsilon=0$ 时应该取驻值,故必有下列式成立

$$\left(\frac{\partial J[q_*]}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=0 \quad (5.5.11)$$

将上式展开,并利用依赖于参数的定积分求导法,可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial J[q_*]}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} F[\bar{q}(t) + \varepsilon \eta(t), \dot{\bar{q}}(t) + \varepsilon \dot{\eta}(t), t] dt\right)_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [F_q \eta(t) + F_{\dot{q}} \dot{\eta}(t)] dt = 0 \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

其中 $F_q, F_{\dot{q}}$ 表示将 q 及 \dot{q} 视为自变量时, F 分别对 q 及 \dot{q} 的偏导数在 $\bar{q}(t)$ 上的值。应用分部积分法, (5.5.12) 可化为

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right] \eta(t) dt + F_{\dot{q}} \eta(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (5.5.13)$$

根据条件 (5.5.9), 左端最后一项应为零, 于是得到

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \eta(t) dt = 0 \quad (5.5.14)$$

由此得出结论: 驻值曲线 $q=\bar{q}(t)$ 必须满足微分方程

$$\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (5.5.15)$$

而此微分方程满足条件 (5.5.6) 的解就是泛函 (5.5.7) 的上述驻值问题的解, 方程 (5.5.15) 称为上述泛函问题的 Euler 微分方程。

由 (5.5.14) 式导出 (5.5.15) 式时, 应用了所谓变分法的基本引理: 设有连续函数 $f(t)$, 它对于满足边界条件 (5.5.9) 下的任意具有连续导数的函数 $\eta(x)$ 如果恒有

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) \eta(t) dt = 0 \quad (5.5.16)$$

则必有 $f(t) \equiv 0$ 。这是因为如果在某点 t_m 处 $f(t_m) \neq 0$, 例如

$f(t_m) > 0$, 则由它的连续性在 t_m 的某邻域内应有 $f(t) > 0$, 因此选取一个在此邻域内为正而在其外恒为零的连续可微函数 $\eta(t)$, 则必使 (5. 5. 16) 式的左端为正而与假设矛盾。

如记 $q(t)$ 的偏离 (即比较曲线 $q_*(t)$ 与驻值曲线 $\bar{q}(t)$ 数值之差) $q_*(t) - \bar{q}(t)$ 为 δq , 称为函数 $q(t)$ 的变分, 则有

$$\delta q = \varepsilon \eta(t) \quad (5. 5. 17)$$

$$\frac{d}{dt} \delta q = \varepsilon \dot{\eta}(t) = \dot{q}_*(t) - \dot{\bar{q}}(t) \quad (5. 5. 18)$$

记 $\dot{q}_*(t) - \dot{\bar{q}}(t)$ 为 $\delta \dot{q}$ (即比较曲线与驻值曲线上导数 \dot{q} 值之差), 并称为 \dot{q} 之变分, 则由上式可知

$$\frac{d}{dt} \delta q = \delta \dot{q} \quad (5. 5. 19)$$

这就是变分法中函数 $q(t)$ 的 d - δ 交换关系。

端点条件 (5. 5. 9) 可化为以下式子:

$$t = t_0, \delta q = 0; \quad t = t_1, \delta q = 0 \quad (5. 5. 20)$$

将 (5. 5. 12) 式两端乘以 ε , 并记泛函 J 之一阶变分为

$$\delta J \triangleq \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} J[q_*, \varepsilon] \right)_{\varepsilon=0} \quad (5. 5. 21)$$

则由 (5. 5. 17)、(5. 5. 18)、(5. 5. 19) 诸式可将 (5. 5. 12) 式以变分记号表达如下:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial q} \delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta F dt = 0 \quad (5. 5. 22)$$

或

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} F dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta F dt = 0 \quad (5. 5. 23)$$

上式可视为泛函 J 的求变分法则, 即变分运算可从积分号外移至积分号内, 或积分变分运算可互相交换。这里必须指出的是, 无论微分变分的可交换性 (5. 5. 19) 或积分变分的可交换性 (5. 5. 23) 都

以一种限制条件为前提, 这个限制条件为 t 是独立变量, 且不随 δ 运算而变。当 t 是时间变量时, 符合上述要求的变分称为等时变分, 时间变量参与变分时, 变分运算称为非等时变分, 这将在 5.9 节中讨论。

由 (5.5.22) 或 (5.5.23) 式可知, 泛函 $J[q(t)]$ 在端点条件 (5.5.6) 下存在驻值的条件是泛函 J 的一阶变分等于零。 J 的一阶变分实际上是 J 在驻值曲线 $q(t)$ 邻近按 ε 的展开式中的线性主部。这和函数的微分定义有类似之处。利用分部积分及微分变分交换关系 (5.5.19), 由 (5.5.22) 式同样可得到 Euler 微分方程 (5.5.15)。由于泛函变分法则简便易行, 故在今后的讨论中都采用泛函变分法则处理泛函驻值问题。

对于依赖于多个独立变化函数 $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ 的泛函

$$J(q_1, q_2, \dots, q_n) = \int_{t_0}^{t_1} F(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt \quad (5.5.24)$$

在固定端点条件

$$\left. \begin{aligned} q_1(t_0) &= q_1^0, q_2(t_0) = q_2^0, \dots, q_n(t_0) = q_n^0 \\ q_1(t_1) &= q_1^1, q_2(t_1) = q_2^1, \dots, q_n(t_1) = q_n^1 \end{aligned} \right\} \quad (5.5.25)$$

下的驻值问题可仿照上述方法求 J 的一阶变分, 并令一阶变分为零:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0 \quad (5.5.26)$$

端点条件 (5.5.25) 的变分表示成为

$$\left. \begin{aligned} t=t_0, \delta q_1 &= \delta q_2 = \dots = \delta q_n = 0 \\ t=t_1, \delta q_1 &= \delta q_2 = \dots = \delta q_n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.5.27)$$

对 (5.5.26) 式进行分部积分, 利用对各函数 $q_i(t)$ 的 d - δ 交换关系及端点条件 (5.5.27), 可得

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0 \quad (5.5.28)$$

由于各 δq_i 是互相独立的, 当上式成立时必有

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (5.5.29)$$

这就是依赖于多个函数的泛函 J 在固定端点条件 (5.5.25) 下存在驻值的条件, 它们构成一组 Euler 微分方程组。

5.5.2 Hamilton 原理的一般形式

我们将从 d'Alembert-Lagrange 原理出发进行推导, 为此, 将 d'Alembert-Lagrange 原理作如下变化

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - m_i \mathbf{v}_i \cdot (\delta \mathbf{r}_i)' \\ &= \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{v}_i + m_i \mathbf{v}_i \cdot [(\delta \mathbf{r}_i)' - \delta \mathbf{v}_i] \end{aligned} \quad (5.5.30)$$

此外, 还应注意到

$$\mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) = \frac{1}{2} \delta v_i^2 \quad (5.5.31)$$

将以上两式代入 d'Alembert-Lagrange 原理 (1.8.2), 便可得到以下结果

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \delta \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot [(\delta \mathbf{r}_i)' - \delta \mathbf{v}_i] \end{aligned} \quad (5.5.32)$$

上式右端第一项就是系统动能的变分 δT , 第二项是主动力的虚功 $\delta' W$, 因此又可表为

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \delta T + \delta' W + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot [(\delta \mathbf{r}_i)' - \delta \mathbf{v}_i] \quad (5.5.33)$$

这个方程称为普遍的中心方程，以它为出发点推导 Hamilton 原理或非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程都比较简捷，因而在分析力学中占有一定的地位。

将普遍中心方程 (5.5.33) 两端都在 t_0 至 t_1 的间隔内对时间 t 积分，就有

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta T + \delta' W + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot [(\delta \mathbf{r}_i)' - \delta \dot{\mathbf{r}}_i] \right\} dt \\ &= \left[\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \right]_{t_0}^{t_1} \end{aligned} \quad (5.5.34)$$

方程 (5.5.34) 是推导各种条件下 Hamilton 原理的基础，称为 Helmholtz 变分原理，它表明：对于任意非完整、非有势系统及任意指定的时端虚位移 $\delta \mathbf{r}_i|_{t_0}$ 及 $\delta \mathbf{r}_i|_{t_1}$ 下的真实运动而言，方程 (5.5.34) 必须恒能满足。

现在将 (5.5.34) 式用广义坐标表示，为此，列出并化简以下关系

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{r}_i)' - \delta \dot{\mathbf{r}}_i &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) - \delta \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \delta q_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} (\delta q_j)' - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \delta q_k \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta \dot{q}_j \end{aligned} \quad (5.5.35)$$

设 $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_j \partial q_k}$ 是连续的，因而上式中双重求和的指标 j, k 是可易的，因而可化简为

$$(\delta \mathbf{r}_i)' - \delta \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} [(\delta q_j)' - \delta \dot{q}_j] \quad (5.5.36)$$

此外尚有

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad (5.5.37)$$

及

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \quad (5.5.38)$$

其中应用了 Lagrange 经典关系, 将 (5.5.36) 至 (5.5.38) 式代入 (5.5.34) 式后可得到用广义坐标表示的 Helmholtz 变分原理

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta T + \delta' W + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} [(\delta q_j)' - \delta \dot{q}_j] \right\} dt - \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (5.5.39)$$

我们知道, 中心方程中的 δT 表示在任一时刻由真实运动过渡到可能运动的动能变更, $\delta' W$ 表示在同一时刻主动力在虚位移 $\delta \mathbf{r}_i$ 上的总功, 现在我们对可能运动 (当然也包括真实运动在内) 作如下规定: 它们在时刻 t_0 及 t_1 都有同一位形, 换言之, 这些运动无论在位形空间或事件空间 (增广位形空间) 中其轨迹都要经过对应

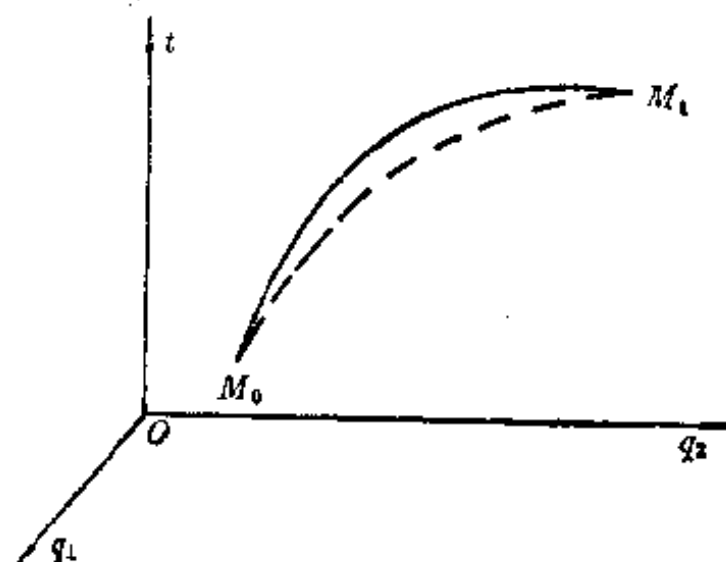


图 6.4

t_0 及 t_1 的两个固定端点 M_0 及 M_1 , 为了方便起见, 将满足固定端点下的可能运动在位形空间中的轨迹叫做旁路, 而将通过固定端点的真实运动在位形空间中的轨迹叫做正路, 在图中正路用实线表示, 旁路用虚线表示。旁路只需满足约束条件(完整或非完整), 而正路除满足约束条件外, 还需满足动力学定律, 基于以上规定, 很容易看出在端点 M_0 及 M_1 处应满足以下条件:

对于 $t=t_0$ 及 $t=t_1$, 应有

$$\delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (i=1, \dots, N) \quad (5.5.40)$$

由以上端点条件可知(5.5.34)式右端最后一项应为零, 于是我们得到以下方程:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta T + \delta' W + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot [(\delta \mathbf{r}_i)' - \delta \dot{\mathbf{r}}_i] \right\} dt = 0 \quad (5.5.41)$$

这是固定端点下的 Helmholtz 原理, 也是普遍形式的 Hamilton 原理, 它表明: 对于任意非完整非有势系统而言, 在所有满足端点条件(5.5.40)的旁路中, 正路应使方程(5.5.41)式成立。

如用广义坐标表达(5.5.41)式, 则首先应注意到端点条件变为:

对于 $t=t_0$ 及 $t=t_1$, 应有

$$\delta q_j = 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.5.42)$$

将以上条件代入(5.5.39)式, 则用广义坐标表示的普遍形式的 Hamilton 原理可表为

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta T + \delta' W + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} [(\delta q_j)' - \delta \dot{q}_j] \right\} dt = 0 \quad (5.5.43)$$

方程(5.5.43)与方程(5.5.39)的区别在于是否限制固定端点, 二者都有重要意义, 人们习惯于将(5.5.43)式称为 Hamilton 原理(普遍意义的), 将(5.5.39)式称为 Hamilton 定律*

* 见参考文献[31]

5.5.3 完整系统的 Hamilton 原理

对于完整系统, 我们已知所有广义坐标均应满足 d- δ 交换关系, 即

$$\frac{d}{dt}(\delta q_j) = \delta \dot{q}_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.5.44)$$

因之方程(5.5.43)化为

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' W) dt = 0 \quad (5.5.45)$$

这是完整非有势系统的 Hamilton 原理, 本原理之所以能作为完整非有势系统的力学原理是因为它和完整非保守系统的 Lagrange 方程是等价的, 证明如下: 由于

$$T = T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n, t)$$

故有

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' W) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + Q_j \delta q_j \right) \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j \right] dt \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j dt \quad (5.5.46) \end{aligned}$$

在以上推导中利用了完整约束条件下的 d- δ 交换关系。由于 δq_j 必须满足端点条件(5.5.42), 故知上式右端第一项自动消失了, 最后得到

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j dt = 0 \quad (5.5.47)$$

利用各个 δq_j 之间的独立性(完整系统所规定的)及变分法的基本

引理可知, 方程(5.5.47)如成立则必给出 Lagrange 第二类方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.5.48)$$

对于完整有势系统, 主动力存在势函数 $V(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ 并有以下关系

$$\delta' W = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j = -\delta V \quad (5.5.49)$$

于是(5.5.45)式变为

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0 \quad (5.5.50)$$

式中 $L = T - V$, 是系统的 Lagrange 函数。对于固定时段条件下的时式变分而言, 变分运算可以移至积分记号之外, 上式变为

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \quad (5.5.51)$$

定义泛函

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n, t) dt \quad (5.5.52)$$

为 Hamilton 作用量, 则完整有势系统的 Hamilton 原理可表为:
在两个给定位形之间的正路不同于旁路之处在于, 正路使 Hamilton 作用量取驻值。

由变分学可知, 泛函 S 的驻值条件归结为以下形式的 Euler 方程组:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.5.53)$$

而这正是完整有势系统的 Lagrange 方程, 这也表明本原理可作为完整有势系统的基本力学原理, 也证明了 Lagrange 方程(5.5.48)和 Hamilton 原理(5.5.51)是等价的。

关于完整有势系统的 Hamilton 原理, 以下几点值得注意

(1) 完整有势系统的 Hamilton 原理 (5.5.51) 是我们得到的第一个驻值型积分变分原理。在此之前所得到的 Helmholtz 原理 (5.5.35) 及完整非有势系统的 Hamilton 原理 (5.5.39) 虽然也是积分变分原理, 但并非驻值型积分原理, 因为它们不能归结为某泛函的驻值问题。

(2) 完整有势系统的 Hamilton 原理是位形空间中的驻值积分原理, 其实质是给出了从通过位形空间中两个固定点间的旁路中选出正路的准则, 在这里应注意的是, 对于完整系统, 从正路给以任意虚变更 δq_j 后所得到的轨迹 $q_j + \delta q_j$ 都是可能运动, 即都是旁路, 因之位形空间中的可能运动轨迹和泛函 $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ 的可取函数是完全一致的, 显然上述性质对于非完整系统一般不成立, 因之可以预见到非完整系统的积分原理一般不能归结为泛函驻值问题。

(3) 由于完整有势系统的 Hamilton 原理是驻值积分原理, 它比起其它非驻值积分原理有更为优良的特性, 对于发展动力学问题的直接解法 (基于积分原理的变分解法, 是近似解法的一种) 有非常重要的意义。

(4) 完整有势系统的 Hamilton 原理只涉及系统的状态函数, 如系统的总动能及总势能, 由于有限多自由度系统及连续系统 (无限多自由度系统) 中都可以定义系统的动能及势能, 而连续系统不过是有限多自由度系统的极限情况, 因之, Hamilton 原理有可能从有限多自由度系统推广到连续系统, 这是 Hamilton 原理的重要优点。

5.5.4 非完整系统的 Hamilton 原理

我们重新写出固定端点下的 Helmholtz 原理如下

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta T + \delta' W + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} [(\delta q_j)' - \delta \dot{q}_j] \right\} dt = 0 \quad (5.5.54)$$

当处理方括号内的 $d-\delta$ 交换差时, 涉及到不同的 $d-\delta$ 交换关系定义, 以下分两种情形讨论:

(1) Hamilton 原理的 Hölder 形式

根据 Hölder 定义, 可对所有坐标应用 $d-\delta$ 交换关系, 因之 (5.5.54) 式中方括号中的内容自动消除了。于是得到 Hölder 定义下的 Hamilton 原理或 Hamilton 原理的 Hölder 形式:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' W) dt = 0 \quad (5.5.55)$$

如果系统是有势的, 上述原理可进一步化为

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0 \quad (5.5.56)$$

其中 $L = T - V$ 为系统的 Lagrange 函数, 但此时不能将变分运算移至积分号之外, 换言之, 不能归结为驻值积分原理, 因为经过 Hölder 定义的 $d-\delta$ 交换后, 一般说来不能从正路得到旁路 (符合非完整约束条件的可能运动), 这在 5.4 节中已详细论证过, 因之原理 (5.5.55) 不再具有“从位形空间中的旁路中选出正路”那样的含义, 当然也就不能归结为驻值积分原理。

由 Hölder 定义下的 Hamilton 原理可推导一阶非完整系统的运动方程如下, 由 (5.5.55) 式可展开为

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j \right] dt = 0 \quad (5.5.57)$$

经过分部积分, 并利用 Hölder 定义的 $d-\delta$ 交换关系, 可将 (5.5.57) 式化为

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt = 0 \quad (5.5.58)$$

设系统所受到的非完整约束具有以下形式

$$f_k(q_j, \dot{q}_j, t) = 0 \quad \begin{pmatrix} k=1, \dots, g \\ j=1, \dots, n \end{pmatrix} \quad (5.5.59)$$

坐标变分按 Четаев 定义应满足以下方程

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j = 0 \quad (k=1, \dots, g) \quad (5.5.60)$$

将(5.5.60)式之每一式乘以待定乘子 λ_k , 并在 t_0 至 t_1 的区间内积分, 然后并入(5.5.58)式, 可得:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^g \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta q_j dt = 0 \quad (5.5.61)$$

适当选择 λ_k 以使 k 个不独立的 δq_j 前的因子为零, 剩下 $n-g$ 个 δq_j 是独立的坐标变分, 因之它们的因子也应为零, 于是最后得到著名的 Routh 方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^g \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.5.62)$$

对于非有势的一阶非完整系统, 可由原理(5.5.54)出发, 仿照类似的论证得到非有势情况下的 Routh 方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{k=1}^g \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.5.63)$$

(2) Hamilton 原理的 Сулов 形式

由 5.4.3 节已知 Сулов 定义的 d - δ 交换关系如下, 对其中 $n-g$ 个独立的速度其变分满足交换关系

$$\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j \quad \begin{pmatrix} j=1, \dots, m \\ m=n-g \end{pmatrix} \quad (5.5.64)$$

剩下 g 个速度变分由约束方程

$$f_k(q_j, \dot{q}_j, t) = 0 \quad \begin{pmatrix} k=1, \dots, g \\ j=1, \dots, n \end{pmatrix} \quad (5.5.65)$$

决定,由此导出以下关系(见(5.4.22)式):

$$\delta \dot{q}_{m+p} = \frac{d}{dt} (\delta q_{m+p}) - \sum_{j=1}^m T_j^{m+p} \delta q_j \quad \begin{pmatrix} p=1, \dots, g \\ m=n-g \end{pmatrix} \quad (5.5.66)$$

其中

$$T_j^{m+p} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial q_j} - \sum_{s=1}^g \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial q_{m-s}} \frac{\partial \dot{q}_{m+s}}{\partial \dot{q}_j} \quad (5.5.67)$$

将(5.5.64)及(5.5.66)式代入 Helmholtz 原理(5.5.54)后,可得

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta T + \delta' W + \sum_{p=1}^g \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+p}} \sum_{j=1}^m T_j^{m+p} \delta q_j \right\} dt = 0 \quad (5.5.68)$$

这就是 Hamilton 原理的 Cysлов 形式,如系统是有势的,则原理可用 Lagrange 函数 L 简化为

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta L + \sum_{p=1}^g \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{m+p}} \sum_{j=1}^m T_j^{m+p} \delta q_j \right\} dt = 0 \quad (5.5.69)$$

由 Hamilton 原理的 Cysлов 形式可以导出用广义坐标表示的 Чаплыгин 方程,为此,将 m 个独立速度从(5.5.65)式中解出代入 Lagrange 函数,新的 Lagrange 函数 \bar{L} 是全部广义坐标及独立广义速度及 t 的函数:

$$\bar{L} = \bar{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t) \quad (5.5.70)$$

由此可求得 \bar{L} 的变分如下:

$$\delta \bar{L} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{p=1}^g \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_{m+p}} \delta q_{m+p} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \quad (5.5.71)$$

由 Четаев 定义的坐标变分,可将非独立的变分 δq_{m+p} 用独立变分 δq_j 表示

$$\delta q_{m+p} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \quad (p=1, \dots, g) \quad (5.5.72)$$

(5.5.71)式右端最后一项经过分部积分, 并注意 $\delta \dot{q}_j$ 都是独立速度之变分可应用交换关系(5.5.64), 于是有

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j dt \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j dt \end{aligned} \quad (5.5.73)$$

将(5.5.72)及(5.5.73)代入(5.5.71)式, 最后 Hamilton 原理的 Суслов 形式给出 Чаплыгин 方程如下

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_j} - \sum_{p=1}^g \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_{m+p}} \frac{\partial \dot{q}_{m+p}}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{p=1}^g \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{m+p}} T_j^{m+p} &= 0 \\ (j=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (5.5.74)$$

方程的数目和自由度数相一致是这类方程的特点。关于非完整系统运动方程的全面论述将放在第六章, 在这里不过初步显示积分原理对于建立非完整系统动力学方程的作用。

5.6 Hamilton 原理与正则方程及正则变换的关系

5.6.1 由 Hamilton 原理推导正则方程

为了从 Hamilton 原理推导正则方程, 我们将第四章中之 Legendre 变换写出如下

$$L = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j, t) \quad (5.6.1)$$

其中函数 H 可用以下方法求得(见第二章), 非定常系统为

$$H = T_2 + (V - T_0) \quad (5.6.2)$$

定常系统为

$$H = T + V \quad (5.6.3)$$

其中 T 及 T_2 中的 \dot{q}_j 应该用以下定义的广义动量为正则变量 q_j 、 p_j 的函数,

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (5.6.4)$$

由 (5.6.1) 式可得

$$\delta L = \sum_{j=1}^n \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j + \sum_{j=1}^n \left[p_j (\delta \dot{q}_j) - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j \right] \quad (5.6.5)$$

我们知道, Hamilton 方程中的第一组方程

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.6.6)$$

并非来自什么力学原理, 而是来自广义动量的定义 (5.6.4) 式, 并进行 Legendre 变换后的结果, 所以 (5.6.5) 式中含 δp_j 的项应该恒等于零, 于是 (5.6.5) 式化为以下结果:

$$\delta L = \sum_{j=1}^n \left[p_j (\delta \dot{q}_j) - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j \right] \quad (5.6.7)$$

将上式的右端第一项进行分部积分:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} p_j (\delta \dot{q}_j) dt &= \sum_{j=1}^n \left[p_j \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_j \delta q_j dt \right] \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \dot{p}_j \delta q_j dt \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

于是由 (5.6.7) 式及 Hamilton 原理有以下结果

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt = 0 \quad (5.6.9)$$

根据变分法的预备定理并考虑到 δq_j 的独立性, 便有

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.6.10)$$

这便是 Hamilton 原理的第二组方程。

值得注意的是, 某些作者将正则变量表示的 Hamilton 原理写为

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j, t) \right] dt = 0 \quad (5.6.11)$$

并认为 Hamilton 函数 $H(q_j, p_j, t)$ 一旦建立起来后, 就应视 p_j 、 q_j 为独立变量, 正则方程则是在独立变分 δp_j 、 δq_j 的条件下 Hamilton 作用量 S 取驻值的结果, 于是由 (5.6.11) 式化为

$$\sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left\{ -\left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j + \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j \right\} dt = 0 \quad (5.6.12)$$

并由 $2n$ 个变分 δp_j 及 δq_j 的独立性得到了正则方程。这种观点其实是似是而非的, 如果不问变量 p_j 的来源, 作为纯数学命题, 正则方程组和把 p_j 、 q_j 作为独立变量的泛函

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j, t) \right] dt \quad (5.6.13)$$

的驻值条件诚然在数学上等价的, 但是不问 p_j 的来源, Hamilton 函数就无从建立。所以正则变量 p_j 、 q_j 形式上的独立掩盖了本质上的不独立。

这种本质上的不独立也反映了系统运动在位形空间中和相空间中几何特性上的差别。在位形空间中联结任意两给定点之间的任何连续曲线都是系统的可能运动, 而在相空间中联结任意两给定点之间的任意连续曲线不一定代表系统的可能运动。以单自由度质点运动为例, 设 q 为广义坐标, 则广义动量为

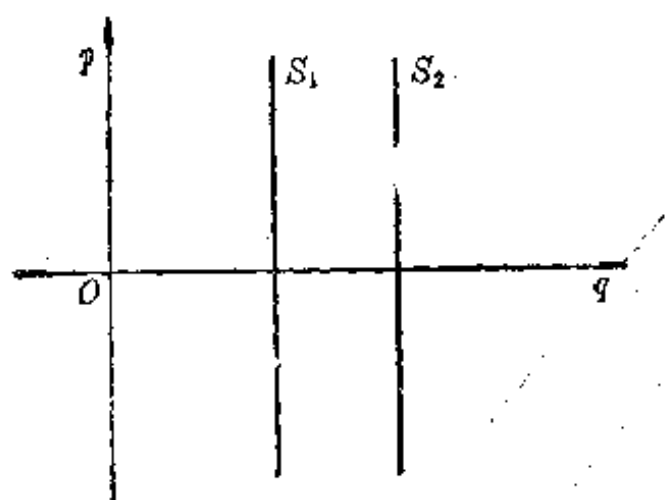


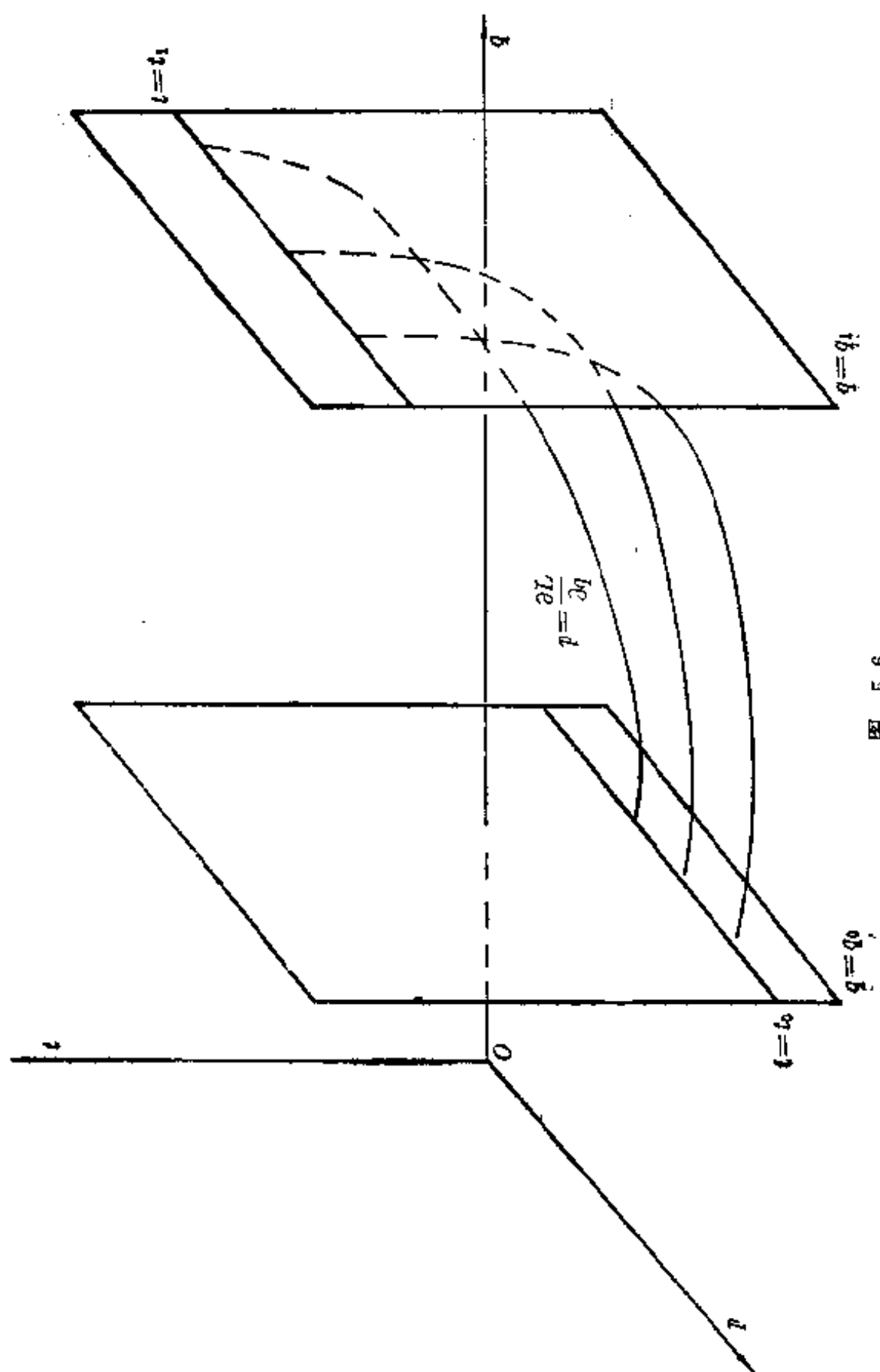
图 5.5

$$p = m\dot{q} \quad (5.6.14)$$

坐标和动量的上述关系实际上反映了坐标和速度之间的基本关系，这种关系并非相空间中任何轨线都能满足。例如相平面上所有平行于 p 轴之直线 S_1, S_2 等表示坐标不变，但速度可变； $p=0$ 所代表之直线，它表示速度为零，但坐标可变等都是荒谬的，因为它们都不能满足 (5.6.14) 式。可见，在相空间中只有满足条件 $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ 的轨线才能代表系统的可能运动。

还可以看到，在位形空间中任取两点不但可以联结无数条表示可能运动的轨迹(即旁路)，而且旁路族中必然含有真路，但在相空间中，即使在任选两点间存在代表可能运动的旁路，但旁路族中不一定包含有真路，这是因为在 $2n$ 维相空间中任意给定 $4n$ 个端点条件的真路是不一定存在的。

由以上讨论可以认为，Hamilton 原理在相空间中的解释可用下述方式表达：在相空间中任意给定两不同时刻 t_0 及 t_1 之两点坐标 $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}$ 及 $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \dots, q_n^{(1)}$ (但不规定两点动量)，在满足条件 $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ 之所有旁路中，真路使 Hamilton 作用量



$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j, t) \right] dt \quad (5.6.15)$$

取驻值。

现在以两变量 p, q 系统所代表的单自由度系统为例, 其增广相空间中的旁路族示于图 5.6 中。

不难看出, 这些旁路族的几何特性和位形空间中的旁路族相比较有重要区别: (1) 在 n 维位形空间或 $n+1$ 维增广位形空间中的旁路族, 可以且必须通过两个固定点, 而在 $2n$ 维相空间或 $2n+1$ 维增广相空间中的旁路族不可能有固定端点, 但两端点却必须分别位于 t 及 q_j 为常数的两个 n 维超曲面上 (在一个自由度系统情况下, 它是直线), 见图 5.6。(2) 在位形空间中的旁路除通过固定端点外别无其它限制, 而在相空间中的旁路必须满足条件

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}。$$

5.6.2 由 Hamilton 原理建立正则变换

由以上所述可知, 由 Hamilton 原理及 Legendre 变换可以得到正则方程。反之, 任何满足正则方程

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (5.6.16)$$

的变量 q_j, p_j 也一定适合 Hamilton 原理:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j, t) \right] dt = 0 \quad (5.6.17)$$

现在作正则变换, 设新正则变量为 P_j, Q_j , 基于同样的理由, 任何满足正则方程

$$\begin{aligned} Q_j &= \frac{\partial K}{\partial P_j}, \\ P_j &= -\frac{\partial K}{\partial Q_j} \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (5.6.18)$$

的变量 P_j, Q_j 也一定适合 Hamilton 原理:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=1}^n P_j \dot{Q}_j - K(Q_j, P_j, t) \right] dt = 0 \quad (5.6.19)$$

(5.6.17) 式和 (5.6.19) 式同时被满足并不一定要求这两式中的被积函数完全相等, 它们可解相差一个倍数 c 和一个任意函数 S 的全导数, 我们只限于单价自由正则变换, 即 $c=1$, 并假定这个函数 S 含有 q_j 及 Q_j , 即

$$S = S(q_j, Q_j, t) \quad (5.6.20)$$

将它的全导数 $\frac{dS}{dt}$ 在 t_0 至 t_1 区间进行积分, 得到以下结果:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dS}{dt} dt = S[q_j(t_1), Q_j(t_1), t_1] - S[q_j(t_0), Q_j(t_0), t_0] \quad (5.6.21)$$

这是个定值, 它的变分恒等于零, 即

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{dS}{dt} dt = 0 \quad (5.6.22)$$

于是我们得到

$$\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^n P_j \dot{Q}_j - K(Q_j, P_j, t) + \frac{dS}{dt}$$

或

$$\sum_{j=1}^n p_j dq_j - H dt = \sum_{j=1}^n P_j dQ_j - K dt + dS \quad (5.6.23)$$

这就是我们在第四章得到的正则变换中的方案一, 再利用 Legendre 变换不难得到正则变换的其它方案。

5.7 Hamilton 作用量的极值性质

在 5.5 节中, 我们曾说 Hamilton 原理是驻值原理而没有肯定它是极值原理。在本节中, 我们将详细探讨 Hamilton 原理的极值性质, 从而可以弄清楚为什么不提极值原理而提驻值原理。

由变分法可知, 泛函 S 的一阶变分 δS 等于零是泛函 S 取极值的必要而非充分条件。要想知道泛函 S 的极值性质, 必须研究二阶变分 $\delta^2 S$ 的正负号。将函数 L 的变更 ΔL 展开并取至二阶变分项:

$$\begin{aligned}\Delta L = \delta L + \delta^2 L = \delta L + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 (T-V)}{\partial q_s \partial q_k} \times \delta q_s \delta q_k \\ + \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_s \delta \dot{q}_k \\ + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_s \delta \dot{q}_k\end{aligned}\quad (5.7.1)$$

但在定常约束条件下动能是广义速度的二次型, 因此上式右端最后一个和式可记作 $T(\delta \dot{q})$, 即在动能表达式中用 $\delta \dot{q}_s$ 代替 \dot{q}_s 。于是, $\delta^2 L$ 可表为

$$\begin{aligned}\delta^2 L = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 (T-V)}{\partial q_s \partial q_k} \delta q_s \delta q_k \\ + \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_s \delta \dot{q}_k + T(\delta \dot{q})\end{aligned}\quad (5.7.2)$$

由于 $\delta q_s(t_0) = 0$, 所以对于任一瞬时 t , 有

$$|\delta q_s(t)| = \left| \int_{t_0}^t \delta \dot{q}_s dt \right| < \beta_s(t-t_0) \quad (5.7.3)$$

其中 β_s 为在时间间隔 $t_0 < t < t_1$ 内 $\delta \dot{q}_s$ 的模的最大值。因此对于

足够小的时间间隔 $t_1 - t_0$, (5.7.2) 式右端前两项可以任意小, 最后一项将起主导作用, $\delta^2 L$ 的正负号也就由这一项所决定:

$$\delta^2 L \approx T(\delta \dot{q}) > 0$$

这是因为动能总是正值。最后我们可以肯定, 对于足够小的时间间隔 $t_1 - t_0$, 有以下不等式:

$$\delta^2 S = \int_{t_0}^{t_1} \delta^2 L dt \approx \int_{t_0}^{t_1} T(\delta \dot{q}) dt > 0 \quad (5.7.4)$$

这就是说, 对于足够小的时间间隔 $t_1 - t_0$, 作用量 S 对于正路应取极小值。

当时间间隔 $t_1 - t_0$ 并非小量时, 就不能肯定作用量 S 对于正路是否仍具有极小值。事实上, 可能出现既非极大也非极小的临界情况。只要举一个最简单的例子便足以说明以上论断。研究不受任何主动力作用的质点被限制在一光滑球面上运动, 如图 5.7

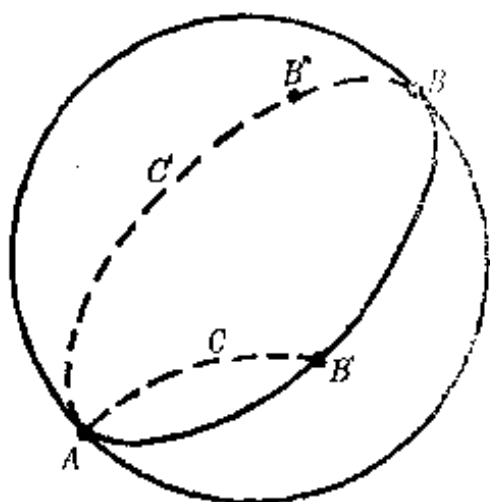


图 5.7

所示。容易看出, 连结球面上任意两点间的正路是在通过这两点的大圆弧上作等速运动。当 $t_1 - t_0$ 足够小时, 或球面上的 A 点和 B' 点足够靠近时, 在大圆弧 $\widehat{AB'}$ 上的作用量为

$$S_0 = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} v_0^2 dt$$

而沿任何旁路 ACB' 运动时的作用量为

$$S = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} v^2 dt$$

二者之差为

$$S - S_0 = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} (v^2 - v_0^2) dt$$

注意,对于正路 v_0 为常数,因此我们有

$$\begin{aligned} S-S_0 &= mv_0 \int_{t_0}^{t_1} (v-v_0) dt + \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} (v-v_0)^2 dt \\ &\geq mv_0 \int_{t_0}^{t_1} (v-v_0) dt = mv_0 (\sigma_{旁路} - \sigma_{正路}) \end{aligned}$$

但是在球面 AB' 两点间的弧长 $\sigma_{正路}$ 总是小于通过这两点间的任何旁路曲线弧长 $\sigma_{旁路}$ 。因此我们有:

$$S-S_0 > 0 \quad (5.7.5)$$

这和以上的一般性证明(5.7.4)是一致的。事实上,不等式(5.7.5)不一定要 t_1-t_0 很小才成立,只要 AB' 弧长不超过 πR , 即不超过半个大圆弧周长时,不等式(5.7.5)都是成立的。当点 B' 处在过 A 点的一个直径的另一端点 B 时,通过 A, B 两点可作无数条大圆弧,都是正路,一般情况下,在位形空间中两点 A, B 之间有无数条正路通过时,称 A, B 互为共轭焦点。当正路上出现共轭焦点时,就意味着最小作用量性质失效,例如对于弧长超过 πR 的正路 ABB'' 而言,作用量 S 的极小值将在作为旁路的补弧 $AC'B''$ 上达到,所以超过 πR 上述论断就不再成立了。

5.8 基于变分原理的直接解法

各种变分原理之所以能成为力学的基本原理,就在于由它们都能导出系统运动方程,这是它们的重要应用之一,除此之外,这些原理还能提供动力学问题的直接解法。所谓直接解法就是不依赖于运动微分方程的积分而直接利用变分原理本身以求得近似解,这种直接解法有十分重要的意义,因为运动微分方程(如 Lagrange 方程)常常是非线性的方程组,要找出它的有限形式的准确解是十分困难的,甚至是不可能的。我们以前讨论过利用首次积分(如广义能量积分及循环积分)求解,以及其它积分方法

(如 Hamilton-Jacobi 方法)也只在一定条件下适用,而且只有少数情况可以求出具体解,因而都有一定程度的局限性。因之需要另辟蹊径,寻求不依赖于积分运动微分方程的直接解法。首次利用变分原理提出直接解法的是 Ritz(1908 年),随后 Galerkin (1915 年)提出了更为一般性的变分解法,这些方法最初只在弹性静力学中得到应用,随后被推广到弹性体的自由振动问题中。至于针对离散系统并且基于动力学变分原理的直接解法,只是最近二十年来才受到重视;并得到一些有意义的结果。以下分别介绍一些有代表性的直接解法。

5.8.1 基于 Hamilton 原理的直接解法

由 Hamilton 原理可知,在完整保守系统中对于所有满足端点条件

$$\left. \begin{array}{l} q_j(t_0) = q_{j0} \\ q_j(t_1) = q_{j1} \end{array} \right\} \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.8.1)$$

的可能运动而言,真实运动应使泛函

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (5.8.2)$$

取驻值,或真实运动应满足

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0 \quad (5.8.3)$$

现在我们取以下形式的近似解作为可能运动:

$$\begin{aligned} q_j &= a_{j1}\varphi_{j1}(t) + a_{j2}\varphi_{j2}(t) + \dots + a_{jm}\varphi_{jm}(t) \\ &= \sum_{k=1}^m a_{jk}\varphi_{jk}(t) \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (5.8.4)$$

其中 $\varphi_{jk}(t)$ 称为试函数或可取函数,它们可事先选定,但需使端点条件(5.8.1)能自动满足,参数 a_{jk} 是可变的待定参数,给 a_{jk}

以不同值,就得到不同的可能运动,当作为可能运动的近似解代入泛函 S 的表达式(5.8.2)中时, S 就成为含有 $m \times n$ 个变量 a_{jk} 的函数, S 的驻值条件就归结为

$$\frac{\partial S}{\partial a_{jk}} = 0 \quad \begin{pmatrix} j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, m \end{pmatrix} \quad (5.8.5)$$

这是含有 $m \times n$ 个未知量的代数方程组。一般说来,这是非线性代数方程组,在特殊情况下是线性方程组。将这个方程组的解 a_{jk} 代入(5.7.4)式中,就得到满足端点条件(5.8.1)的近似解。以上所说的不过是变分法中的 Ritz 法在动力学系统中的具体应用,实质上是将泛函驻值问题近似地化为多元函数的驻值问题。近似解(5.8.4)中取的项数愈多,就相当于我们在更广的范围中取可能运动,这样得到的近似解就更接近于精确解。

例题 5.8.1 已知单自由度谐振子的 Lagrange 函数为

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} q^2 \quad (a)$$

求满足以下端点条件

$$q(0) = 0, \quad q(1) = 1 \quad (b)$$

的近似解。

解 这个问题的精确解是很容易求得的,可表为

$$q(t) = \frac{\sin t}{\sin 1} \quad (c)$$

对于如此简单的问题本来没有必要去求近似解,我们的目的在于用精确解考验近似解的可靠性。作为一阶近似,可取以下形式的近似解:

$$q(t) = t + \alpha t(1-t^2) \quad (d)$$

α 为待定常数。显然,它是能够满足端点条件(b)的。将上式对 t 求导,可得到

$$\dot{q}(t) = 1 + \alpha(1-3t^2) \quad (e)$$

由(d)及(e)可得到

$$\delta q = t(1-t^2)\delta\alpha$$

及

$$\delta\dot{q} = (1-3t^2)\delta\alpha \quad (f)$$

Hamilton 作用量 S 的变分为

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_0^1 \delta L dt = \int_0^1 \delta \left(\frac{\dot{q}^2 - q^2}{2} \right) dt \\ &= \int_0^1 (\dot{q}\delta\dot{q} - q\delta q) dt \end{aligned} \quad (g)$$

将(d)式至(f)式中的 $q, \dot{q}, \delta q, \delta\dot{q}$ 代入上式, 便得

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_0^1 [1 + \alpha(1-3t^2)](1-3t^2)\delta\alpha dt \\ &\quad - \int_0^1 [t + \alpha t(1-t^2)] \cdot t(1-t^2)\delta\alpha dt \\ &= \left(-\frac{2}{15} + \frac{76}{105}\alpha \right) \delta\alpha \end{aligned} \quad (h)$$

由 Hamilton 原理, α 值的选取应能满足 $\delta S = 0$ 。因此, 有

$$\begin{aligned} -\frac{2}{15} + \frac{76}{105}\alpha &= 0 \\ \alpha &= \frac{7}{38} \end{aligned}$$

求得的一次近似解为

$$q_1 = t + \frac{7}{38}t(1-t^2) \quad (i)$$

为了求得更好的结果, 我们还可取以下形式的二阶近似解:

$$q = t + \alpha t(1-t^2) + \beta t^3(1-t^2) \quad (j)$$

其中 α, β 为两个待定系数。由上式对 t 求导, 可得

$$\dot{q} = 1 + (1-3t^2)\alpha + (3t^2-5t^4)\beta \quad (k)$$

由以上两式可求变分:

$$\delta q = t(1-t^2)\delta\alpha + t^3(1-t^2)\delta\beta \quad (l)$$

$$\delta\dot{q} = (1-3t^2)\delta\alpha + (3t^2-5t^4)\delta\beta \quad (m)$$

分别求 $q\delta\dot{q}$ 及 $q\delta q$ 如下:

$$\begin{aligned} q\delta\dot{q} = & [(1-3t^2)^2\alpha + (1-3t^2)(3t^2-5t^4)\beta \\ & + (1-3t^2)]\delta\alpha + [(1-3t^2)(3t^2-5t^4)\alpha \\ & + (3t^2-5t^4)^2\beta + (3t^2-5t^4)]\delta\beta \end{aligned} \quad (n)$$

$$\begin{aligned} q\delta q = & [t^2(1-t^2)^2\alpha + t^4(1-t^2)^2\beta + t^2(1-t^2)]\delta\alpha \\ & + [t^4(1-t^2)^2\alpha + t^6(1-t^2)^2\beta \\ & + t^4(1-t^2)]\delta\beta \end{aligned} \quad (o)$$

将以上两表达式代入 δS 的表达式

$$\delta S = \int_0^1 (q\delta\dot{q} - q\delta q) dt$$

时,需进行以下积分:

$$\int_0^1 (1-3t^2)^2 dt = \frac{4}{5}$$

$$\int_0^1 (1-3t^2) dt = 0$$

$$\int_0^1 (1-3t^2)(3t^2-5t^4) dt = \frac{12}{35}$$

$$\int_0^1 t^2(1-t^2) dt = \frac{8}{105}$$

$$\int_0^1 t^2(1-t^2)^2 dt = \frac{2}{15}$$

$$\int_0^1 t^4(1-t^2)^2 dt = \frac{8}{315}$$

$$\int_0^1 t^6(1-t^2)^2 dt = \frac{8}{693}$$

$$\int_0^1 t^4(1-t^2) dt = \frac{2}{35}$$

$$\int_0^1 (3t^2-5t^4)^2 dt = \frac{92}{315}$$

$$\int_0^1 (3t^2-5t^4) dt = 0$$

于是, 由于 $\delta\alpha$ 与 $\delta\beta$ 是互相独立的, $\delta S=0$ 给出以下两个方程:

$$\left. \begin{aligned} 684\alpha + 300\beta &= 126 \\ 1100\alpha + 972\beta &= 198 \end{aligned} \right\}$$

解这个方程组, 得到

$$\alpha = 0.188360, \quad \beta = -9.46101 \times 10^{-3}$$

我们就得到二阶近似解如下:

$$q_2 = t + 0.18836t(1-t^2) - 9.46101 \times 10^{-3}t^3(1-t^2) \quad (p)$$

为了考察近似解的可靠程度, 我们将精确解(c)、一阶近似解(i)及二阶近似解(p), 对于 $t=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ 的值列表比较如下:

t	精 确 解 q	一 阶 近 似 q_1	二 阶 近 似 q_2
0	0	0	0
0.2	0.236098	0.235368	0.236092
0.4	0.462783	0.461895	0.462780
0.6	0.671018	0.670737	0.671022
0.8	0.852502	0.853053	0.852504
1	1	1	1

由以上所列数字结果可知, 精确解和近似解在端点 $t=0$ 及 $t=1$ 处都是准确满足的(这是作近似计算的基本前提), 误差则是发生在区间 $0 < t < 1$ 内。一阶近似已经给出很满意的结果(相对误差 $\epsilon < 1\%$)。至于二阶近似则准确到五位有效数字。

对于非保守系统, 可从 Hamilton 原理的一般形式出发:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' W) dt = 0 \quad (5.8.6)$$

取满足端点条件(5.8.1)的近似解:

$$q_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \varphi_{jk}(t) \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.8.7)$$

由于这个曲线族满足端点条件, 利用完整约束条件下的 d- δ 交换

关系可将(5.8.6)式化为以下形式:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j dt = 0 \quad (5.8.8)$$

其中 T 为系统的动能, Q_j 为第 j 个广义力。由于

$$\delta q_j = \sum_{k=1}^m \delta a_{jk} \varphi_{jk}(t) \quad (5.8.9)$$

所以(5.8.8)又可表为:

$$\sum_{k=1}^m \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \varphi_{jk}(t) \right\} \delta a_{jk} dt = 0 \quad (5.8.10)$$

由于 δa_{jk} 的独立性, 上式可分解为以下方程组:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \varphi_{jk}(t) dt = 0 \quad \begin{pmatrix} k=1, \dots, m, \\ j=1, \dots, n \end{pmatrix} \quad (5.8.11)$$

和 Ritz 法类似, 我们仍然可得到 $m \times n$ 个方程, 可解 $m \times n$ 个未知量 a_{jk} , 这种变分解法称为 Galerkin 法, 它是属于更一般的加权余量法中的一种基本方法, 可以给 Galerkin 法一个简单的力学解释: 对于精确解, 以下表达式

$$e(q_j) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.8.12)$$

应恒等于零。但对于近似解, 表达式 $e(q_j)$ 一般不等于零, 它的值可以看成近似解带来的误差或余量 (有人称为残值)。Galerkin 法的实质就是这个余量在以 $\varphi_{jk}(t)$ 为权函数条件下在时段 $t_1 - t_0$ 中的加权总余量为零。如将 $e(q_j)$ 看作近似解引起的不平衡广义力, 则 Galerkin 法又可看作近似解引起的不平衡广义力在 $m \times n$ 组独立虚位移上且在时段 $t_1 - t_0$ 内的平均虚功为零。

假设近似解中的函数 $\varphi_{jk}(t)$ 称为试探函数, 它们一般应满足时段条件(5.8.1), 但对于周期性运动的问题, 不必满足(5.8.1), 只须满足以下条件就行了:

$$\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.8.13)$$

这是因为, 如 $\delta q_j(t_0) \neq 0$, $\delta q_j(t_1) \neq 0$, 则有以下关系式

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' W) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j dt \\ + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t=t_1} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t=t_0} \right) \end{aligned} \quad (5.8.14)$$

如取试函数 φ_{jk} 为周期函数且 $t-t_0$ 为运动的一个周期, 显然周期函数 $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ 在 t_1 及 t_0 之值应相等, 此时即使 $\delta q|_{t=t_1} \neq 0$ 及 $\delta q_j|_{t=t_0} \neq 0$, 但只要满足 (5.8.13), 显然 (5.8.14) 式最后一个圆括弧项必为零。因之仍得到变分式:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j dt = 0 \quad (5.8.15)$$

及变分式

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \varphi_{jk}(t) dt = 0 \quad \begin{pmatrix} k=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \end{pmatrix} \quad (5.8.16)$$

以上方法也可用于研究振动问题。

例题 5.8.2 由 Hamilton 原理建立单自由度非线性自治系统的平均法。

考察以下带有小参数 ε 的自治系统运动方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (a)$$

当 $\varepsilon=0$ 时, 以上方程有周期解

$$x = a \cos \psi, \quad \psi = \omega_0 t + \theta \quad (b)$$

其中 a 与 θ 都是常数。当 $\varepsilon \neq 0$ 时, 方程 (a) 的解仍可保留 (b) 的形式, 只是 a 与 θ 都不再是常数, 而是时间 t 的函数, 由于两个方程包含三个变量 x, a 与 θ , 就可以自由地附加一个补充条件。比较方

便的作法是使速度仍有 $\varepsilon=0$ 时的形式, 即

$$\dot{x} = -\omega_0 a \sin \psi \quad (c)$$

将上式对 t 求导, 可得:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 a \cos \psi - \omega_0 \dot{a} \sin \psi - \omega_0 a \dot{\theta} \cos \psi \quad (d)$$

变量 x 的变分为

$$\delta x = \cos \psi \delta a - a \sin \psi \delta \psi \quad (e)$$

由上式可知, 在 $\psi_0=0$ 及 $\psi_1=2\pi$ 时都有 $\delta x = \delta a$, 因之可建立 Galerkin 法的列式

$$\int_0^{2\pi} [\ddot{x} + \omega_0^2 x - \varepsilon f(x, \dot{x})] \delta x d\psi = 0 \quad (f)$$

在这里我们用变量 ψ 代替了时间变量 t^* , 显然 (f) 具有在一个周期内的加权余量为零的含意, 将 (c) 及 (d) 代入 (f) 式后可得:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} [\omega_0 \dot{a} \sin \psi + \omega_0 \dot{\theta} \cos \psi + \varepsilon f(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi)] \\ & \times (\cos \psi \delta a - a \sin \psi \delta \psi) d\psi = 0 \end{aligned} \quad (g)$$

利用以下定积分公式

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \psi d\psi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

及 δa 和 $\delta \psi$ 的独立性, 可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \sin \psi f(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi) d\psi \\ \dot{\theta} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 a} \int_0^{2\pi} \cos \psi f(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi) d\psi \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

这便是单自由度非线性自治系统 平均法 的基本公式, 与用传统

* 由 (b) 可知, 当用 $d\psi$ 代替 dt 时, 误差是 $d\theta$, 但在 ε 是小参数条件下 $d\theta$ 也是慢变参数, 和 ε 是同一量级, 对 (b) 式的结果只是增加 ε^2 量级的项, 故可略去不计。

方法所得结果完全一致^{*}，但比传统方法概念更清晰，推导更简单，在这里“平均”的含义是由 Galerkin 法中一个周期内的平均加权余量为零这一基本思想所规定的，而在传统的推导方法中，仅理解为非线性项在一周期中的平均，而且是在推导到最后才识别出来的。当 ε 是小参数时， α 与 θ 随时间仅缓慢地变化，以致这种变化在一个周期之内可以忽略不计。因之在求 (i) 右端的积分时， α 与 θ 都可视为常数。

5.8.2 变时间端点下的 Hamilton 原理及应用

Hamilton 原理的一个重要限制条件是在固定时间端点 $t = t_0$ 及 $t = t_1$ 条件下研究泛函驻值问题，换言之， δt_0 及 δt_1 被认为是恒等于零的，这个限制对于很多问题是不方便的，因此需要研究放宽这种限制的 Hamilton 原理。

设完整有势系统在事件空间中的正路由轨迹 AB 表示，对应 A 、 B 两点的时刻为 t_0 及 t_1 。现在研究 AB 邻近的可能轨迹或旁路 CD 。旁路 CD 与正路 AB 两端有共同位形但无共同时刻，即与 C 、 D 相对应的时刻为 $t_0 + \delta t_0$ 及 $t_1 + \delta t_1$ ，在两个自由度的事件空间中可以看出正路与旁路的特性：在事件空间中 A 、 C 不重合， B 、 D 也不重合；但 A 、 C 及 B 、 D 都分别对应共同位形 (q_1^0, q_2^0) 及 (q_1^1, q_2^1) ，因之 AB 及 CD 在 $q_1 q_2$ 平面上的投影是有共同端点的。

由于 δt_0 及 δt_1 是小量，所以按积分限可变的积分法则，积分

$$\int_{t_0}^{t_1} L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \dots, q_n, t) dt$$

沿 AB 及 CD 之差，即 $\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt$ 为

^{*} 见 Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, “Асимптотические методы в Теории нелинейных колебаний” изд. 4-е, Наука, 1974

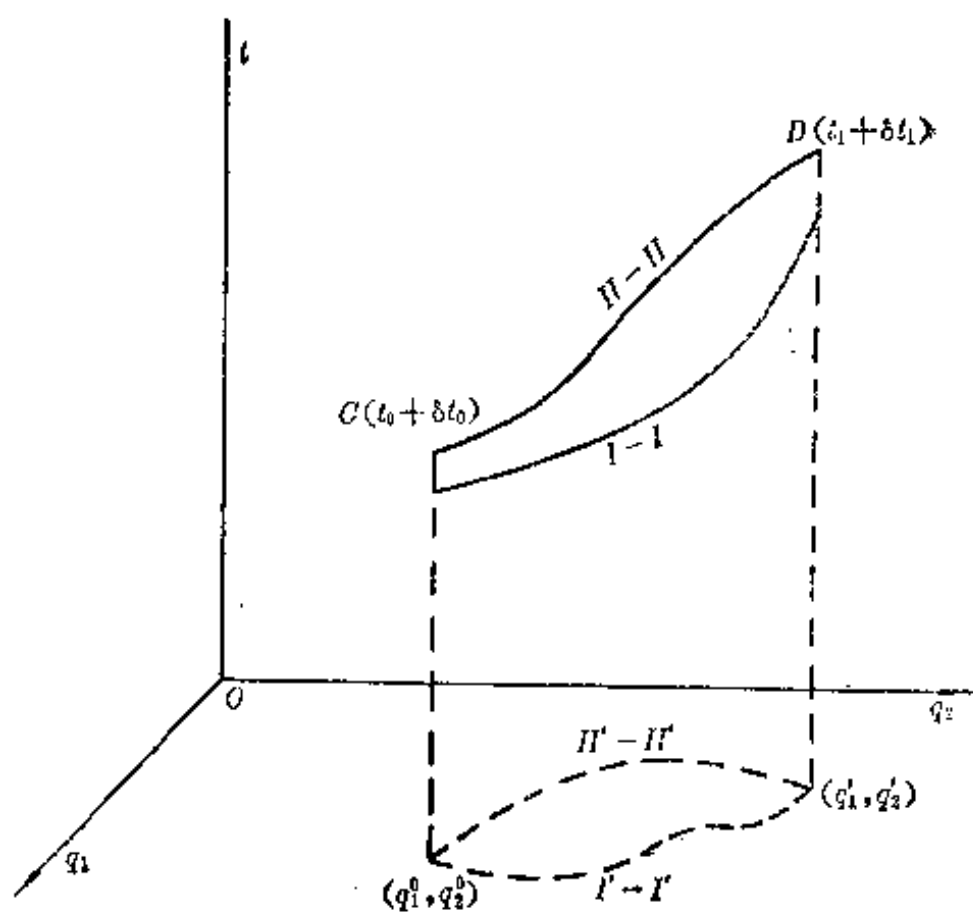


图 5.8

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt \\
 &= \int_{CD} L dt - \int_{AB} L dt \\
 &= L_B \delta t_1 - L_A \delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt
 \end{aligned} \quad (5.8.17)$$

由于在 t_0 及 t_1 有 $\delta q_j = 0$, 故积分

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt = 0 \quad (5.8.18)$$

这是因为正路必须满足 Lagrange 方程, 将 (5.8.18) 代入 (5.8.17) 式, 就有

$$\delta S + (L)_{t=t_0} \delta t_0 - (L)_{t=t_1} \delta t_1 = 0 \quad (5.8.19)$$

这便是变时间端点下的 Hamilton 原理*。在用直接法作振动问题的频率计算时,频率随试探函数的选取而变,而频率的变分必然要带来端点时间的变分,这时就必须应用变时间端点的 Hamilton 原理。

例题 5.8.3 求数学摆的近似解

数学摆的势能及动能的表达式为

$$V = mgl(1 - \cos \varphi) = mgl \left(\frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{24} + \dots \right) \quad (a)$$

$$T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 = mgl \cdot \frac{1}{2} \frac{l}{g} \dot{\varphi}^2 \quad (b)$$

如将时间尺度 t 变为 $\sqrt{\frac{g}{l}} t$, 则 Lagrange 函数可简化为 (去掉一个无关紧要的常数因子 mgl)

$$L = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{\varphi^4}{24} \quad (c)$$

数学摆在初始条件

$$\text{当 } t=0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = 0 \quad (d)$$

下的线性近似解为 $\varphi = \varphi_0 \cos t$, 考虑了 (c) 右端的因素后, 近似解可设为

$$\varphi = (\varphi_0 + \alpha) \cos \omega t - \alpha \cos 3\omega t \quad (e)$$

其中 α 及 ω 应视为可变参数, 于是 φ 的变分为

$$\delta \varphi = \delta \alpha (\cos \omega t - \cos 3\omega t) - t \delta \omega [(\varphi_0 + \alpha) \sin \omega t - 3\alpha \sin 3\omega t] \quad (f)$$

显然广义坐标 φ 满足位形空间端点条件:

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } t = t_0 = 0, \quad \delta \varphi = 0 \\ \text{当 } t = t_1 = \frac{\pi}{\omega} = T, \quad \delta \varphi = 0 \end{array} \right\} \quad (g)$$

* 见参考文献[15]。

由于

$$t_1 = t_0 + \frac{\pi}{\omega} \quad (h)$$

故有

$$\delta t_1 = \delta t_0 - \frac{\pi}{\omega^2} \delta \omega \quad (i)$$

由于运动的周期性, 应有

$$(L)_{t=0} = (L)_{t=\pi} \quad (j)$$

变时端的 Hamilton 原理在本题中化为

$$\delta S + (L)_{t=0}(\delta t_0 - \delta t_1) = 0 \quad (k)$$

或

$$\delta S + (L)_{t=0} \frac{\pi}{\omega^2} \delta \omega = 0 \quad (l)$$

即

$$\delta S - \frac{\pi \delta \omega}{\omega^2} \left(\frac{1}{2} \varphi_0^2 - \frac{1}{24} \varphi_0^4 \right) = 0 \quad (m)$$

由于

$$\varphi = -\omega(\varphi_0 + \alpha) \sin \omega t + 3\omega\alpha \sin 3\omega t \quad (n)$$

故有

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi L dt \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\omega(\varphi_0^2 + 2\varphi_0\alpha + 10\alpha^2) - \frac{1}{\omega}(\varphi_0^2 + 2\varphi_0\alpha + 2\alpha^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{16} \varphi_0^4 + \frac{1}{6} \varphi_0^3 \alpha \right) \right] \quad (o) \end{aligned}$$

将(o)代入(k)式后, 可得:

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{4} \left[(\varphi_0^2 + 2\varphi_0\alpha + 10\alpha^2) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\omega^2} \left(-\varphi_0^2 + 2\varphi_0\alpha + 2\alpha^2 - \frac{5}{48} \varphi_0^4 - \frac{1}{6} \varphi_0^3 \alpha \right) \right] \delta \omega \end{aligned}$$

$$+\frac{\pi}{4}\left[\omega(2\varphi_0+20\alpha)-\frac{1}{\omega}\left(2\varphi_0+4\alpha-\frac{1}{6}\varphi_0^3\right)\right]d\alpha=0 \quad (p)$$

以下将看到, α 具有 φ_0^3 的量级, 因之可略去 α^2 以上的小量及乘积 $\alpha\varphi_0^3$ 项, 于是 (p) 式分解为以下两个方程:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0^2+2\varphi_0\alpha+\frac{1}{\omega^2}\left(-\varphi_0^2+2\varphi_0\alpha-\frac{5}{48}\varphi_0^4\right)&=0\\ \varphi_0+10\alpha-\frac{1}{\omega^2}\left(\varphi_0+2\alpha-\frac{1}{12}\varphi_0^3\right)&=0\end{aligned}\right\} \quad (q)$$

按保留 φ_0 的最低阶项解出的未知量如下

$$\omega=1+\frac{7}{48}\varphi_0^2, \quad \alpha=\frac{9}{192}\varphi_0^3 \quad (r)$$

再回到原来的时间尺度, 可得数学摆的近似解如下

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 + \frac{7\varphi_0^2}{48}\right) t \\ &+ \frac{9\varphi_0^3}{192} \left[\cos \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 + \frac{7\varphi_0^2}{48}\right) t - \cos 3\sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 + \frac{7\varphi_0^2}{48}\right) t \right] \quad (s)\end{aligned}$$

5.8.3 基于广义 Helmholtz 原理的直接解法

基于 Hamilton 原理的直接法受到原理本身所要求的一个限制条件: 所有的旁路必须通过位形空间中指定的两点, 即 $q_j(t_0)$ 及 $q_j(t_1)$, 这个限制条件虽然是原理本身所要求的, 却不是工程力学问题中实际存在的, 通常工程力学问题总是提出在给定初始条件

$$t=t_0, \quad q_j(t_0)=q_{j0}, \quad \dot{q}_j(t_0)=\dot{q}_{j0} \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.8.20)$$

下及给定主动力条件下求解, 而 Hamilton 原理只能反映给定的两个位形, 不能反映初速度, 因之直接应用 Hamilton 原理求解工程力学问题的近似解是很有限的, 通常只限于周期性运动 (见例题 5.8.2 及例题 5.8.3)。为了克服以上矛盾, 需要研究不依赖于规定轨迹两端位形的变分原理——广义 Helmholtz 原理。

设有由广义坐标 q_1, \dots, q_n 规定的完整系统, 以 T 表示其动能, 以 Q_j 表示广义力, 又令 s_1, \dots, s_n 为任意时间函数, 定义函数 Φ 为

$$\Phi \triangleq \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j \right) s_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{s}_j \right] \quad (5.8.21)$$

将上式两端在 $t=t_0$ 及 $t=t_1$ 时段内积分, 可得

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j \right) s_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{s}_j \right] dt \quad (5.8.22)$$

由分部积分法可将上式变为

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi dt = \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left[-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j \right] s_j dt + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} s_j \Big|_{t_0}^{t_1} \right\} \quad (5.8.23)$$

由 Lagrange 方程可知上式右端方括弧内诸项之和应等于零, 于是得到以下关系式

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi dt - \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} s_j \Big|_{t_0}^{t_1} = 0. \quad (5.8.24)$$

这就是广义 Helmholtz 原理, 或称变作用 Hamilton 定律, 如取

$$s_j = \delta q_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.8.25)$$

则广义 Helmholtz 原理就退化为通常的 Helmholtz 原理 (见 (5.5.32) 式):

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' W) dt - \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (5.8.26)$$

无论是通常的或广义的 Helmholtz 原理都不要求试函数满足时间端点的位形条件, 相反, 我们可以将初始条件引入近似解的列式中去, 现在就以单自由度系统为例, 说明基于广义 Helmholtz 原理的直接法公式系统的建立过程。

取单自由度系统的以下形式的近似解:

$$q(t) = \sum_{i=0}^m c_i \varphi_i(z) = c_0 \varphi_0(z) + c_1 \varphi_1(z) + \sum_{i=2}^m c_i \varphi_i(z) \quad (5.8.27)$$

在这里, 我们取时间历程由 $t=0$ 至 $t=t_1$, 并取无量纲时间变量

$$z = \frac{t}{t_1} \quad (5.8.28)$$

$\varphi_i(z)$ 为任意函数族, 对它们应要求一阶导数连续, c_i 为待定参数
设初始条件规定为

$$q_0 = q(0), \quad \dot{q}_0 = \dot{q}(0) \quad (5.8.29)$$

显然, $m+1$ 个参数中只有 $m-1$ 个是未知的, 其中前两个参数 c_0 及 c_1 将由初始条件确定如下:

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= c_0 \varphi_0(0) + c_1 \varphi_1(0) + \sum_{i=2}^m c_i \varphi_i(0) \\ t_1 \dot{q}_0 &= c_0 \varphi'_0(0) + c_1 \varphi'_1(0) + \sum_{i=2}^m c_i \varphi'_i(0) \end{aligned} \right\} \quad (5.8.30)$$

由以上方程组可解出 c_0 及 c_1 如下:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\Delta} [\varphi'_1(0) q_0 - \varphi_1(0) t_1 \dot{q}_0] \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \sum_{i=2}^m c_i [\varphi'_1(0) \varphi_i(0) - \varphi_1(0) \varphi'_i(0)] \\ c_1 &= \frac{1}{\Delta} [\varphi_0(0) t_1 \dot{q}_0 - \varphi'_0(0) q_0] \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \sum_{i=2}^m c_i [\varphi_0(0) \varphi'_i(0) - \varphi'_0(0) \varphi_i(0)] \end{aligned} \right\} \quad (5.8.31)$$

其中

$$\Delta = \varphi_0(0) \varphi'_1(0) - \varphi_1(0) \varphi'_0(0) \quad (5.8.32)$$

如今

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_i &= -\varphi'_1(0)\varphi_i(0) + \varphi_1(0)\varphi'_i(0) \\ \Delta g_i &= -\varphi_0(0)\varphi'_i(0) + \varphi'_0(0)\varphi_i(0) \end{aligned} \right\} \quad (5.8.33)$$

则(5.8.7)式可用初始条件表达如下

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{\Delta} [\varphi'_1(0)q_0 - \varphi_1(0)t_1\dot{q}_0]\varphi_0(z) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta} [\varphi_0(0)t_1\dot{q}_0 - \varphi'_0(0)q_0]\varphi_1(z) \\ &\quad + \sum_{i=2}^m [f_i\varphi_0(z) + g_i\varphi_1(z) + \varphi_i(z)]c_i \end{aligned} \quad (5.8.34)$$

函数 $s(t)$ 也应含有 $m-1$ 个待定常数, 可以任选, 为方便计, 当 $\varphi_i(z)$ 为正交函数族时, 可取 $s(t)$ 为以下形式

$$s(t) = \sum_{i=2}^m [f_i\varphi_0(z) + g_i\varphi_1(z) + \varphi_i(z)]\psi(z)a_i \quad (5.8.35)$$

其中 a_i 为待定常数, $\psi(z)$ 为正交函数族的权函数, 即使以下条件满足

$$\int_0^1 \psi(z)\varphi_i(z)\varphi_j(z)dz = 0 \quad (i \neq j) \quad (5.8.36)$$

D. L. Hitzl(1980)选用了移位 Legendre 多项式*, 赵国景(1981)选用了移位 Чебышев 多项式作为基函数 $\varphi_i(z)$, 都取得了很好的效果, 这里所说的移位, 是指由区间 $-1 \leq x \leq 1$ 移至区间 $0 \leq z \leq 1$, 这只要在通常的 Legendre 多项式或通常的 Чебышев 多项式中借助以下变量变换即可:

$$z = \frac{x+1}{2} \quad \text{或} \quad x = 2z-1 \quad (5.8.37)$$

当采用移位 Legendre 多项式作为基函数时, (5.8.34) 及

* 对于移位 Legendre 多项式, $\psi(z)=1$, 对于移位 Чебышев 多项式, $\psi(z) = (z-z^2)^{-1/2}$ 。

(5.8.35)式变为

$$q(t) = q_0 + \frac{1}{2} \dot{q}_0 t_1 (P_1^* + P_0^*) + \sum_{i=2}^m (f_i + g_i P_1^* + P_i^*) c_i \quad (5.8.38)$$

$$s(t) = \sum_{i=2}^m (f_i + g_i P_1^*(z) + p_i^*(z)) a_i \quad (5.8.39)$$

其中

$$f_i = \frac{1}{2} (-1)^i [i(i+1) - 2] \quad (5.8.40)$$

$$g_i = \frac{1}{2} (-1)^i i(i+1) \quad (5.8.41)$$

$P_i^*(z)$ 为 i 阶移位 Legendre 多项式。

当采用移位 Чебышев 多项式作为基函数时, (5.8.38) 及 (5.8.39) 式变为

$$q(t) = q_0 + \dot{q}_0 t_1 z + \sum_{i=2}^m (f_i T_0^* + g_i T_1^* + T_i^*) c_i \quad (5.8.42)$$

$$s(t) = \sum_{i=2}^m (f_i T_0^* + g_i T_1^* + T_i^*) a_i \quad (5.8.43)$$

其中

$$f_i = (-1)^i [i^2 - 1] \quad (5.8.44)$$

$$g_i = i^2 (-1)^i \quad (5.8.45)$$

$T_i^*(z)$ 为 i 阶移位 Чебышев 多项式。

将 $q(t)$ 及 $s(t)$ 的表达式代入广义 Helmholtz 原理, 并考虑到 a_i 的独立性, 可得到关于未知量 c_i 的方程组:

$$Kc = w \quad (5.8.46)$$

其中 K 为 $m-1$ 阶方阵, c 及 w 均为 $m-1$ 阶列阵。对于线性问题, w 只含与 q_0 及 \dot{q}_0 有关之因素, 因之方程 (5.8.46) 是线性代数

方程组,可用熟知方法求解。对于非线性问题, w 除含有 q_0 及 \dot{q}_0 外, 还含有非线性项带来的因素, 即含有 c_i 的高次方项, 因之 (5.8.46) 式是非线性代数方程组, 可用迭代法求解, 它们都易于在数字计算机上实现。

例题 5.8.4 单自由度线性阻尼振动系统方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (a)$$

试求当 $m=c=1, k=25$, 初始条件 $x_0=1, \dot{x}_0=0$ 下在 $t=0$ 至 $t=3$ 区间内的运动*

解 广义 Helmholtz 原理在本题条件下的列式可表为

$$\int_0^{t_1} \left[-\left(\frac{k}{m}x + \frac{c}{m}\dot{x} \right)s + \dot{x}\dot{s} \right] dt - \dot{x}s \Big|_0^{t_1} = 0 \quad (b)$$

采用无量纲时间变量 $z = \frac{t}{t_1}$ 后, 上式变为

$$-\frac{kt_1^2}{m} \int_0^1 x s dz - \frac{ct_1}{m} \int_0^1 x' s dz + \int_0^1 x' s' dz = x's \Big|_0^1 \quad (c)$$

设其中的 $x(z)$ 及 $s(z)$ 用 (5.8.38) 式至 (5.8.41) 式所示的 Legendre 函数表示, 则可得到以下的线性方程组

$$\sum_{i=2}^m K_{ji} c_i = w_j \quad (j=1, \dots, m) \quad (d)$$

其中

$$\begin{aligned} K_{ji} \triangleq & F_2(j, i) + g_j(2-h_i)F_1(i, 0) - f_j h_i F_1(i, 1) \\ & - h_i [1 + (-1)^{j+1}] - \frac{ct_1}{m} \{ 2f_j g_i + f_j F(i, 0) + g_j F_1(i, 1) \\ & + F(i, j) \} - \frac{kt_1^2}{m} \left\{ f_j f_i + \frac{1}{3} g_j g_i + \frac{\delta_{ji}}{2j+1} \right\} \end{aligned} \quad (e)$$

式中 δ_{ji} 为 Kronecker 记号,

$$w_j \triangleq \frac{ct_1^2}{m} \dot{x}_0 f_j + \frac{kt_1^2}{m} \left\{ x_0 f_j + \frac{1}{2} \dot{x}_0 t_1 \left(f_j + \frac{1}{3} g_j \right) \right\} \quad (f)$$

* 见参考文献[32]。

$$F_1(n, m) \triangleq \int_0^1 \frac{dP_n^*}{dz} P_m^* dz = [1 - (-1)^{m+n}] S(p) \quad (g)$$

$$S(p) \triangleq S(n-m-1) = \begin{cases} 1, & n-m-1 \geq 0 \\ 0, & n-m-1 < 0 \end{cases} \quad (h)$$

$$\begin{aligned} F_2(n, m) &\triangleq 2 \left[\frac{l+1}{2} \right] \left\{ 2l+1 - 2 \left[\frac{l+1}{2} \right] \right\} (1 + (-1)^{n+m}) S(q) \\ &= \int_0^1 \frac{dP_n^*}{dz} \frac{dP_m^*}{dz} dz \end{aligned} \quad (i)$$

$$h_i \triangleq i(i+1), \quad l \triangleq \min(n, m), \quad q \triangleq n+m-2 \quad (j)$$

f_i 及 g_i 之定义见 (5.8.44) 及 (5.8.45) 式。

由于 Legendre 函数的正交性可使 K_{ji} 的计算大大简化, 所得结果与取的项数 m 有关。当 $m=8$ 及 $m=12$ 时的近似解 (虚线) 与精确解 (实线) 比较如下

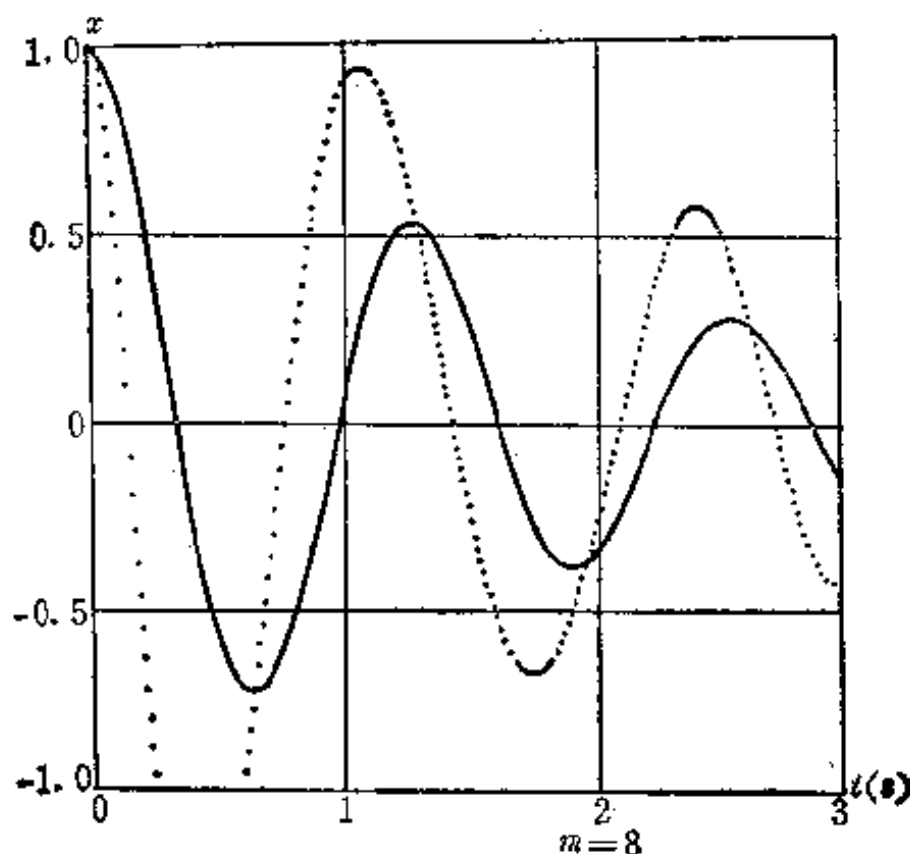


图 5.9(a)

图 5.9(a) 移位 Legendre 多项式中取 8 项时, 精确解 (实线) 与近似解 (虚线) 的比较。

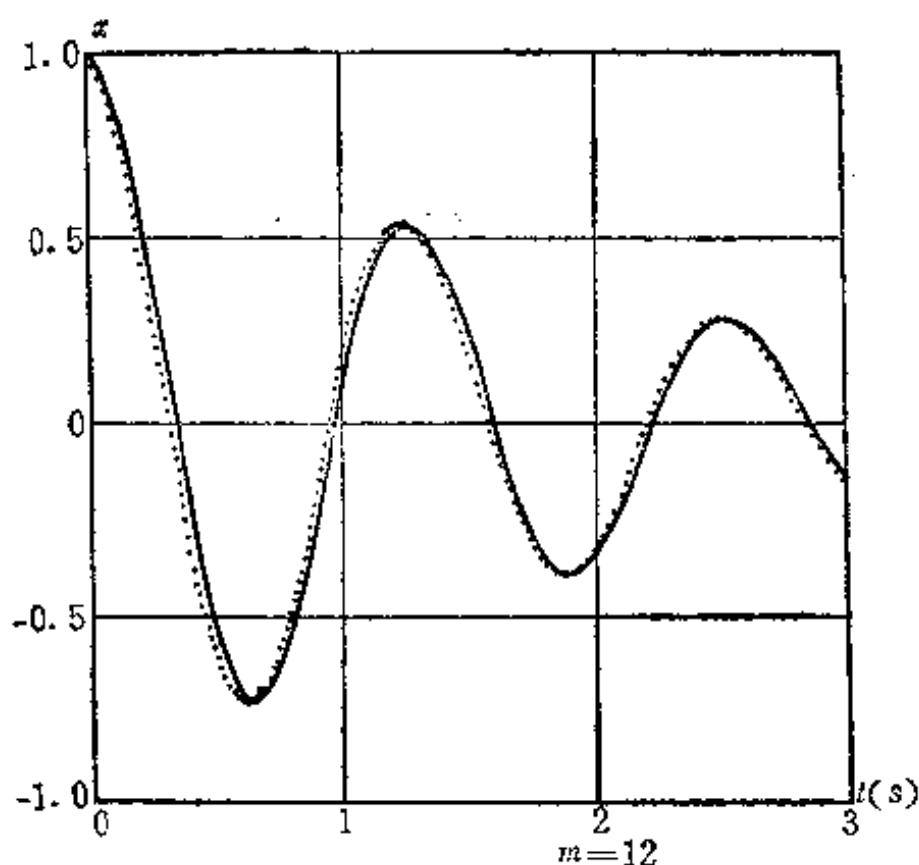


图 5.9(b)

图5.9(b)移位Legendre多项式中取12项时,精确解(实线)与近似解(虚线)的比较。

5.8.4 基于微分原理的直接解法

从微分原理出发,同样可以建立近似解的直接法列式,以广义坐标表示的 d'Alembert-Lagrange 原理、Jourdain 原理、及 Gauss 原理的表达式分别为

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0 \quad (5.8.47)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta \dot{q}_j &= 0 \\ \delta q_j &= 0, \quad \delta \dot{q}_j \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.8.48)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j &= 0 \\ \delta q_j &= 0, \quad \delta \dot{q}_j = 0, \quad \delta \ddot{q}_j \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.8.49)$$

将以上各式在 $t=t_0$ 及 $t=t_1$ 的区间上对时间 t 积分, 即为在 δr 空间、 $\delta \dot{r}$ 空间、及 $\delta \ddot{r}$ 空间中的 Galerkin 法直接解格式:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j dt = 0 \quad (5.8.50)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta \dot{q}_j dt &= 0 \\ \delta q_j &= 0, \quad \delta \dot{q}_j \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.8.51)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j dt &= 0 \\ \delta q_j &= 0, \quad \delta \dot{q}_j = 0, \quad \delta \ddot{q}_j \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.8.52)$$

值得注意的是, (5.8.50) 和基于固定时间端点处、各旁路有共同位形之条件

$$t=t_0, \delta q_j=0; \quad t=t_1, \delta q_j=0 \quad (5.8.53)$$

下的 Hamilton 原理所得变分方程完全一致, 但 (5.8.50) 的推导过程中显然并不需要条件 (5.8.53), 由此可知在应用基于 Hamilton 原理的直接法时, 时端条件 (5.8.53) 的限制可以放松; 相反, 在取试函数时可引入初始条件后再求解。

例题 5.8.5 求 Van der pol 方程表示的自激振动方程

$$\ddot{x} - \mu \dot{x}(1-x^2) + x = 0 \quad (a)$$

在 $\mu=1.5$, 初始条件为 $x_0=0$, $\dot{x}_0=0.2$, 及由 $t=0$ 至 $t_1=1$ 的区间上的解*

解 按 (5.8.50) 的格式, 直接解法归结为

$$\int_{t_0}^{t_1} [\ddot{x} - \mu \dot{x}(1-x^2) + x] \delta x dt = 0 \quad (b)$$

令 $t_0=0$, $t=t_1$, 并以“'”表示对 z 求导, 则上式可化为

$$\int_0^1 \left[\frac{x''}{t_1^2} - \frac{\mu x'}{t_1} + \frac{\mu}{t_1} x' x^2 + x \right] \delta x dz = 0 \quad (c)$$

* 见参考文献[10]

取 x 及 δx 的试函数为

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t_1 z + \sum_{i=2}^m (f_i T_0^* + g_i T_1^* + T_i^*) c_i \quad (d)$$

$$\delta x = \sum_{i=2}^m (z - z^2)^{-1/2} (f_i T_0^* + g_i T_1^* + T_i^*) a_i \quad (e)$$

其中 T_i^* 表示第 i 阶移位 Чебышев 多项式, $(z - z^2)^{-1/2}$ 为满足正交性的权函数, f_i 及 g_i 的定义见 (5.8.44) 及 (5.8.45) 式, 将 (d) 及 (e) 式代入 (c) 式, 积分后并注意到 a_i 的任意性, 便有

$$[K_{ij}] \{c_i\} = \{w_j\} \quad (f)$$

其中

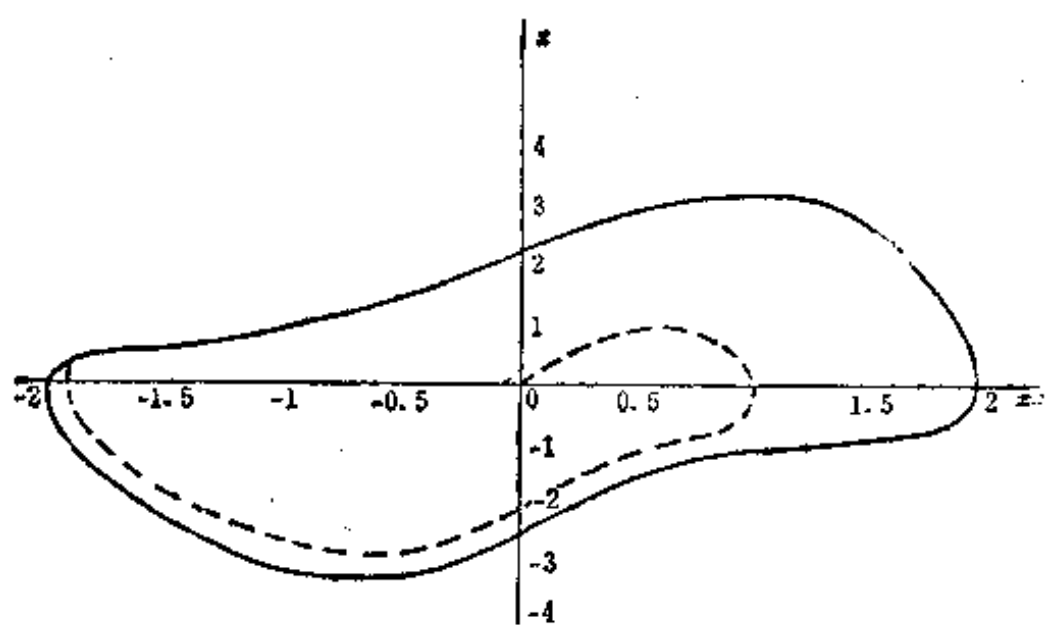
$$K_{ij} \triangleq \frac{1}{t_1^2} (H_{ij} + f_i H_{i0} + g_j H_{j1}) - \frac{\mu}{t_1} (D_{ij} + f_j D_{i0} + g_j D_{i1} + 2g_i f_j \pi) \\ + E_{ij} - f_j E_{i0} + g_j E_{i1} + \pi f_i f_j + \frac{\pi}{2} g_i g_j \quad (g)$$

$$w_j \triangleq -f_j x_0 \pi - \frac{\pi}{4} g_j \dot{x}_0 t_1 - f_j \dot{x}_0 t_1 \frac{\pi}{2} + \mu \dot{x}_0 f_j \pi \\ - \int_0^1 \frac{1}{t_1} u x' x^2 \delta x dz \quad (h)$$

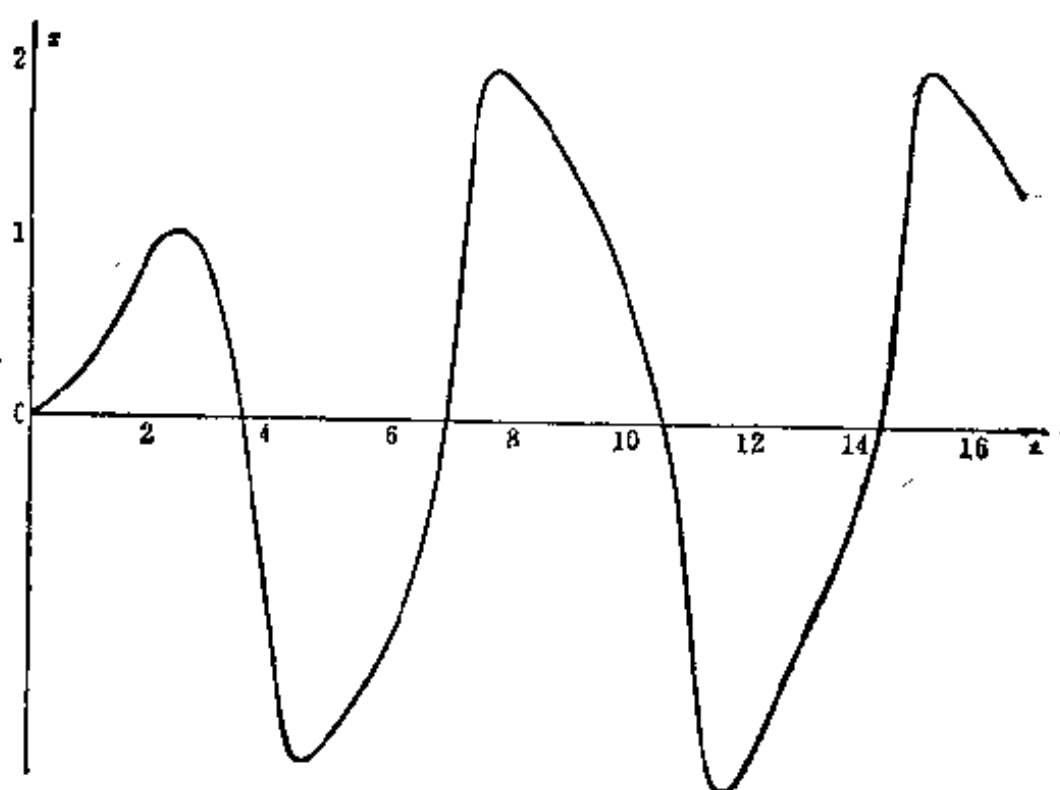
$$E_{ij} \triangleq \int_0^1 T_i^* T_j^* (z - z^2)^{-1/2} dz = \begin{cases} 0 & (j \neq i) \\ \frac{\pi}{2} & (i = j > 0) \\ \pi & (i = j = 0) \end{cases} \quad (i)$$

$$D_{ij} \triangleq \int_0^1 \frac{dT_i^*}{dz} T_j^* (z - z^2)^{-1/2} dz = \begin{cases} 0 & (i \leq j \text{ 或 } i + j \text{ 为偶数}) \\ 2i\pi & (i > j \text{ 且 } i + j \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (j)$$

$$H_{ij} \triangleq \int_0^1 \frac{d^2 T_i^*}{dz^2} T_j^* (z - z^2)^{-1/2} dz = \begin{cases} 0 & \begin{pmatrix} i \leq j + 1 \\ \text{或 } i + j \text{ 为奇数} \end{pmatrix} \\ 2i(i^2 - j^2)\pi & \begin{pmatrix} i > j + 1 \\ \text{且 } i + j \text{ 为偶数} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (k)$$



(a)



(b)

图 5.10

(h) 式最后一项的求积可方便地利用 Gauss-Чебышев 公式:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 f(z) (z-z^2)^{-1/2} dz &\approx \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n f(z_i) \\ z_i &= \frac{\cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

其中

本题的解在取 $m=6$ 时 所得结果由数字计算机给出如下, 对于非线性方程 (f) 可用迭代法求解, 前一图给出相平面上的极限环, 后一图给出 $x(t)$ 的时间历程。

由于 Gauss 原理还具有“最小拘束”原理的另一形式, 实质上是以最小方差为特征的原理, 和其它原理相比, 这是 Gauss 原理的独特性质, 对于求近似解应能带来一定的优越性, 现举一例以明之。

例题 5.8.6 用 Gauss 原理求 Duffing 方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + h x^3 = 0 \quad (a)$$

的一次近似解, 给定初始条件为: $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$, 其中 ω_0, h 及 A 为给定常数。

取以下形式的近似解

$$x = (A + \alpha) \cos \omega t - \alpha \cos 3\omega t \quad (b)$$

其中 α 及 ω 视为待定可变参数, 所设近似解之加速度为

$$\ddot{x} = -P_1 \cos \omega t + P_2 (-\cos \omega t + 9 \cos 3\omega t) \quad (c)$$

其中记

$$P_1 = A\omega^2, \quad P_2 = \alpha\omega^2 \quad (d)$$

将 P_1 及 P_2 视为加速度表达式中的可变参数, 有

$$\delta \ddot{x} = \delta P_1 \cos \omega t + \delta P_2 (-\cos \omega t + 9 \cos 3\omega t) \quad (e)$$

将 (b) 及 (c) 代入基于 Gauss 原理的 Galerkin 直接法列式:

$$\int_0^{2\pi} (x + \omega_0^2 x + h x^3) \delta x dt = 0 \quad (f)$$

或

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \{ & -P_1 \cos \omega t + P_2 (-\cos \omega t + 9 \cos 3\omega t) + \\ & + \omega_0^2 [(A + \alpha) \cos \omega t - \alpha \cos 3\omega t] + \\ & + h [(A + \alpha) \cos \omega t - \alpha \cos 3\omega t]^3 \} \times \\ & \times [-\delta P_1 \cos \omega t + \delta P_2 (-\cos \omega t + 9 \cos 3\omega t)] dt = 0 \quad (g) \end{aligned}$$

由于 δP_1 及 δP_2 的独立性, 上式积分后, 可分解为以下两方程

$$\omega^2 - \omega_0^2 + h \left[\frac{3}{4} (A + \alpha)^2 - \frac{3}{4} (A + \alpha) \alpha + \frac{3}{2} \alpha^2 \right] = 0 \quad (h)$$

$$\begin{aligned} (A + 82\alpha) \omega^2 - \omega_0^2 (A - 10\alpha) + h \left[\frac{3}{2} (A + \alpha)^3 - \frac{51}{4} (A + \alpha)^2 \alpha - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} (A + \alpha) \alpha^2 - \frac{27}{4} \alpha^3 \right] = 0 \quad (i) \end{aligned}$$

其中的 P_1 及 P_2 已由(d)式引入了方程组, 略去与 α^3 及 $A\alpha^2$ 成正比的项, 并将(h)式代入(i)式, 可求得

$$\alpha = -\frac{h A^3}{32 \omega_0^2} \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \frac{h A^2}{\omega_0^2}} \quad (j)$$

将此式代入(h), 可得 $\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} h A^2$, 最后得到一次近似解如下

$$x = A \cos \omega t - \frac{h A^3}{32 \omega^2} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \quad (k)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 0.75 h A^2 \quad (l)$$

此结果和用非线性振动理论中的较复杂的摄动法(如 Lindstedt-Poincare 法, KBM 法等)所得结果完全一致, 和 Cunningham* 所用最小二乘法相比, 本法结果则较为精确(最小二乘法结果为 ω^2

* W. J. Cunningham, Introduction to Nonlinear Analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1967

$= \omega_0^2 + 0.89hA^2$), 和 Лурье* 所用变时间端点的 Hamilton 原理所得结果相比, 不仅原理及方法简单, 而且也较为精确 (Лурье 所得到的 α 和 (j) 式相比, 少了高阶项, 仅为 $\alpha = -\frac{hA^3}{32\omega_0^3}$)。

应该提到的是, 由 Jourdain 原理及 Gauss 原理发展出来的直接法不仅能用于完整系统, 而且也能用于一阶 (Jourdain 原理及 Gauss 原理) 及二阶 (Gauss 原理) 非完整系统。

5.9 最小作用量原理

本原理比 Hamilton 原理的适用范围窄, 它只适用于保守完整系统。本原理的指导思想是在保持相同机械能的条件下选择可能运动, 这就不能象 Hamilton 原理那样限定旁路的端点时刻。这就是说, 在最小作用量原理中必须允许端点时间是可变的。由此可知, 以前讨论过的等时变分概念不再适用, 需要进一步推广。考虑时间变化因素在内的变分称为全变分。

图 5.11 表示增广位形空间中的正路 $q_j(t)$ 及其邻近的旁路 $q_j^*(t)$ 。从正路上的 A 点过渡到同一时刻旁路上的 B 点时, q_j 的变分就是以前在第一章中所说的等时变分:

$$\delta q_j = q_j^*(t) - q_j(t) \quad (5.9.1)$$

从正路上的 A 点过渡到旁路上另一相邻时刻的 C 点时, q_j 的变分就叫做全变分:

$$\Delta q_j = q_j^*(t + \Delta t) - q_j(t) \quad (5.9.2)$$

由 (5.9.1) 及 (5.9.2) 式可得

$$\Delta q_j = \delta q_j + q_j^*(t + \Delta t) - q_j^*(t) \quad (5.9.3)$$

但是当 Δt 很小时, 有

$$q_j^*(t + \Delta t) - q_j^*(t) \approx \dot{q}_j^* \cdot \Delta t =$$

* 见参考文献 [37]

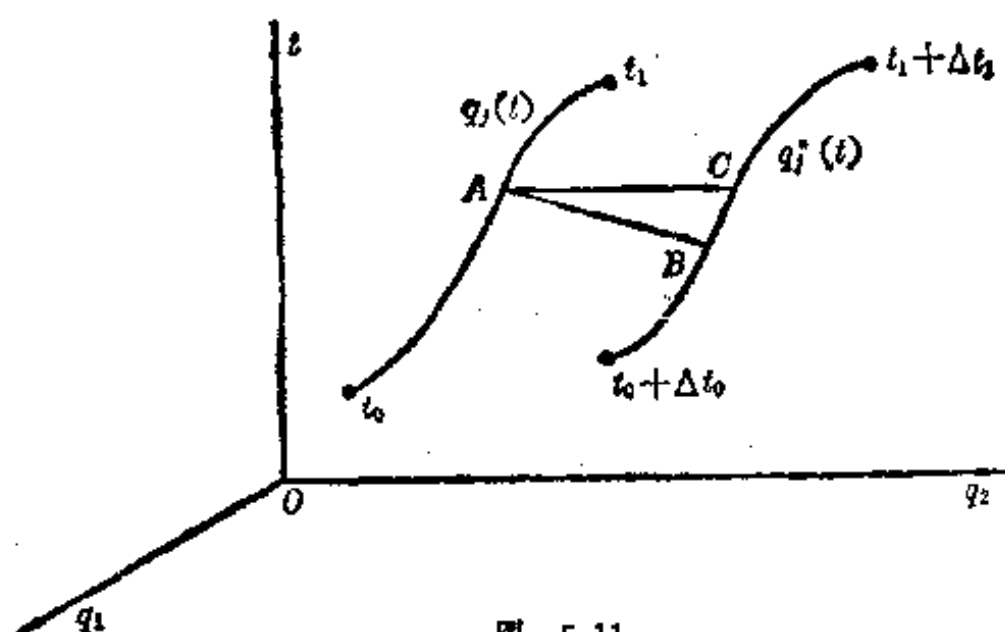


图 5.11

$$= (\dot{q}_j + \delta \dot{q}_j) \Delta t \approx \dot{q}_j \Delta t \quad (5.9.4)$$

因此(5.9.3)式在一阶小范围内化为

$$\Delta q_j = \delta q_j + \dot{q}_j \Delta t \quad (5.9.5)$$

这就是广义坐标的等时变分与全变分之间的基本关系。这个关系也可推广到状态变量的任意函数上去。设有一函数 $f(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t)$, 我们有

$$\Delta f = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \Delta q_j + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} \Delta \dot{q}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t$$

将(5.9.5)式代入上式, 我们有

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_j} (\delta q_j + \dot{q}_j \Delta t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} (\delta \dot{q}_j + \ddot{q}_j \Delta t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \end{aligned}$$

最后得到

$$\Delta f = \delta f + f \Delta t \quad (5.9.6)$$

全变分的重要性质之一在于变分与微分运算不可交换。由(5.9.5)式对 t 求导可得

$$(\Delta q_j)' = (\delta q_j)' + \dot{q}_j \Delta t + q_j(\Delta t)' \quad (5.9.7)$$

但是另一方面

$$\Delta \dot{q}_j = \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \Delta t = (\delta q_j)' + \dot{q}_j \Delta t \quad (5.9.8)$$

在以上推导中利用了等时变分的 $d\delta = \delta d$ 法则。比较(5.9.7)及(5.9.8)式可知

$$(\Delta q_j)' = \Delta \dot{q}_j + \dot{q}_j(\Delta t)' \quad (5.9.9)$$

可见,对于全变分不允许交换变分与微分次序,不论系统所受约束是否完整都是如此。

如果用定积分 $\int_0^t L dt$ 代替 $q(t)$, 则(5.9.6)式变为以下关系:

$$\Delta \int_0^t L dt = \delta \int_0^t L dt + L \Delta t \quad (5.9.10)$$

将(5.9.10)式中的 t 分别用 t_1 及 t_0 代替, 得到两个类似的关系式, 然后再将两式相减便得到以下的关系式:

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt + [L \Delta t]_{t_0}^{t_1} \quad (5.9.11)$$

现在我们来建立最小作用量原理。先取以下形式的作用量

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j dt \quad (5.9.12)$$

作为原理中所讨论的泛函, 它是定义在位形空间中的“路径”, 即 $q_j(t)$ 上的函数。设系统的总机械能用 h 表示。可证明在有相同的总机械能及相同的路径端点坐标的条件

$$\Delta h = 0, \Delta q_j(t_0) = \Delta q_j(t_1) = 0 \quad (5.9.13)$$

下作用量的变化

$$\Delta A = 0$$

由于 $\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j = L + H$, 即 $\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j$ 等于 Lagrange 函数及 Hamilton 函数之和, 因此有

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j dt = \int_{t_0}^{t_1} (L + H) dt$$

但是对于保守系统 $H = h$, 即等于总机械能, 它应是不变量, 于是我们有

$$A = \int_{t_0}^{t_1} L dt + h(t_1 - t_0)$$

两端求全变分, 并注意到 h 的变分为零, 则有

$$\Delta A = \Delta \left[\int_{t_0}^{t_1} L dt + h(\Delta t_1 - \Delta t_0) \right]$$

将 (5.9.11) 代入上式, 可得

$$\begin{aligned} \Delta A &= \left[(L + h) \Delta t \right]_{t_0}^{t_1} + \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \left[(L + h) \Delta t \right]_{t_0}^{t_1} \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt \end{aligned}$$

对于真实运动而言, $q_j(t)$ 应满足 Lagrange 方程。因此我们可将上式化为

$$\begin{aligned} \Delta A &= \left[(L + h) \Delta t \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j \right) dt \\ &= \left[(L + h) \Delta t \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) dt \\ &= \left[(L + h) \Delta t \right]_{t_0}^{t_1} + \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (\Delta q_j - \dot{q}_j \Delta t) \right]_{t_0}^{t_1} \end{aligned}$$

但是 $\Delta q_j(t_0) = \Delta q_j(t_1) = 0$, 因此有

$$\Delta A = \left[(L + h - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j) \Delta t \right]_{t_0}^{t_1}$$

不难看出, 圆括弧中的式子恒等于零, 因此就证明了

$$\Delta A = 0 \quad (5.9.14)$$

于是, 最小作用量原理可表为: 在完整保守系统条件下, 对于所有满足端点条件 $\Delta q_j(t_0) = \Delta q_j(t_1) = 0$ 及有相同机械能的可能运动而言, 真实运动应使作用量 A 取驻值。

由最小作用量原理也可以推导出完整保守系统的 Lagrange 方程, 可参阅有关书籍*。

最小作用量原理还可以表为以下两种形式:

(1) Lagrange 形式

$$\begin{aligned} \text{由于 } A &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (2T_2 + T_1) dt \end{aligned}$$

但是对于保守系统, $T = T_2$ 不存在 T_1 项, 因此有

$$A = 2 \int_{t_0}^{t_1} T dt$$

就是说, 作用量 A 具有简明的力学意义, 它等于系统动能对时间积累量的两倍。最小作用量原理可表为:

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0 \quad (5.9.15)$$

(2) Jacobi 形式:

由于动能在保守系统条件下是广义速度的二次型, 因此我们有

* 见参考文献[35]。

$$2(h-V)(dt)^2 = 2T(dt)^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk}(q_1, \dots, q_n) dq_j \cdot dq_k$$

于是有

$$dt = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} dq_j dq_k}{2(h-V)}}$$

作用量 A 可表为

$$A = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \int_{q_{j_0}}^{q_{j_1}} \sqrt{2(h-V) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} dq_j dq_k}$$

取

$$ds = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} dq_j dq_k}$$

它表示 n 维 Riemann 空间中的弧长微分, 于是得到原理的 Jacobi 形式:

$$\Delta \int_{q_{j_0}}^{q_{j_1}} \sqrt{2(h-V)} ds = 0 \quad (5.9.16)$$

值得注意的是, 在 Jacobi 形式中时间变量已经不再出现在作用量表达式中, 作用量成为一个沿 Riemann 空间中的轨迹所作的几何积分。如系统不受任何主动力作用, 则势能 V 恒等于零, 于是原理表达式简化为

$$\Delta A = \sqrt{2h} \cdot \Delta \int_{q_{j_0}}^{q_{j_1}} ds = 0 \quad (5.9.17)$$

这表明, 在不受主动力作用下, 保守系统的运动具有以下特征: 在所有通过端点 q_{j_0} 及 q_{j_1} 的可能运动中, 真实运动应使 n 维 Riemann 空间中的弧长 s 取极小值。通过固定端点的所有曲线中 s 取极小值的曲线称为 n 维 Riemann 空间中的短程线, 于是我们得到推广的惯性定律: 不受任何主动力作用的保守系统, 其运动

为代表点在 n 维 Riemann 空间中沿短程线的匀速运动 (因 $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2h}$)。由以上的论断可知: 在不受任何主动力作用的情况下, 质点在光滑球面上必沿大圆弧运动, 质点在光滑圆柱面上必沿螺旋线 (包括平行于柱面轴线的直线和与之正交的圆) 运动, 等等。

下面再讨论最小作用量原理的一种应用。将作用量 A 表为对某一坐标, 例如 q_1 的定积分:

$$A = \int_{q_{10}}^{q_{11}} \sqrt{R} dq_1 \quad (5.9.18)$$

其中
$$R = 2(h - V) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} q'_j q'_k \quad (5.9.19)$$

q_{10} 及 q_{11} 分别表示 q_1 在路径两端的值。此外

$$q'_j = \frac{dq_j}{dq_1}, \quad q'_k = \frac{dq_k}{dq_1} \quad (5.9.20)$$

由于 $\frac{dq_1}{dq_1} = 1$, 因此 R 的表达式并非 q'_j 的二次型。

$$R = 2(h - V) (a_{11} + 2 \sum_{j=2}^n a_{1j} q'_j + \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n a_{jk} q'_j q'_k)$$

泛函 A 的极值条件由以下的 Euler 方程所表达:

$$\frac{d}{dq_1} \frac{\partial \sqrt{R}}{\partial q'_j} - \frac{\partial \sqrt{R}}{\partial q_j} = 0 \quad (j=2, \dots, n) \quad (5.9.21)$$

这组方程同样不涉及时间变量, 只涉及到坐标 q_j , 因此它给出系统在 n 维空间中的轨迹方程。现在以质点在中心引力场中的运动为例说明原理的 Jacobi 形式的应用。在平面极坐标中质点的动能为

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (5.9.22)$$

取 r 为 q_1 , 则有

$$\sqrt{R} = \sqrt{2(h-V)m(1+r^2\theta'^2)} \quad (5.9.23)$$

在这里(5.9.21)只有一个方程, 而且具有明显的一次积分:

$$\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial \theta'} = \alpha \quad (5.9.24)$$

其中 α 为积分常数。将(5.9.23)式代入(5.9.24)式后得到

$$\frac{r^2\theta'}{\sqrt{2(h-V)m} \cdot \sqrt{1+r^2\theta'^2}} = \alpha$$

$$\text{或} \quad 2(h-V)m r^4 \theta'^2 = \alpha^2 (1+r^2 \theta'^2)$$

由此得到

$$\theta'^2 = \frac{\alpha^2}{2(h-V)m r^4 - \alpha^2 r^2}$$

这就是轨道的微分方程。将 $V = -\frac{\mu m}{r}$ 代入, 即可经过积分而得到轨道方程。读者可以验证, 它必将和著名的 Binet 公式积分后的结果完全一致。

对于只要得到“轨道”而不需要研究时间过程的问题, 最小作用量原理提供了较 Lagrange 方程更为直接的手段。

5.10 变分原理在连续体动力学中的推广及应用

离散系统和连续系统之间并没有一条不可逾越的鸿沟, 如将连续体无限分割, 使被分割后的元素足够小(当然比起分子的自由行程来说还是够大), 那末连续体可以当作一个具有无限多个质点的系统, 这里的质点和离散质点系统中的质点的主要区别在于: 这里的质点占有空间, 虽然是无限小空间(体积或面积), 且含有无限小质量; 而离散系统中的质点都是一定质量的质点集中于某一点, 但不占空间体积或面积。除此之外, 离散系统的约束都是离散型的, 而连续系统中的约束既有离散型也有连续型, 在连续型的约束

中最重要的变形协调条件。从物理性质来看,连续系统除惯性外,还有弹性、塑性、粘滞性等因素。注意到以上这些特点后,我们就可以将属于一般力学中的变分原理(微分原理及积分原理)推广到连续介质。

5.10.1 线弹性动力学的时域微分原理

将离散型变分原理推广到连续系统时,原来对系统各质点上的力学量(力、惯性力、动能、势能等)在全系统范围内求总和的数学运算必然要遇到这样的问题——当质点数目由有限多个趋向于无穷多时,求和的极限最后化为空间域上的积分。因之,连续体的任何变分原理(无论是时域上的微分原理或时域上的积分原理)都必然带有空间域上的积分及其变分的特点。

以下限于研究均匀、连续、具有线弹性关系(各向同性或各向异性)的三维弹性体,并假定在动载荷作用下保持小位移。为了书写简洁,以下采用 Einstein 哑标求和约定。为此,采用笛卡尔直角坐标 x_1, x_2, x_3 , 某量对某坐标的偏导数记作

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial x_i} = (\quad)_{,i}; \quad (i=1, 2, 3) \quad (5.10.1)$$

定义应力向量 $\sigma(x, t)$ 为

$$\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}]^T \quad (5.10.2)$$

及应变向量 $\varepsilon(x, t)$ 为

$$\varepsilon = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}]^T \quad (5.10.3)$$

两种分量都存在对称关系:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (5.10.4)$$

定义应变能密度函数为

$$A(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (5.10.5)$$

弹性关系可表为

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5.10.6)$$

定义位移向量 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 为

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T \quad (5.10.7)$$

体积力向量 $\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{x}, t)$ 为

$$\hat{\mathbf{f}} = [\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3]^T \quad (5.10.8)$$

边界 S_σ 上的表面力向量 $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t)$ 为

$$\hat{\mathbf{t}} = [\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3]^T \quad (5.10.9)$$

表面域 S 上任一点的法线单位向量 $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ 为

$$\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]^T \quad (5.10.10)$$

在边界 S_u 上的表面位移向量 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ 为

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3]^T \quad (5.10.11)$$

用 V 表示弹性体的体积域, T 表示时间域 $[0, \infty)$, 弹性动力学基本方程可表为

(1) 运动方程(内部动平衡方程)

$$\sigma_{ij,j} + \hat{f}_i = \rho \ddot{u}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{在 } V \times T \text{ 内} \quad (5.10.12)$$

(2) 应变-位移关系(内部约束方程)

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \text{在 } V \times T \text{ 内} \quad (5.10.13)$$

(3) 应力-应变关系(本构方程)

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \text{在 } V \times T \text{ 内} \quad (5.10.14)$$

或

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.10.15)$$

其中 \mathbf{A} 为由弹性常数组成的正定对称方阵, 它与应变能密度 A 的关系如下

$$A(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \varepsilon^T A \varepsilon \quad (5.10.16)$$

(4) 应力边界条件(边界动平衡方程)

$$\sigma_{ij} n_j = t_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \text{在 } S_s \times T \text{ 内} \quad (5.10.17)$$

(5) 几何边界条件(边界约束方程)

$$u_i = \hat{u}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{在 } S_u \times T \text{ 内} \quad (5.10.18)$$

为了完全确定一个弹性动力学问题, 尚需加上初值条件:

$$u(x, 0) = \hat{u}_0, \quad \dot{u}(x, 0) = \hat{\dot{u}}_0 \quad (5.10.19)$$

现在我们将 d'Alembert-Lagrange 原理推广到弹性动力学, 注意到方程(5.10.12)的含义是弹性体内部任一体积微元 ΔV_k 上的弹性力、外力、及惯性力相平衡; 方程(5.10.17)的含义是弹性体边界任一面积微元 ΔS_k 上的弹性力与外力(在边界微元上体积力及惯性力以高阶小量出现在方程中, 被略去)相平衡, 因之我们得到以下方程:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\sigma_{ij,j} + \hat{f}_i - \rho u_i) \delta u_i \Delta V_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (t_i - \sigma_{ij} n_j) \delta u_i \Delta S_k = 0 \quad (5.10.20)$$

或

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + \hat{f}_i - \rho u_i) \delta u_i dV + \int_{S_s} (t_i - \sigma_{ij} n_j) \delta u_i dS = 0 \quad (5.10.21)$$

这便是弹性动力学的 d'Alembert-Lagrange 原理, 其含义为: 作用在弹性体上的所有外力(体积力 \hat{f} 及表面力 \hat{t}), 弹性力、及惯性力在弹性体的任何虚位移 δu 上的总功为零。这里的虚位移 δu 应满足内部约束条件(5.10.13)及边界约束条件(5.10.19)。

完全类似地可以得到弹性动力学的 Jourdain 原理及 Gauss 原理:

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + f_i - \rho \dot{u}_i) \delta \dot{u}_i dV + \int_{S_0} (\bar{t}_i - \sigma_{ij} n_j) \delta \dot{u}_i dS = 0$$

$$(\delta u = 0, \delta \dot{u} \neq 0) \quad (5.10.22)$$

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + f_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_{S_0} (\bar{t}_i - \sigma_{ij} n_j) \delta u_i dS = 0$$

$$(\delta u = 0, \delta \dot{u} = 0, \delta \ddot{u} \neq 0) \quad (5.10.23)$$

其解释也是极为相似的, 只不过在 Jourdain 原理中应取 $\delta \dot{r}$ 空间中的虚位移, 在 Gauss 原理中应取 $\delta \ddot{r}$ 空间中的虚位移。

由 (5.10.21) 至 (5.10.23) 诸原理都可建立相应的积分原理及直接解法的变分格式。

5.10.2 线弹性动力学的时域积分原理

和离散系统相类似, 由弹性体小位移情况下的 d'Alembert-Lagrange 原理可建立相当于 Hamilton 模式的积分原理, 首先注意以下关系

$$\int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV = \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV \quad (5.10.24)$$

由 Gauss 关于体、面积分转换定理, 我们有

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV = \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS \quad (5.10.25)$$

由应力张量的对称性及应变位移关系, 我们有

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV &= \int_V \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \delta u_{i,j} + \sigma_{ji} \delta u_{j,i}) dV \\ &= \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) dV \\ &= \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \end{aligned} \quad (5.10.26)$$

利用线弹性关系 $\sigma_{ij} = \frac{\partial A}{\partial \epsilon_{ij}}$, 上式又可化为

$$\int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV = \int_V \delta A dV \quad (5.10.27)$$

将(5.10.25)及(5.10.27)式代入(5.10.24)式,再代入 d'Alembert-Lagrange 原理(5.10.21)

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + \hat{f}_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} (\hat{t}_i - \sigma_{ij} n_j) \delta u_i dS = 0 \quad (5.10.28)$$

后,可得:

$$\int_V (-\rho \ddot{u}_i + \hat{f}_i) \delta u_i dV - \int_V \delta A dV + \int_{S_\sigma} \hat{t}_i \delta u_i dS = 0 \quad (5.10.29)$$

将上式各项在 $t=t_0$ 及 $t=t_1$ 的区间上积分,并注意利用分部积分及对 u_i 的 d- δ 交换关系:

$$\begin{aligned} -\int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV dt &= -\int_{t_0}^{t_1} \int_V \frac{d}{dt} (\rho \dot{u}_i \delta u_i) dV dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dV dt \end{aligned} \quad (5.10.30)$$

如规定 δu_i 必须满足以下时端条件

$$t=t_0, \quad \delta u_i=0; \quad t=t_1, \quad \delta u_i=0 \quad (5.10.31)$$

则(5.10.30)式可表为

$$-\int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dV dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \delta \left(\frac{\rho}{2} \dot{u}_i^2 \right) dV dt \quad (5.10.32)$$

将(5.10.32)式代入(5.10.29)式的时间积分式,可得:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_V \left[\delta \left(\frac{\rho}{2} \dot{u}_i^2 \right) - \delta A + \hat{f}_i \delta u_i \right] dV + \int_{S_\sigma} \hat{t}_i \delta u_i dS \right\} dt = 0 \quad (5.10.33)$$

定义弹性体的总势能函数为

$$\Pi = \int_V [A - \hat{f}_i u_i] dV - \int_{S_\sigma} \hat{t}_i u_i dS \quad (5.10.34)$$

弹性体的总动能函数为

$$T = \int_V \frac{\rho}{2} \dot{u}_i^2 dV \quad (5.10.35)$$

(5.10.33)式可化为

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi) dt = 0 \quad (5.10.36)$$

这便是弹性动力学的 Hamilton 原理, 它表明: 在所有满足时间端点条件(5.10.31)的几何协调位移场 u_i (既满足内部的应变位移关系又满足边界 S_n 上的位移条件)中, 真正的位移场应使泛函 $\int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi) dt$ 取驻值。

显然, 弹性动力学的 Hamilton 原理也可以直接从离散系统的 Hamilton 原理出发, 当质点数 $n \rightarrow \infty$ 时取极限得出。

在以上的 Hamilton 原理中, 假定体积力 \hat{f}_i 及表面力 \hat{t}_i 皆为坐标及时间的函数, 如还有非保守体力 ϕ_i 及非保守面力 $\hat{\psi}_i$, 这些力的虚功可表为:

$$\delta' W = \int_V \phi_i \delta u_i dV + \int_{S_n} \hat{\psi}_i \delta u_i dS = \delta R \quad (5.10.37)$$

其中

$$R = \int_V \phi_i u_i dV + \int_{S_n} \hat{\psi}_i u_i dS \quad (5.10.38)$$

弹性动力学的更一般形式的 Hamilton 原理可表为

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta(T - \Pi) + \delta R] dt = 0 \quad (5.10.39)$$

变分原理(5.10.39)可用来推导各种形式的弹性结构(杆、杆系、板、壳等)的运动方程式及求动力响应的近似解。5.8节所讨论过的 Ritz 法及 Galerkin 法都可推广到连续弹性体动力学问题。

例题 5.10.1 用 Hamilton 原理列出均质梁的运动微分方程式。

解 对于具有对称面的细长棱柱形杆的动力学问题, 仍然采用小挠度平衡问题中梁的 Bernoulli 理论。除此之外, 还要假设每一微段的质量集中在中性轴上, 即运动时转动惯量忽略不计。

以上假设的实质就在于: 1) 认为质量连续分布在梁的轴线上; 2) 认为主要变形是弯曲变形, 剪切变形忽略不计。

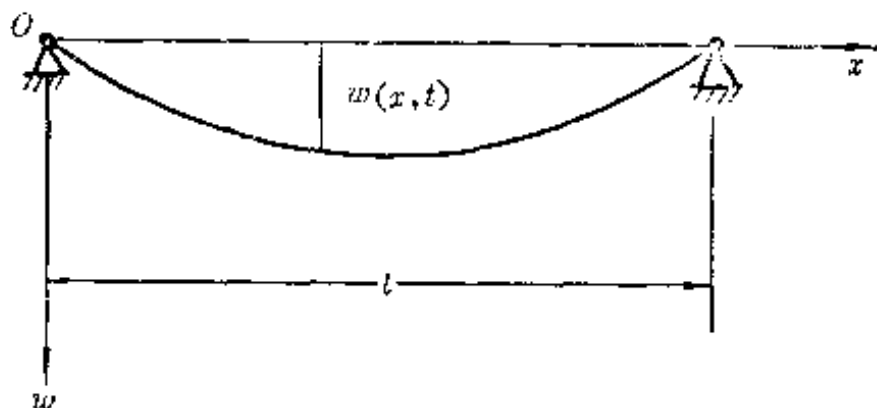


图 5.12

如图 5.12 所示的坐标 w, x 在梁的主平面内, 梁的任一瞬时位形由挠度函数 $w(x, t)$ 决定。根据以上假设, 梁的动能表达式为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) \dot{w}^2 dx \quad (a)$$

其中 $\rho(x)$ 为梁的单位长度质量, $\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}$ 。梁的势能表达式为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) w''^2 dx \quad (b)$$

其中 $EI(x)$ 为梁的截面抗弯刚度, $w'' = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 。Hamilton 作用量为:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{1}{2} [\rho \dot{w}^2 - EI w''^2] dx dt$$

其变分为

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l [\rho w \delta \dot{w} - EI w'' \delta w''] dx dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot{w} \delta w) - \rho \ddot{w} \delta w - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} (EI w'' \delta w') + \frac{\partial}{\partial x} (EI w'') \delta w' \right] dx dt \\
&= \int_0^l [\rho \dot{w} \delta w]_{t_0}^{t_1} dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\rho \ddot{w} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI w'') \right] \delta w dx dt + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial x} (EI w'') \delta w \right. \\
&\quad \left. - EI w'' \delta w' \right]_0^l dt \quad (c)
\end{aligned}$$

由 Hamilton 原理, 所有满足时间端点条件

$$t = t_0, \quad \delta w = 0$$

$$t = t_1, \quad \delta w = 0$$

及几何约束条件之可能运动中, 真实运动应使

$$\delta S = 0$$

于是我们可以看到, (c) 式中等号右端第一项自动消去。其余两项之和等于零, 则要求每一项分别等于零:

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (d)$$

当 $w=0$ 及 $w=l$ 时,

$$\frac{\partial}{\partial x} (EI w'') \delta w - EI w'' \delta w' = 0 \quad (e)$$

方程 (d) 就是梁的自由振动基本方程。方程 (e) 叫做变分问题中的自然边界条件。读者不难看出, 自然边界条件在以下几种情况下是自动满足的:

(1) 当 $x=0$ 及 $x=l$, $\delta w=0$, $\delta w'=0$

(2) 当 $x=0$ 及 $x=l$, $\delta w=0$, $w''=0$

(3) 当 $x=0$ 及 $x=l$ $\frac{\partial}{\partial x} (EI w'') = 0$, $w''=0$

以上三种条件分别表示两端固定, 两端简支, 及两端自由的约束。当然还有由以上三种约束组合(如一端固定, 一端自由)的边界条件, 这样的边界条件也属于自然边界条件。

例题 5.10.2 用 Ritz 法求悬臂梁前两阶固有频率的近似值。

解 由例题 5.10.1 已知, Hamilton 作用量的变分表达式为

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{1}{2} \left[\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx dt \quad (a)$$

取可能运动为满足几何边界条件且所有各点都有相同频率及位相的简谐振动:

$$w(x, t) = \phi(x) \sin(\omega t + \alpha) \quad (b)$$

其中 ω, α 是对所有可能运动而言都相同的固定值, $\phi(x)$ 是满足几何边界条件的单值连续函数, 它表示振动时的位形。假设不同的函数 $\phi(x)$ 就得到不同的可能运动。

由于运动的周期性, 时间的积分限可取一个整周期。因此, 我们取 $t_0 = 0, t_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ 。我们应注意到在求变分 δw 时, 只有 $\phi(x)$ 是可变的, 而 ω 及 α 是不变的。于是我们有

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^l \frac{1}{2} [\rho \phi^2(x) \omega^2 \cos^2(\omega t + \alpha) \\ &\quad - EI \phi''^2(x) \sin^2(\omega t + \alpha)] dx dt \\ &= \frac{\pi}{2\omega} \delta \int_0^l [\rho(x) \omega^2 \phi^2(x) - EI \phi''^2(x)] dx \end{aligned} \quad (c)$$

Hamilton 原理最后归结为泛函 S_1 取驻值:

$$\delta S_1 = 0 \quad (d)$$

其中

$$S_1 = \int_0^l [\rho(x) \omega^2 \phi^2(x) - EI \phi''^2(x)] dx \quad (e)$$

现在假设函数 $\phi(x)$ 为以下形式的表达式:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x) \quad (f)$$

其中每一函数 $\phi_i(x)$ 都满足几何边界条件, 这样就保证了函数 $\phi(x)$ 满足几何边界条件。 α_i 为 n 个待定参数, 这些参数应由泛函 S_1 取驻值的条件所决定。当我们用 (f) 式代入 S_1 式时 S_1 成为 α_i 的多元函数:

$$S_1 = S_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (g)$$

其驻值条件为

$$\frac{\partial S_1}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (h)$$

我们就有 n 个方程式, 可解 n 个未知量 α_i 。

现在我们用 Ritz 法求如图 5.13 所示悬臂梁的前两阶固有频率。假设梁的位移函数为以下形式:

$$\phi(x) = \alpha_1 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right) + \alpha_2 \left(1 - \cos \frac{3\pi x}{2l}\right) \quad (i)$$

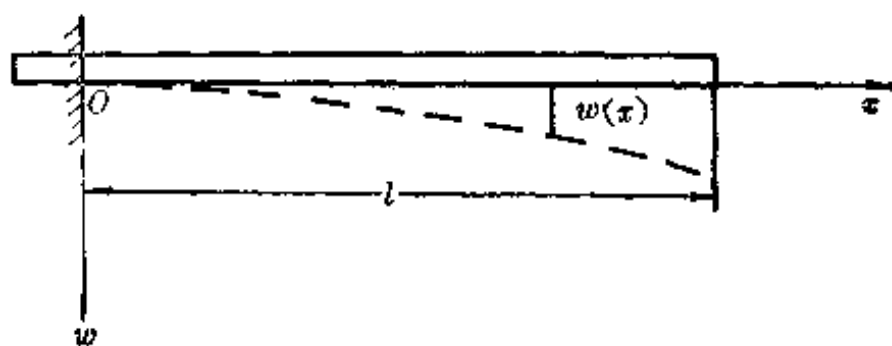


图 5.13

读者不难验证 $\phi(x)$ 满足 O 、 A 两端的几何边界条件。为了书写方便, 令 $\xi = \frac{\pi x}{2l}$, 则有

$$\phi(x) = \alpha_1 (1 - \cos \xi) + \alpha_2 (1 - \cos 3\xi) \quad (j)$$

$$\phi'(x) = \left(\frac{\pi}{2l}\right)(\alpha_1 \sin \xi + 3\alpha_2 \sin 3\xi) \quad (k)$$

$$\phi''(x) = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 (\alpha_1 \cos \xi + 9\alpha_2 \cos 3\xi) \quad (l)$$

将(j)及(l)代入 S_1 的表达式(e)式,有

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ \rho \omega^2 [\alpha_1 (1 - \cos \xi) + \alpha_2 (1 - \cos 3\xi)]^2 \\ - EI \left(\frac{\pi}{2l}\right)^4 [\alpha_1 \cos \xi + 9\alpha_2 \cos 3\xi]^2 \} \frac{2l}{\pi} d\xi$$

S_1 的驻值条件为 $\frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} = 0$ 及 $\frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} = 0$, 令 $\lambda = \frac{\rho \omega^2}{EI} \left(\frac{2l}{\pi}\right)^4$ 则

$$\left. \begin{aligned} \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\alpha_1 (1 - \cos \xi) + \alpha_2 (1 - \cos 3\xi)] (1 - \cos \xi) d\xi \\ - \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\alpha_1 \cos \xi + 9\alpha_2 \cos 3\xi] \cos \xi d\xi = 0 \\ \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\alpha_1 (1 - \cos \xi) + \alpha_2 (1 - \cos 3\xi)] (1 - \cos 3\xi) d\xi \\ - \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\alpha_1 \cos \xi + 9\alpha_2 \cos 3\xi] 9 \cos 3\xi d\xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

积分后可整理为以下线性方程组:

$$\left. \begin{aligned} (0.356195\lambda - 0.785398)\alpha_1 + 0.904129\lambda\alpha_2 &= 0 \\ 0.904129\lambda\alpha_1 + (3.022861\lambda - 63.617251)\alpha_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

这个方程组有非零解的条件是其系数行列式为零, 即

$$\lambda^2 - 96.5535\lambda + 192.7069 = 0$$

解之, 得两个根为

$$\lambda_1 = 2.0389, \quad \lambda_2 = 94.5145$$

相当于

$$\omega_1 = \frac{3.523}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \quad \omega_2 = \frac{23.9878}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$

为了检验这种方法的可靠性,取精确解比较*:

$$\omega_1^0 = \frac{3.515}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}},$$

$$\omega_2^0 = \frac{22.0336}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}},$$

误差分别是 0.2% 及 8.8%。可见,对于只取两项的近似函数 $\phi(x)$,求一阶固有频率得到很满意的结果,但二阶固有频率误差稍大。为了改善二阶频率的精确度,可以多取几项 $\phi_i(x)$ 以组成近似函数 $\phi(x)$,但计算工作量要相应增大。

例题 5.10.3 用 Hamilton 原理求如图 5.14 所示非线性弹性系统自由振动的基本方程及近似解**。

如图 5.14 所示的单位长质量为 m 的均质梁,一端为铰支,另一端和刚度为 k_0 的弹簧及质量为 M 的重块相连。重块可在水平方向自由滑动。

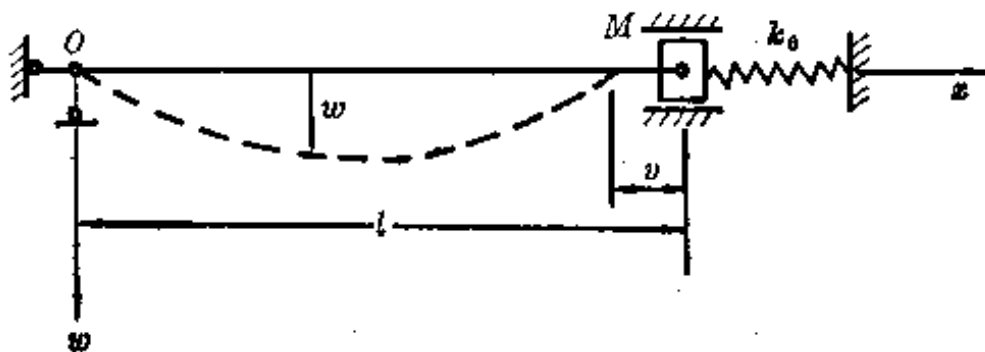


图 5.14

解 这个问题的非线性包含两方面。首先是几何非线性。由于重块和弹簧相联结,弹簧的势能涉及到重块的位移,亦即涉及梁的端点的水平位移。设这位移为 v ,则有

$$v = l - \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{1+w'^2}} \approx \frac{1}{2} \int_0^l w'^2 dx \quad (a)$$

* Timoshenko and Young, Vibration Problems in Engineering, 1955.

** 见参考文献[50]

其次是材料的非线性。假设应力与应变之间的非线性关系为

$$\sigma = E(e - \beta e^3) \quad (b)$$

其中 E 为弹性模量, β 为常数。由 (a) 可列出动能表达式如下:

$$T = \frac{m}{2} \int_0^l (\dot{v})^2 dx + \frac{M}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \frac{w'^2}{2} dx \right]^2 \quad (c)$$

由 (a) 及 (b) 可列出势能表达式如下:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_v \sigma e dv + \frac{k_0}{2} \left[\int_0^l \frac{w'^2}{2} dx \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_A E(e - \beta e^3) e dA dx \\ &\quad + \frac{k_0}{8} \left[\int_0^l w'^2 dx \right]^2 \end{aligned}$$

由梁的平面截面假设, 即 $\varepsilon \approx yw''$, 上式可化为

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_A [E y^2 (w'')^2 - E \beta y^4 (w'')^4] dA dx \\ &\quad + \frac{k_0}{8} \left[\int_0^l w'^2 dx \right]^2 \end{aligned}$$

令 $I_1 = \int_A y^2 dA$, $I_2 = \beta \int_A y^4 dA$, 则上式可化为:

$$\begin{aligned} V &= \frac{EI_1}{2} \int_0^l (w'')^2 dx - \frac{EI_2}{2} \int_0^l (w'')^4 dx \\ &\quad + \frac{k_0}{8} \left[\int_0^l w'^2 dx \right]^2 \quad (d) \end{aligned}$$

以下分别求与 T 及 V 有关项的变分:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} T dt &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{m}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dt \\ &\quad + \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{M}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \frac{w'^2}{2} dx \right]^2 dt \\ &= m \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dx dt + \frac{M}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l w'^2 dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l w' \delta w' dx \right) dt \\
& = m \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right] dx dt \\
& \quad + \frac{M}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l w'^2 dx \right) \int_0^l w' \delta w' dx \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^l w'^2 dx \int_0^l w' \delta w' dx \right] dt \\
& = m \int_0^l \left[\frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right]_{t_0}^{t_1} dx - m \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx dt \\
& \quad + \frac{M}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l w'^2 dx \int_0^l w' \delta w' dx \right]_{t_0}^{t_1} \\
& \quad - \frac{M}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^l w'^2 dx \left\{ [w' \delta w]_0^{t_1} - \int_0^l w'' \delta w dx \right\} dt
\end{aligned}$$

利用几何边界条件 $w(0, t) = w(l, t) = 0$ 及时间边值条件 $\delta w(x, t_0) = \delta w(x, t_1) = 0$, 可将上式简化为

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt & = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[-m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \right. \\
& \quad \left. \frac{M}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \times \int_0^l w'^2 dx \right) w'' \right] \delta w dx dt
\end{aligned} \tag{e}$$

又

$$\begin{aligned}
-\delta \int_{t_0}^{t_1} V dt & = -EI_1 \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l w'' \delta w'' dx dt + 2EI_2 \\
& \quad \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l w''^3 \delta w'' dx dt - \frac{k_0}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l w'^2 dx \int_0^l w' \delta w' dx dt \\
& = -EI_1 \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial x} (w'' \delta w') - w''' \delta w' \right] dx dt \\
& \quad + 2EI_2 \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial x} (w''^3 \delta w') - \frac{\partial}{\partial x} (w'')^3 \delta w' \right] dx dt \\
& \quad - \frac{k_0}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l w'^2 dx \int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial x} (w' \delta w) - w'' \delta w \right] dx dt
\end{aligned}$$

同样利用几何边界条件可使上式右边三个积分的前一项消去而化为

$$\begin{aligned} -\delta \int_{t_0}^{t_1} V dt = & -EI_1 \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[-\frac{\partial}{\partial x} (w'''' \delta w) \right. \\ & \left. + w'''' \delta w \right] dx dt + 2EI_2 \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[-\frac{\partial}{\partial x} \right. \\ & \times \left(\frac{\partial}{\partial x} w''^2 \delta w \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w'')^2 \delta w \left. \right] dx dt \\ & + \frac{k_0}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l w'^2 dx \int_0^l w'' \delta w dx dt \end{aligned}$$

再利用几何边界条件消去上式右边头两个积分的前一项, 得

$$\begin{aligned} -\delta \int_{t_0}^{t_1} V dt = & - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[EI_1 w'''' - 2EI_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w'')^2 \right. \\ & \left. - \frac{k_0}{2} \int_0^l w'^2 dx \cdot w'' \right] \delta w dx dt \end{aligned} \quad (f)$$

将(e)与(f)式代入 Hamilton 原理中, 便得到以下运动方程式:

$$\begin{aligned} EI_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2EI_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \\ - \left[\frac{k_0}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right. \\ \left. + \frac{M}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (g)$$

这是一个十分复杂的非线性积分-微分方程, 只能用近似方法求解。今设其解具有以下形式:

$$w(x, t) = q(t) \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (h)$$

它满足两端铰支的边界条件:

$$w(0, t) = w(l, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0$$

现在用 Galerkin 法求近似解。由 (g) 及 (h) 式可得

$$\int_0^l \left\{ EI_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2EI_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 \right. \\ \left. - \left[\frac{k_0}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{M}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \right. \\ \left. \times \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \sin \frac{i\pi x}{l} dx = 0 \quad (i)$$

将 (h) 式代入, 积分后, 得非线性常微分方程:

$$\ddot{q} + \omega_i^2 q + (\gamma - \alpha) q^3 + K q (q^2)'' = 0 \quad (j)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_1}{m}}, \alpha = \frac{3EI_2 i^8 \pi^8}{2\pi l^8} \\ K &= \frac{Mi^4 \pi^4}{4ml^3}, \gamma = \frac{k_0 i^4 \pi^4}{4ml^3} \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

这些参数的意义很容易分析: α 代表材料非线性弹性系数, K 代表非线性惯性系数, γ 代表几何非线性弹性系数, ω_i 代表线性系统的 i 阶固有频率。

假设 α, K, γ 都是小参数, 我们可以继续用 Galerkin 法求非线性方程 (j) 的近似解。取近似解为

$$q(t) = a_1 \cos \omega'_1 t, \quad (l)$$

Galerkin 法给出以下方程:

$$\int_0^\tau [-\omega_i^2 a_1 \cos \omega'_1 t + \omega_i^2 a_1 \cos \omega'_1 t + (\tau - \alpha) \\ \times a_1^3 \cos^3 \omega'_1 t + 2Ka_1^3 \omega_i'^2 (\cos \omega'_1 t \sin^2 \omega'_1 t -$$

其中 $\tau = \frac{2\pi}{\omega'_1}$ 。展开上式, 得到

$$\int_0^\tau [-\omega_i^2 a_1 \cos \omega'_1 t + \omega_i^2 a_1 \cos \omega'_1 t + (\tau - \alpha) \\ \times a_1^3 \cos^3 \omega'_1 t + 2Ka_1^3 \omega_i'^2 (\cos \omega'_1 t \sin^2 \omega'_1 t -$$

$$-\cos^3 \omega'_1 t) \rfloor \cos \omega'_1 t dt = 0$$

由于

$$\int_0^T \cos^2 \omega'_1 t dt = \frac{\pi}{\omega'_1}$$

$$\int_0^T \cos^4 \omega'_1 t dt = \frac{3\pi}{4\omega'_1}$$

$$\int_0^T \sin^2 \omega'_1 t \cos^2 \omega'_1 t dt = \frac{\pi}{4\omega'_1}$$

故得到以下方程

$$\omega'^2_1 - \omega^2_1 - (\gamma - \alpha) \frac{3}{4} a^2_1 - \frac{K}{2} a^2_1 \omega'^2_1 + \frac{3}{2} K a^2_1 \omega'^2_1 = 0$$

由此得到 ω'^2_1 的近似值:

$$\omega'^2_1 = \frac{\omega^2_1 + \frac{3}{4}(\gamma - \alpha)a^2_1}{1 + Ka^2_1}$$

这个结果和 Болотин 用其它近似方法求得的结果完全一致*

5.11 变质量系统的 Hamilton 原理

本节研究常质量系统的 Hamilton 原理向变质量系统的推广。由第三章(3.4.11)、(3.4.17)及(3.4.18)诸式容易得到半凝固导数形式的 d'Alembert-Lagrange 原理:

$$\sum_{j=1}^n \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial^* T}{\partial q_j} + Q_j + \Phi_j \right) \delta q_j = 0 \quad (5.11.1)$$

下面定义一个特殊的等时变分记号 δ^* , 当取这种变分时, 质量被当作常数来考虑。对动能 $T = T(q_j, \dot{q}_j, t)$ 作 δ^* 运算后, 有:

* В. В. Болотин, Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1956

$$\delta^*T \triangleq \sum_{j=1}^n \frac{\partial^*T}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^*T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \quad (5.11.2)$$

于是有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^*T}{\partial q_j} \delta q_j &= \delta^*T - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^*T}{\partial \dot{q}_j} \left(\delta \dot{q}_j - \frac{d}{dt} \delta q_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^*T}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \delta q_j \end{aligned} \quad (5.11.3)$$

对于完整系统, 存在广义坐标的微分-变分交换关系, 于是上式可化为:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^*T}{\partial q_j} \delta q_j = \delta^*T - \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^*T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial^*T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \quad (5.11.4)$$

将(5.11.4)式代入(5.11.1)式, 并从 $t=t_0$ 至 $t=t_1$ 的时段内对时间 t 积分, 并限定以下时间端点条件:

$$\delta q_j|_{t=t_0} = \delta q_j|_{t=t_1} = 0 \quad (5.11.5)$$

便有变质量系统的 Hamilton 原理:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta^*T + \sum_{j=1}^n (Q_j + \Phi_j) \delta q_j \right\} dt = 0 \quad (5.11.6)$$

其中 Φ_j 由以下公式表示:

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u}_i + \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (5.11.7)$$

可称为半凝固导数意义下的准广义反推力, 令

$$\delta'W^* = \sum_{j=1}^n \Phi_j \delta q_j \quad (5.11.8)$$

可称为准广义反推力的虚功。由于 $\sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = \delta'W$ 是我们所熟悉

的广义主动力的虚功, 原理(5. 11. 6)又可表为以下形式:

$$\int_{t_0}^{t_1} \{\delta^* T + \delta' W + \delta' W^{\Phi}\} dt = 0 \quad (5. 11. 9)$$

当主动力具有势函数 V 时, 原理(5. 11. 6)又可表为:

$$\int_{t_0}^{t_1} \{\delta^* T - \delta V + \delta' W^{\Phi}\} dt = 0 \quad (5. 11. 10)$$

不难证明, 以普通导数表示的 Hamilton 原理有以下形式:

$$\int_{t_0}^{t_1} \{\delta T + \delta' W + \delta' W^P\} dt = 0 \quad (5. 11. 11)$$

其中 $\delta' W^P$ 表示普通导数意义下准反推力的虚功:

$$\delta' W^P = \sum_{j=1}^n P_j \delta q_j \quad (5. 11. 12)$$

其中准广义反推力 P_j 由式(3. 4. 23)确定。

(5. 11. 9)及(5. 11. 10)式由于不涉及到位形坐标的具体形式, 特别适用于连续体有变质量的情形, 见以下例题。

例题 5. 11. 1 输水管道由均质材料的等截面圆管构成。设管的单位长质量为 m , 截面抗弯刚度为 EI 。管内有不可压缩流体通过, 设单位长流体质量为 m_0 , 均匀流速为 u , 试列出输水管道的自由振动微分方程。

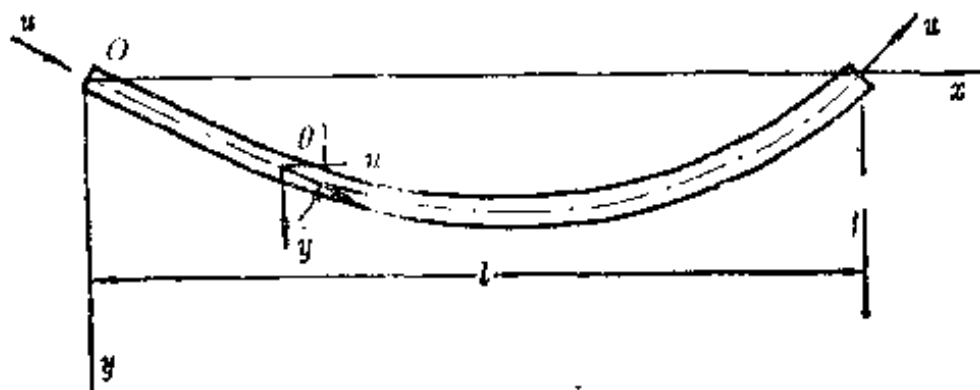


图 5. 15

解 取如图所示坐标及流速方向。在管道弯曲振动时, 流体

质点沿 y 方向的速度分量应等于管道上该处的速度 \dot{y} 及流速 u 在 y 方向投影 $u \sin \theta$ 之和。在小挠度理论中, 略去二阶小量后有 $\sin \theta \approx \theta \approx \frac{\partial y}{\partial x}$ 。因之流体在 y 方向之速度分量为

$$v_y \approx \dot{y} + y' u \quad (a)$$

至于 x 方向之速度分量仍为 u , 误差为二阶以上小量。于是, 载有流体的管道有以下形式的总动能:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l [m \dot{y}^2 + m_0 (\dot{y} + y' u)^2 + m_0 u^2] dx \quad (b)$$

由于本系统中 m 及 m_0 皆为常量, 故半凝固变分 $\delta^* T$ 与普通变分并无区别, 我们有

$$\delta^* T = \int_0^l \{ [(m + m_0) \dot{y} + m_0 y' u] \delta \dot{y} + m_0 (\dot{y} + y' u) u \delta y' \} dx \quad (c)$$

利用分部积分及两类微分-变分交换关系:

$$\delta \dot{y} = \frac{\partial}{\partial t} \delta y, \quad \delta y' = \frac{\partial}{\partial x} \delta y \quad (d)$$

可将(c)式表为

$$\begin{aligned} \delta^* T = & \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \{ [(m + m_0) \dot{y} + m_0 y' u] \delta y \} dx - \int_0^l [(m + m_0) \dot{y} \\ & + m_0 y' u] \delta y dx + \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} [m_0 (\dot{y} + y' u) u \delta y] dx \\ & - \int_0^l m_0 (\dot{y}' + y'' u) u \delta y dx \end{aligned} \quad (e)$$

将上式从 t_0 至 t_1 的时段内对 t 积分, 并考虑到时端条件(5.11.5), 便有

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta^* T dt = & \left[\int_0^l [m_0 (\dot{y} + y' u) u \delta y]_0^l dt \right. \\ & \left. - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l [(m + m_0) \dot{y} + 2m_0 y' u] \delta y dx \right] \end{aligned}$$

$$+ m_0 y'' u^2] \delta y dx dt \quad (f)$$

在例题 5.10.1 中已求得弯曲变形势能的变分, 故有:

$$-\int_{t_0}^{t_1} \delta V dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^l -EI y^{IV} \delta y dx + [EI y''' \delta y - EI y'' \delta y']_0^l \right\} dt \quad (g)$$

准反推力的虚功应等于进口 ($x=0$) 及出口 ($x=l$) 处的准反推力之和。我们应注意, 由于 m_0 是单位长质量, 故在进口处的质量变化率为

$$\dot{m} = m_0 u \quad (h)$$

出口处质量变化率与上式数值相同, 但取负值。于是, 准反推力的总虚功为

$$\delta' W^p = [m_0 u (\dot{y} + y' u) \delta y]_{x=0} - [m_0 u (\dot{y} + y' u) \delta y]_{x=l} \quad (i)$$

将 (f), (g), (i) 代入 (5.11.10) 式, 并注意 $\delta' W^p$ 值与 (f) 式右端第一项的被积函数恰好抵消, 于是有以下结果:

$$-\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l [(m + m_0) \ddot{y} + 2m_0 \dot{y}' u + m_0 y'' u^2 + EI y^{IV}] \delta y dx dt + \int_{t_0}^{t_1} [EI y''' \delta y - EI y'' \delta y']_0^l dt = 0 \quad (j)$$

上式中的第二个积分式在梁的自然边界条件下恒等于零。于是给出以下的运动微分方程:

$$(m + m_0) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2m_0 u \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + m_0 u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (k)$$

这个著名方程的建立及求解曾被不少学者研究过*。显然, 变质量系统的 Hamilton 原理对于解决这类流体-弹性体耦合振动问题提供了最有力的分析手段。

* 见参考文献[53]

第五章 习 题

5.1 谐振子之固有频率为 ω , 在事件空间 (q, t) 中从 (q_0, t_0) 至 (q_1, t_1) 中引出正路, 证明: (a) 当 $t_1 - t_0 \neq \frac{k\pi}{\omega}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 时有唯一解。 (b) 当 $t_1 - t_0 = \frac{k\pi}{\omega}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 及 $q_1 = (-1)^k q_0$ 时有无穷多解。 (c) $t_1 - t_0 = \frac{k\pi}{\omega}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 及 $q_1 \neq (-1)^k q_0$ 时无解。

5.2 试证变分原理

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[L(\theta_1, \dots, \theta_n, q_1, \dots, q_n) + \sum_{r=1}^n \frac{\partial L}{\partial \theta_r} (\dot{q}_r - \theta_r) \right] dt = 0$$

(此处 θ 及 q 系互相独立) 可导出 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \quad (r=1, \dots, n)$$

5.3 一柔性不可伸长之绳索两端固定于 $(x=0, y=h)$ 及 $(x=l, y=h)$ 时, 试求在重力作用下绳索的平衡形状 (提示: 平衡条件用重力势能之泛函驻值条件表示)

5.4 设系统受到一阶非完整约束

$$f_k(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad (k=1, \dots, l)$$

作用, 试用 Jourdain 原理及 Gauss 原理分别导出系统的如下形式的运动方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{k=1}^l \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j}$$

其中 λ_k 为 Lagrange 乘子。

5.5 试用 Gauss 原理导出完整系统的 Appell 方程:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \quad (j=1, \dots, n)$$

其中函数 S 定义为

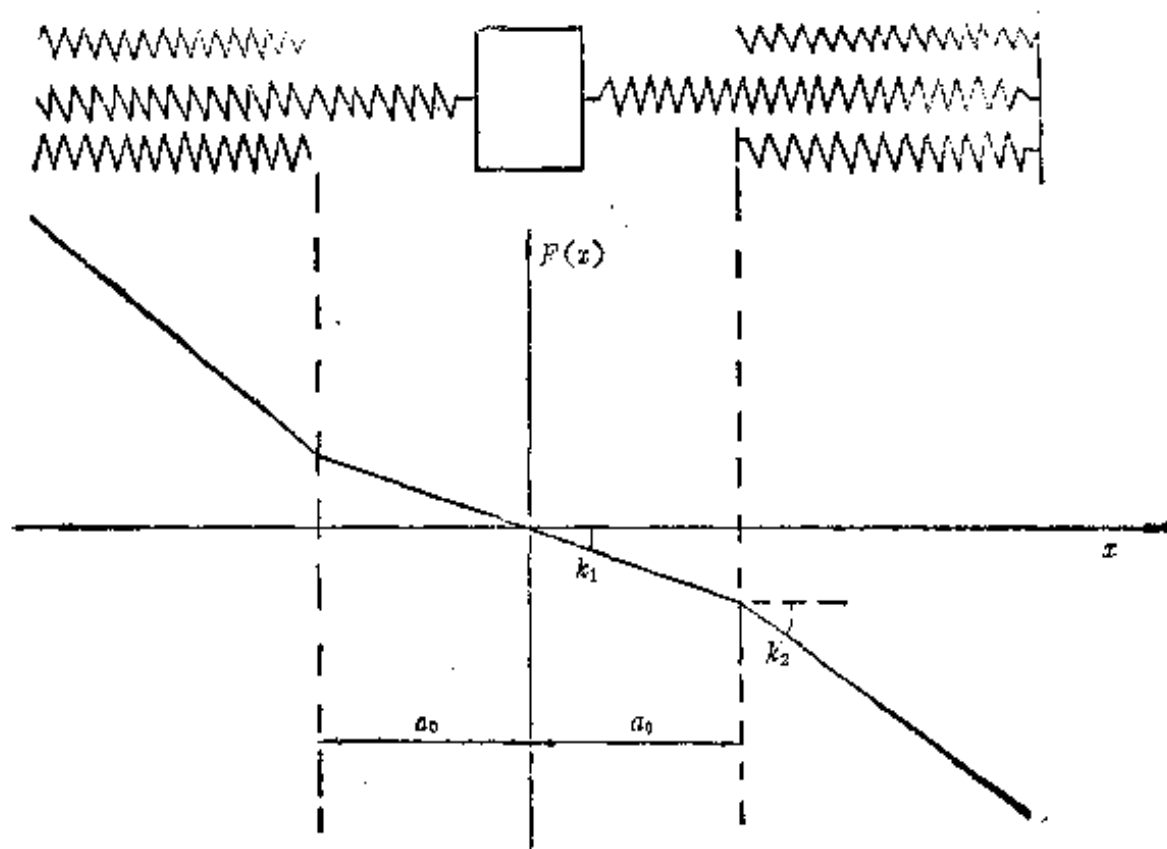
$$S = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i$$

5.6 用基于 Hamilton 原理的 Galerkin 法求非线性强迫振动方程

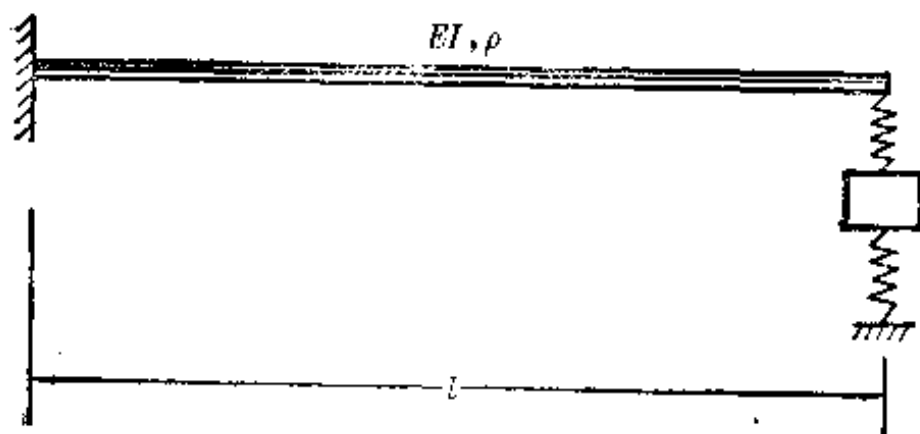
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = P \sin \omega t$$

的振幅-频率特性的近似解, 设 α 为小参数。(提示: 取近似解 $x = c \sin(\omega t - \varphi) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$)

5.7 用 Galerkin 法求一非线性系统的强迫振动的近似解, 系统的力学模型如题 5.7 图所示。非线性恢复力与坐标间的函数关系如图所示, 图中 k_1 及 k_2 分别表示 $|x| \leq a_0$ 及 $|x| \geq a_0$ 的两个不同阶段中的弹簧总刚度系数, 设干扰力按 $P(t) = P_0 \sin \omega t$ 变化



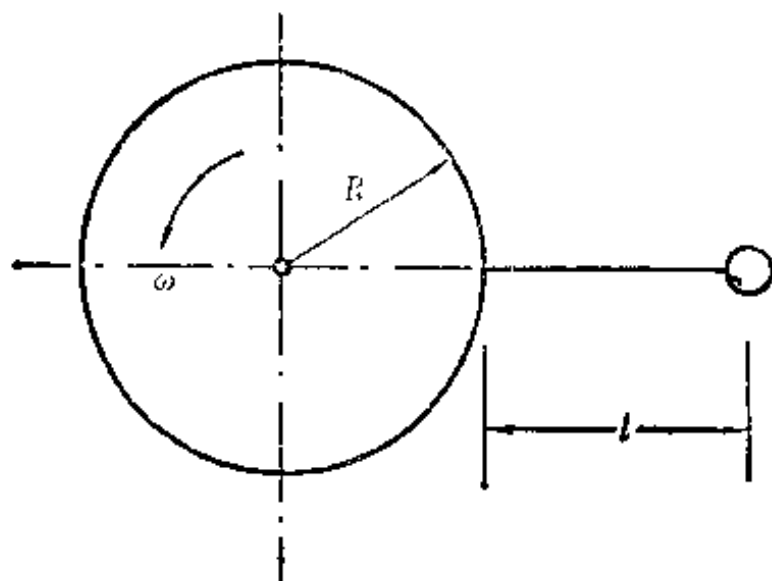
题 5.7



题 5.8

5.8 用 Hamilton 原理列出如题 5.8 图所示系统微振动方程。悬臂梁长为 l ，自由端用刚度为 c 之弹簧与质量为 m 之重块相连，其下端又用刚度为 c 之弹簧与基础相连，梁之截面抗弯刚度为 EI ，质量密度为 ρ 。

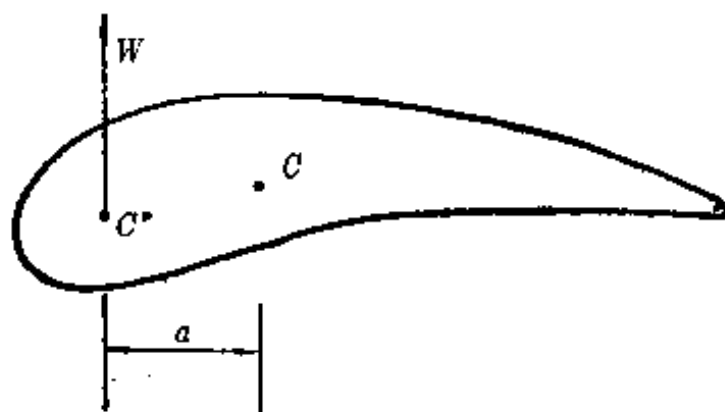
5.9 在半径为 R 的实体圆盘的边缘固定一长为 l 的柔性杆，杆的自由端附有一质量为 M 的重块。圆盘以角速度 ω 匀速转动，设杆的抗弯刚度为 EI_x ，质量密度为 m ，用 Hamilton 原理列出杆-重块系统的运动方程。



题 5.9

5.10 机翼剖面之弯曲中心 C^* 至形心之距离为 a ，剖面的位移用 C^* 的线位移 w 及角位移 θ 表示， w 及 θ 的正方向如图所示。设单位长度质量为 $\rho(x)$ ，抗弯刚度及抗扭刚度分别为 EI 及 GI_t ，对弯曲中心的转动惯量为 $I_{\alpha\alpha}$ 。用 Hamilton 原理证明机翼弯扭振动方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EIw'') + \rho\ddot{w} - \rho a\ddot{\theta} = 0$$



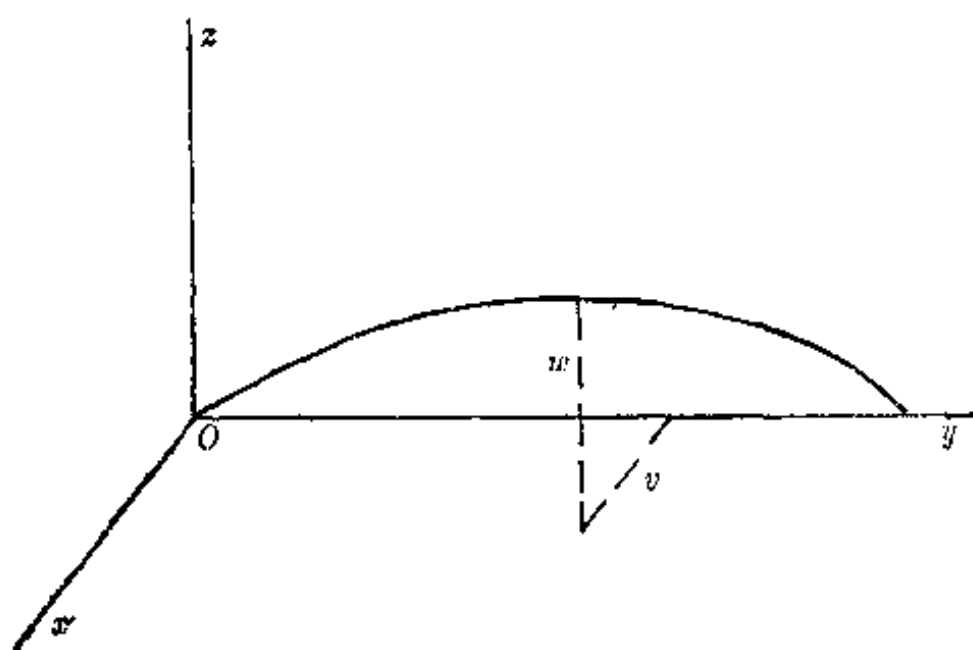
题 5.10

$$\frac{\partial}{\partial x}(GI_x\theta') - \rho a\dot{\theta} - I_a\ddot{\theta} = 0$$

5.11 用 Hamilton 原理证明变截面杆双向弯曲振动微分方程为

$$E(I_y v'' + I_{yz} w'')'' + \rho A \ddot{v} = F_y$$

$$E(I_{yz} v'' + I_z w'')'' + \rho A \ddot{w} = F_z$$



题 5.11

式中 E 为材料的弹性模量, I_y, I_z, I_{yz} 分别为截面对 y 轴之惯性矩、对 z 轴之惯性矩及对 y, z 两轴之惯性积, ρ 为单位长度质量, A 为截面面积, v, w 分别为杆轴线上任一点沿 y 轴及 z 轴方向的位移, F_y, F_z 分别为沿 y 轴及 z 轴方向分布的载荷强度。

第六章 非完整系统动力学

6.1 引言

自从 Hertz 于 1894 年首次提出关于非完整系统的一些重要概念以来,非完整系统动力学经过 С. А. Чаплыгин, V. Volterra, V. Appell, П. В. Воронев 和 G. Hamel 等人的奠基性工作至今已有约一百年的历史,在这期间,非完整系统动力学无论在基本原理,基本方程,约束类型的扩充,以及在工程技术的应用中都取得了重要进展,已形成了分析力学的重要分支。本书为了使讨论的方法具有较大的概括性及行文上的简洁,在大多数情况下采用由一般到特殊的推导方法,即先讨论一阶非线性非完整系统,然后将一阶线性非完整系统作为特殊情况得出。

设有需用 n 个广义坐标描述的,由 g 个一阶非完整约束限制的系统,约束方程的一般形式为:

$$f_k(q_j, \dot{q}_j, t) = 0 \quad \begin{pmatrix} j = 1, \dots, n; m = n - g \\ k = m + 1, m + 2, \dots, n \end{pmatrix} \quad (6.1.1)$$

其中 m 为系统的自由度,在特殊情况下的一阶线性非完整约束方程具有以下形式:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j + a_k = 0 \quad \begin{pmatrix} k = m + 1, m + 2, \dots, n \\ m = n - g \end{pmatrix} \quad (6.1.2)$$

式中 a_{kj} 及 a_k 一般是广义坐标和时间的函数,其中当 a_k 为零的约束称为有序约束,此时若 a_{kj} 不显含时间 t 则为定常约束。

一阶非线性非完整约束对广义速度变分 δq_j 的限制条件为:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = 0 \quad \left(\begin{matrix} k = m+1, \dots, n \\ m = n-g \end{matrix} \right) \quad (6.1.3)$$

一阶线性非完整约束对广义速度变分 $\delta \dot{q}_j$ 的限制条件为:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \delta \dot{q}_j = 0 \quad \left(\begin{matrix} k = m+1, \dots, n \\ m = n-g \end{matrix} \right) \quad (6.1.4)$$

将约束对 $\delta \dot{q}_j$ 的限制条件和一阶虚位移空间或 $\delta \dot{\mathbf{r}}$ 空间的变分原理——Jourdain 原理相结合, 是本书推导非完整系统动力学方程的基本方法。这是因为, 对于速度受到约束的系统, 用 $\delta \dot{\mathbf{r}}$ 空间的变分原理去推导方程是极其自然且顺理成章的, 但应指出, 用 Четаев 的虚位移定义和 d'Alembert-Lagrange 原理相结合, 用约束对 $\delta \dot{q}_j$ 的限制条件和 Gauss 原理结合, 或用积分原理 (需用 Четаев 定义及 d- δ 交换关系) 都是可行的。

6.2 Routh 方程

用广义坐标表示的 Jourdain 原理有以下形式:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta \dot{q}_j = 0 \quad (6.2.1)$$

约束对广义速度变分的限制条件为

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = 0 \quad \left(\begin{matrix} k = m+1, \dots, n \\ m = n-g \end{matrix} \right) \quad (6.2.2)$$

利用 Lagrange 乘子法, 将 (6.2.2) 中每一方程乘以不定乘子 λ_k , 再与式 (6.2.1) 相减, 便得到:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{k=m+1}^n \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta \dot{q}_j = 0 \quad (6.2.3)$$

选择 g 个乘子以使以下 g 个等式成立:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{k=m+1}^n \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j=m+1, \dots, n) \quad (6.2.4)$$

这是因为(6.1.3)的独立性, $\left| \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right|_{\substack{k=m+1, \dots, n \\ j=1, 2, \dots, n}}$ 的秩为 m , 调整 q_j 的

编号, 总可以使 $\det \left| \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right|_{k, j=m+1, \dots, n} \neq 0$, 从而(6.2.4)中的 λ_k 总是有确定解的, 于是(6.2.3)化为

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{k=m+1}^n \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j = 0 \quad (6.2.5)$$

以上方程只含有 m 个广义速度变分 $\delta \dot{q}_1, \dots, \delta \dot{q}_m$, 既然它们是独立的变分, 那末(6.2.5)对于任意的 $\delta \dot{q}_j (j=1, \dots, m)$ 恒能成立的条件为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{k=m+1}^n \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (6.2.6)$$

将(6.2.4)与(6.2.6)合并起来, 便得到以下形式的运动微分方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{k=m+1}^n \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.2.7)$$

这就是一阶非线性非完整系统的 Routh 方程, 实际上是带有非完整约束乘子的 Lagrange 方程, 将这组方程和约束方程

$$f_k(q_j, \dot{q}_j, t) = 0 \quad \begin{pmatrix} m=n-g \\ j=1, \dots, n \\ k=m+1, \dots, n \end{pmatrix} \quad (6.2.8)$$

联立起来, 共有 $n+g$ 个方程, 可解 $n+g$ 个未知量 q_1, \dots, q_n 及 $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$

对于一阶线性非完整约束(6.1.2), Routh 方程具有以下

形式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{k=m+1}^n \lambda_k a_{kj} \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.2.9)$$

令方程(6.2.7)中的乘子项为 R_j :

$$R_j = \sum_{k=m+1}^n \lambda_k a_{kj} \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.2.10)$$

不难理解, R_j 是由于非完整约束引起的广义约束力, Routh 方程的实质在于: 解除所有的非完整约束而代以约束力后, 这些约束力在一组由不满足(6.2.2)的 $\delta \dot{q}_1, \dots, \delta \dot{q}_n$ 形成的虚位移中一般将作功, R_j 不过是单位广义虚位移 δq_j 中非完整约束力的功。由此可见, Routh 方程的优点在于既能求未知的运动也能求未知的非完整约束力。

例题3.1.1 Чаплыгин-Caratheodory问题: 一刚体作平面运动, 在其重心 C 点处引固结于刚体上的坐标系 $C\xi\eta$, 约束条件为在任一时刻 C 点速度恒沿 $C\xi$ 方向, 设刚体的质量为 M , 对 C 点之惯性矩为 I_C 。求刚体在任意外力作用下的运动。

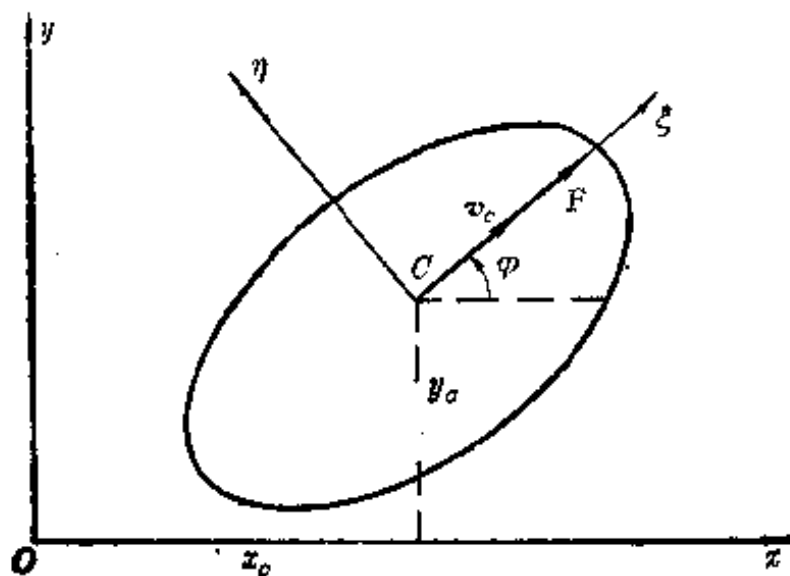


图 6.1

解 作用在刚体上的外力可简化为主向量 F 及时 C 点的主矩 L_c 。如将主向量分解为沿 $C\xi$ 及 $C\eta$ 两方向的分量, 则由于沿 $C\eta$ 方向的分量在约束所限定的速度 v_c (必须沿 $C\xi$ 方向) 上, 无论是在实位移或虚位移中都不做功, 对系统运动不起作用, 因之, 我们只需考虑 F 沿 $C\xi$ 方向的情形。

非完整约束条件为

$$\dot{x}_c \operatorname{tg} \varphi - \dot{y}_c = 0 \quad (a)$$

其中 x_c 及 y_c 为 C 点对于固定坐标系 Oxy 的坐标, φ 角为 $C\xi$ 轴与 x 轴间的夹角, 取 x_c, y_c 及 φ 作为本问题的广义坐标, 由于存在一个非完整约束 (a), 因此系统具有两个自由度, 系统的动能表达式为

$$T = \frac{M}{2} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{I_c}{2} \dot{\varphi}^2 \quad (b)$$

设向量 F 沿 x 轴及 y 轴方向的投影分别为 F_x 及 F_y , 则主动力的虚功为

$$\begin{aligned} \delta' W &= F_x \delta x + F_y \delta y + L_c \delta \varphi \\ &= F \cos \varphi \delta x + F \sin \varphi \delta y + L_c \delta \varphi \end{aligned} \quad (c)$$

于是广义力分别为

$$Q_x = F \cos \varphi, \quad Q_y = F \sin \varphi, \quad Q_\varphi = L_c \quad (d)$$

Routh 方程为

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_c &= F \cos \varphi + \lambda \operatorname{tg} \varphi \\ M \ddot{y}_c &= F \sin \varphi - \lambda \\ I_c \ddot{\varphi} &= L_c \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

以下将方程组 (e) 和约束方程 (a) 联立求解, 将 (e) 中的第一式乘以 $\operatorname{tg} \varphi$ 后减去第二式, 便得到

$$M (\ddot{x}_c \operatorname{tg} \varphi - \ddot{y}_c) = \frac{\lambda}{\cos^2 \varphi} \quad (f)$$

但是由方程 (a) 可求得

$$\ddot{x}_c \operatorname{tg} \varphi - \ddot{y}_c = -\frac{\dot{x}_c \dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} \quad (g)$$

由此求得约束乘子

$$\lambda = -M \dot{x}_c \dot{\varphi} \quad (h)$$

将(h)代入(e)式,便得到消去乘子 λ 的系统运动方程:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_c + \dot{\varphi} \dot{x}_c \operatorname{tg} \varphi &= \frac{F}{M} \cos \varphi \\ \ddot{y}_c - \dot{\varphi} \dot{x}_c &= \frac{F}{M} \sin \varphi \\ I_c \ddot{\varphi} &= L_c \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

直接解非线性微分方程组(i)将遇到困难,为此我们转换到自然坐标,沿轨迹上C点的切线加速度 a_t 及法线加速度 a_n 为:

$$\left. \begin{aligned} a_t &= \ddot{x}_c \cos \varphi + \ddot{y}_c \sin \varphi \\ a_n &= \ddot{x}_c \sin \varphi - \ddot{y}_c \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

将(i)中的 \ddot{x}_c 及 \ddot{y}_c 代入上式后,我们得到:

$$\left. \begin{aligned} a_t &= \frac{F}{M} \\ a_n &= -\frac{\dot{\varphi} \dot{x}_c}{\cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

(k)中的第一方程经积分后可得:

$$v_c = v_{c0} + \frac{1}{M} \int_0^t F dt \quad (l)$$

其中 v_c 及 v_{c0} 分别为任意时刻 t 及 $t=0$ 时C点的速度。由此可求得 \dot{x}_c 及 \dot{y}_c 如下:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_c &= v_c \cos \varphi = v_{c0} \cos \varphi + \frac{\cos \varphi}{M} \int_0^t F dt \\ \dot{y}_c &= v_c \sin \varphi = v_{c0} \sin \varphi + \frac{\sin \varphi}{M} \int_0^t F dt \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

其中的 φ 可由(i)中的第三方程积分求得,积分一次后得到:

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}_0 + \int_0^t L_c dt \quad (n)$$

其中 $\dot{\phi}_0$ 为角速度 $\dot{\phi}$ 的初值, 再积分一次后得到

$$\phi = \phi_0 + \int_0^t \left[\dot{\phi}_0 + \int_0^t L_c dt \right] dt \quad (o)$$

其中 ϕ_0 为 ϕ 的初值。将 (m) 再积分一次可得:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= x_{c0} + \int_0^t \left[v_{c0} + \frac{1}{M} \int_0^t F dt \right] \cos \phi dt \\ y_c &= y_{c0} + \int_0^t \left[v_{c0} + \frac{1}{M} \int_0^t F dt \right] \sin \phi dt \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

其中 x_{c0} 及 y_{c0} 为 x_c 及 y_c 的初值, 方程 (h)、(p) 及 (o) 共同给出问题的全部解答。

由 (i) 的前两方程给出广义约束力为

$$R_x = \lambda \tan \varphi, \quad R_y = -\lambda \quad (q)$$

它们实际上是非完整约束力在 Ox 轴及 Oy 轴上的投影, 如将它们重新分解在 $C\xi$ 轴及 $C\eta$ 轴上, 不难得知约束力 \underline{R} 在 $C\xi$ 轴上之投影为零 (这是事先就预料到的), 至于 \underline{R} 在 $C\eta$ 轴上的投影, 亦即 \underline{R} 沿法线上的投影则为

$$\begin{aligned} R_n &= -R_x \sin \varphi + R_y \cos \varphi \\ &= -\frac{\lambda \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} - \lambda \end{aligned} \quad (r)$$

再将 λ 的表达式代入后, 可得

$$R_n = \frac{M \dot{x}_c \dot{\phi}}{\cos \varphi} \quad (s)$$

或

$$R_n = M v \dot{\phi} \quad (t)$$

下面来讨论问题的一种特解, 即在主动力 \underline{F} 及 L_c 全为零的情况下的特解, 由 (l) 及 (n) 两式可知, 在主动力全为零时应有

$$v_c = v_{c0} = \text{常数}, \quad \phi = \phi_0 = \text{常数} \quad (u)$$

即 C 点速度 v_c 及角速度 ϕ 保持不变, 这可以看成一种广义惯性运动, 将 (u) 代入 (k) 可知

$$a_n = \frac{\phi \dot{x}_c}{\cos \varphi} = \phi v = \phi_0 v_{c0} = \text{常数} \quad (v)$$

即 C 点的法线加速度也保持不变, 由此可知, C 点轨迹的曲率半径也保持不变:

$$\rho = \frac{v_c^2}{a_n} = \frac{v_{c0}^2}{\phi_0} = \text{常数} \quad (w)$$

可见, 在不受外部主动力作用时, 其轨迹为一个圆。

6.3 关于非完整系统中准速度及准坐标

在第一章中已介绍过准坐标及其变分, 此处作一个简短的回顾和进一步的讨论。

6.3.1 准速度的变分

当系统受到一阶非线性非完整约束

$$f_k(q_j, \dot{q}_j, t) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} j=1, \dots, n \\ k=m+1, \dots, n, m=n-g \end{array} \right) \quad (6.3.1)$$

时, 可取后面 $n-m=g$ 个准速度为

$$\pi_k = \omega_k \triangleq f_k(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv 0 \quad \left(\begin{array}{l} j=1, \dots, n \\ k=m+1, \dots, n, m=n-g \end{array} \right) \quad (6.3.2)$$

而前面 m 个准速度可选为以 q_j, \dot{q}_j, t 为变量的 m 个其它任何函数:

$$\pi_k = \omega_k = f_k(q_j, \dot{q}_j, t) \quad \left(\begin{array}{l} j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, m, m=n-g \end{array} \right) \quad (6.3.3)$$

只要 (6.3.2) 及 (6.3.3) 式所包含的 n 个函数 $f_k (k=1, \dots, n)$ 的 Jacobi 行列式不为零就行了, 即

$$\frac{\partial(\omega_1, \dots, \omega_n)}{\partial(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)} \neq 0 \quad (6.3.4)$$

于是用准坐标表达的约束方程成为

$$\omega_k = 0 \quad (k = m+1, \dots, n) \quad (6.3.5)$$

由于 Jacobi 行列式不为零(见(6.3.4)式), 我们可从(6.3.1)及(6.3.3)式中反解出 \dot{q}_j 如下:

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_s, \omega_k, t) \quad \begin{pmatrix} s, j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, m \end{pmatrix} \quad (6.3.6)$$

与 $\delta \underline{r}$ 空间相一致的变分给出以下关系:

$$\left. \begin{aligned} \delta \omega_k &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j & (k=1, \dots, m) \\ \delta \omega_k &= 0 & (k=m+1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (6.3.7)$$

$$\delta \dot{q}_j = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \omega_k \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.3.8)$$

若系统受到 g 个一阶线性非完整约束:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j + a_k = 0 \quad \begin{pmatrix} k=m+1, \dots, n \\ m=n-g \end{pmatrix} \quad (6.3.9)$$

可取后面 $n-m$ 个准速度为

$$\pi_k = \omega_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j + a_k \equiv 0 \quad (k=m+1, \dots, n) \quad (6.3.10)$$

前面 m 个准速度可在保证 Jacobi 行列式不为零(见(6.3.4)式)的前提下取广义速度的任意线性函数(或直接取为 $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m$):

$$\pi_k = \omega_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j + a_k \quad \begin{pmatrix} k=1, \dots, m \\ m=n-g \end{pmatrix} \quad (6.3.11)$$

将(6.3.10)及(6.3.11)二式合并起来, 准速度与广义速度的普遍关系仍可表为

$$\pi_k = \omega_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j + a_k \quad (k=1, \dots, n) \quad (6.3.12)$$

但要记住后面 $n-m$ 个 ω_k 恒为零。由(6.3.12)式反解出 \dot{q}_j 如下:

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} \omega_k + b_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.3.13)$$

于是与 $\delta \underline{r}$ 空间相一致的变分给出以下关系:

$$\left. \begin{aligned} \delta \omega_k &= \sum_{j=1}^n a_{kj} \delta \dot{q}_j \quad (k=1, \dots, m) \\ \delta \omega_k &= 0 \quad (k=m+1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (6.3.14)$$

$$\delta \dot{q}_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} \omega_k \quad (6.3.15)$$

6.3.2 准坐标的变分

因为准坐标没有定义,所以准坐标的变分是人为定义的,我们定义准坐标的微分为:

$$d\pi_k \triangleq \omega_k dt \quad (6.3.16)$$

任意两个邻近的 $d\pi'_k$ 与 $d\pi''_k$ 之差称为准坐标的变分:

$$\delta \pi_k \triangleq d\pi'_k - d\pi''_k = (\omega'_k - \omega''_k) dt \quad (6.3.17)$$

或

$$\delta \pi_k \triangleq \delta \omega_k dt \quad (6.3.18)$$

对于一阶非线性完整约束情况,由(6.3.3)式可知:

$$\delta \pi_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.3.19)$$

但是

$$\delta \dot{q}_j dt = (\dot{q}'_j - \dot{q}''_j) dt = dq'_j - dq''_j = \delta q_j \quad (6.3.20)$$

于是我们有以下的准坐标变分公式:

$$\delta \pi_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.3.21)$$

由反解后的(6.3.6)式可得到:

$$\delta q_j = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \omega_k \quad (6.3.22)$$

两端乘以 dt 后, 由(6.3.18)及(6.3.20)式可得:

$$\delta q_j = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \pi_k \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.3.23)$$

当约束是一阶线性非完整情况时, 读者不难发现 (6.3.21), (6.3.23)式分别退化为(1.5.19)及(1.5.20)两组特殊公式, 即

$$\left. \begin{aligned} \delta \pi_k &= \sum_{j=1}^n a_{kj} \delta q_j \quad (k=1, \dots, m) \\ \delta \pi_k &= 0 \quad (k=m+1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (6.3.24)$$

$$\delta q_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} \delta \pi_k \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.3.25)$$

6.3.3 函数对准速度及对准坐标的导数

设有某函数 $F(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t)$, 利用以下关系:

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} \omega_k + b_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.3.26)$$

转换为准速度的函数后, 成为

$$\begin{aligned} F^* &= F(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1(\omega_k, q_k, t), \dots, \dot{q}_n(\omega_k, q_k, t); t) \\ &\quad (k=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (6.3.27)$$

显而易见, 有以下结果:

$$\frac{\partial F^*}{\partial \omega_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F^*}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} = \sum_{j=1}^n b_{jk} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{q}_j} \quad (k=1, \dots, n) \quad (6.3.28)$$

这就是函数对准速度的偏导数公式。由于 F 不可能显含根本没有定义的准坐标 π_1, \dots, π_n , 因此函数对准坐标的偏导数只是一个纯形式的规定:

$$\frac{\partial F^*}{\partial \pi_k} \triangleq \sum_{j=1}^n \frac{\partial F^*}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \omega_k} = \sum_{j=1}^n b_{jk} \frac{\partial F^*}{\partial q_j} \quad (k=1, \dots, n) \quad (6.3.29)$$

它相当于在 (6.3.28) 式中 ω_k 代之以 π_k , \dot{q}_j 代之以 q_j 后形成的关系, 当引入非完整约束后, (6.3.28) 及 (6.3.29) 式都只有 m 个这种关系。

如令

$$\omega_k = \dot{q}_k \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.3.30)$$

则有

$$\frac{\partial F^*}{\partial \pi_k} = \frac{\partial F^*}{\partial q_k} + \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial F^*}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.3.31)$$

或

$$\frac{\partial F^*}{\partial \pi_k} = \frac{\partial F^*}{\partial q_k} + \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial F^*}{\partial q_j} b_{jk} \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.3.32)$$

6.4 Чаплыгин 方程

1897 年 Чаплыгин 首先得到一种方程, 适用于有循环坐标的保守系统, 且限制约束是一阶线性、定常、有序的非完整型。1901 年 Воронеж 将 Чаплыгин 方程推广到一般的一阶线性非完整系统。1957 年 Новоселов 得到用准坐标表示的一阶非线性非完整系统方程, 具有很大的普遍性, 称为广义的 Чаплыгин 方程。以下我

们首先推导广义 Чаплыгин 方程, 其它几种方程都可作为它的推论导出。

6.4.1 广义 Чаплыгин 方程

(一) 设一阶非完整系统由广义坐标 q_1, \dots, q_n 描述。以广义坐标表示的 Lagrange 形式的 Jourdain 原理可表为

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta \dot{q}_j = 0 \quad (6.4.1)$$

结合约束条件取准速度为:

$$\left. \begin{aligned} \omega_k &= \omega_k(q_j, \dot{q}_j, t) & (k=1, \dots, m) \\ \omega_k &= \omega_k(q_j, \dot{q}_j, t) = 0 & (k=m+1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (6.4.2)$$

将(6.4.2)式反演后可得

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_s, \omega_k, t) \quad \left(\begin{array}{l} j, s=1, \dots, n \\ k=1, \dots, m \end{array} \right) \quad (6.4.3)$$

与 $\delta \dot{r}$ 空间相一致的变分给出以下关系:

$$\delta \dot{q}_j = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \omega_k \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.4.4)$$

将(6.4.4)式代入(6.4.1)式后, 得到

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \omega_k = 0 \quad (6.4.5)$$

由于各 $\delta \omega_k$ 现在是互相独立的, 于是我们有

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} = 0 \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.4.6)$$

这是一组和系统的自由度相一致的可转换到准坐标上去的方程, 通常称为 Maggi 方程, 这组方程是推导 Чаплыгин 系列方程和 Hamel 系列方程的基础。

用广义坐标表示的动能为

$$T = T(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) \quad (6.4.7)$$

用准坐标表示的动能为

$$\begin{aligned} T^* &= T(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1(q_j, \omega_k, t), \dots, \dot{q}_n(q_j, \omega_k, t); t) \\ &= T^*(q_1, \dots, q_n; \omega_1, \dots, \omega_m; t) \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

于是有以下关系:

$$\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.4.9)$$

对 t 求导后, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \right) \quad (k=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

由 (6.3.24) 式可知有以下关系

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} \quad (k=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

令

$$Q_k^* = \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.4.12)$$

这实际上是转换到准坐标上的广义力。将 (6.4.10) 至 (6.4.12) 三式代入 (6.4.6) 式后, 即得到广义的 Чаплыгин 方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} \right) = Q_k^* \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.4.13)$$

这是一组以准坐标表示的运动方程，其特点是适用于一阶非线性非完整系统，方程数和系统的自由度数相同。

(二) 如果取

$$\omega_k = \dot{q}_k \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.4.14)$$

则显然有

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} = 0 \quad \left(\begin{matrix} j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, m \end{matrix} \right) \quad (6.4.15)$$

令 \tilde{T} 为函数 T^* 中将 ω_k 代之以 \dot{q}_k 后之函数:

$$\tilde{T} = \tilde{T}(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m; t) \quad (6.4.16)$$

由(6.3.26)及(6.4.14)式可知

$$\frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.4.17)$$

此外，还有

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} - \sum_{s=m+1}^n \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{q}_k} \quad (6.4.18)$$

令

$$\begin{aligned} T_1^j &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} \\ &\quad - \sum_{s=m+1}^n \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{q}_k} \quad \left(\begin{matrix} j=m+1, \dots, n \\ k=1, \dots, m \end{matrix} \right) \end{aligned} \quad (6.4.19)$$

将(6.4.15)至(6.4.19)式代入(6.4.13)式，就得到以广义坐标表示的广义 Чаплыгин 方程:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_k} \\ &- \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} - \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_j} T_1^j = \bar{Q}_k \quad (k=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (6.4.20)$$

其中

$$\tilde{Q}_k = Q_k^*|_{\omega_k \rightarrow \dot{q}_k} = Q_k + \sum_{j=m+1}^n Q_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.4.21)$$

6.4.2 Чаплыгин 方程

(一) 以下限于讨论一阶线性非完整系统, 除了这个限制外, Чаплыгин 还限定约束是定常、保守的情形, 即

$$\dot{q}_j = \sum_{s=1}^m b_{js} \omega_s \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.4.22)$$

其中 b_{jk} 不显含时间 t 。此外, Чаплыгин 还限定系统含有 $n-m$ 个循环坐标 q_{m+1}, \dots, q_n , 即

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0 \quad (j=m+1, \dots, n) \quad (6.4.23)$$

且 b_{js} 中也不含这些坐标。

由(6.4.22)式可知

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} = \frac{\partial V}{\partial \pi_k} \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.4.24)$$

及

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} \\ &= \frac{d}{dt} b_{jk} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \omega_k} - \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \omega_k} \end{aligned} \quad (6.4.25)$$

但最后一项由于循环坐标的存在而恒为零。考虑到约束的定常性, 上式进一步化为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^m \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \omega_k}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \sum_{s=1}^m b_{is} \omega_s - \sum_{i=1}^m b_{ik} \sum_{s=1}^m \frac{\partial b_{js}}{\partial q_i} \omega_s \\
&= \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial \pi_s} - \frac{\partial b_{js}}{\partial \pi_k} \right) \omega_s
\end{aligned} \tag{6.4.26}$$

将(6.4.24)至(6.4.26)诸式代入广义 Чаплыгин 方程 (6.4.13) 后,即得到以准坐标表示的 Чаплыгин 方程:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \omega_k} - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_k} + \\
&+ \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial b_{js}}{\partial \pi_k} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial \pi_s} \right) \omega_s = 0 \quad (k=1, \dots, m)
\end{aligned} \tag{6.4.27}$$

其中

$$L^* = T^* - V \tag{6.4.28}$$

(二) 以下要用广义坐标表示 Чаплыгин 方程, 设非完整约束方程可表为

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^m B_{jk} \dot{q}_k \quad (j=m+1, \dots, n) \tag{6.4.29}$$

则显然应有

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j=m+1, \dots, n) \tag{6.4.30}$$

此外由(6.4.17)式

$$\begin{aligned}
T_k^j &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} - \sum_{s=m+1}^n \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{q}_k} \\
&= \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} \quad \left(\begin{array}{l} j=m+1, \dots, n \\ k=1, \dots, m \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{6.4.31}$$

这是由于 \dot{q}_j 不含循环坐标之故。进一步可将上式化为

$$\begin{aligned}
T_k^j &= \frac{d}{dt} B_{jk} - \sum_{s=1}^m \frac{\partial B_{js}}{\partial q_k} \dot{q}_s \\
&= \sum_{s=1}^m \frac{\partial B_{js}}{\partial q_s} \dot{q}_s - \sum_{s=1}^m \frac{\partial B_{js}}{\partial q_k} \dot{q}_s \quad \left(\begin{array}{l} j=m+1, \dots, n \\ k=1, \dots, m \end{array} \right)
\end{aligned}
\tag{6.4.32}$$

将以上诸式代入广义坐标表示之广义 Чаплыгин 方程后, 可得用广义坐标表示之 Чаплыгин 方程:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_k} - \\
&- \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial B_{js}}{\partial q_s} - \frac{\partial B_{js}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_s = 0 \quad (k=1, \dots, m)
\end{aligned}
\tag{6.4.33}$$

Чаплыгин 方程虽有以上所规定的一些限制, 但确有不少实际问题属于 Чаплыгин 情形, 因此 Чаплыгин 方程仍有相当广泛的实用价值, 而且 Чаплыгин 方程很容易推广到非保守系统。为此, 只要在准坐标表示的 Чаплыгин 方程(6.4.27) 及广义坐标表示的 Чаплыгин 方程(6.4.33)的右端分别补充以相应的非保守力 Q_k^* 及 \tilde{Q}_k 就行了。

方程(6.4.27)及方程(6.4.33)的数学结构比较简单, 但每列一个方程时非完整项中的圆括弧要计算 nm^2 个或 $m^2(n-m)$ 个, 常不如直接利用广义 Чаплыгин 方程(6.4.13)或(6.4.14)方便, 至少在某些问题中是如此。

例题 6.4.1 用 Чаплыгин 方程重新解 Чаплыгин-Carathéodory 问题。

解 广义坐标为 x_c, y_c 及 φ , 取准速度如下:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \cos \varphi \dot{x}_c + \sin \varphi \dot{y}_c \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \\ \omega_3 &= \dot{x}_c \operatorname{tg} \varphi - \dot{y}_c = 0 \end{aligned} \right\} \tag{a}$$

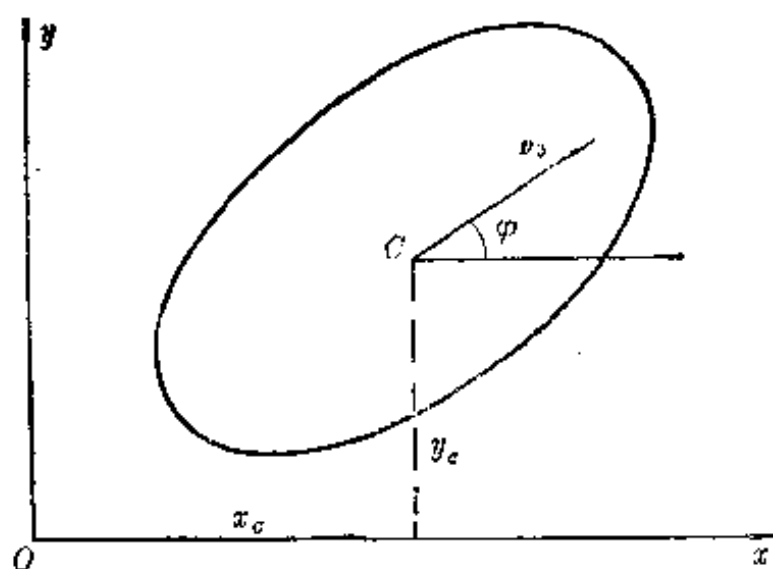


图 6.2

在本问题中 x_c 及 y_c 都是循环坐标，如取 \dot{x}_c 及 $\dot{\varphi}$ 为独立的广义速度，而作为与非独立速度 \dot{y}_c 相应的坐标 y_c 已经知道是循环坐标，此外，由(a)也易知系统是定常的，因此可按 Чаплыгин 方程 (6.4.27) 求解，这将留给读者去完成。本书拟按更一般形式的广义 Чаплыгин 方程求解，读者可比较两种格式的优劣。

将(a)反演后，可得：

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{\varphi} \\ \dot{y}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 \\ 0 & 1 \\ \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

以广义坐标及准坐标表示的动能分别为：

$$T = \frac{M}{2} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{I_c}{2} \dot{\varphi}^2 \quad (c)$$

$$T^* = \frac{M}{2} \omega_1^2 + \frac{I_c}{2} \omega_2^2 \quad (d)$$

以下计算广义 Чаплыгин 方程中的非完整项：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{x}_C}{\partial \omega_1} - \frac{\partial \dot{x}_C}{\partial \pi_1} \right) &= -M\omega_1 \phi \sin \varphi \cos \varphi \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \omega_1} - \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \pi_1} \right) &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_C} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{y}_C}{\partial \omega_1} - \frac{\partial \dot{y}_C}{\partial \pi_1} \right) &= M\omega_1 \phi \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{x}_C}{\partial \omega_2} - \frac{\partial \dot{x}_C}{\partial \pi_2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \omega_2} - \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \pi_2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_C} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{y}_C}{\partial \omega_2} - \frac{\partial \dot{y}_C}{\partial \pi_2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

将(d)、(e)、(f)诸式代入准坐标形式的广义 Чаплыгин 方程(6.4.13)后可得:

$$M\dot{\omega}_1 = F, \quad I_C \dot{\omega}_2 = L_C \quad (g)$$

可见,由于准速度的适当选择(指 ω_1 及 ω_2),可以使得用准速度表示的运动方程极为简单,方程组(g)极易积分。求得 ω_1 及 ω_2 后,代入方程(b)即可求得广义速度 \dot{x}_C 、 \dot{y}_C 及 $\dot{\phi}$,进一步积分可求得广义坐标 x_C 、 y_C 及 ϕ 。

例题 6.4.2 一半径为 a ,质量为 m 的均质球在粗糙水平面上作无滑动滚动,试列出在任意外力作用下球的运动方程。

解 在球心 C 取坐标系 $Cx_1y_1z_1$ 保持和 $Oxyz$ 相平行,取球心坐标 x_C 、 y_C 及欧拉角 ψ 、 φ 、 θ 为广义坐标,取准坐标如下:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \\ \omega_2 &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \\ \omega_4 &= \dot{x}_C - a(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) = 0 \\ \omega_5 &= \dot{y}_C + a(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

其中 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 为球体角速度在 $Cx_1y_1z_1$ 各轴上之投影, ω_4 、 ω_5 恒

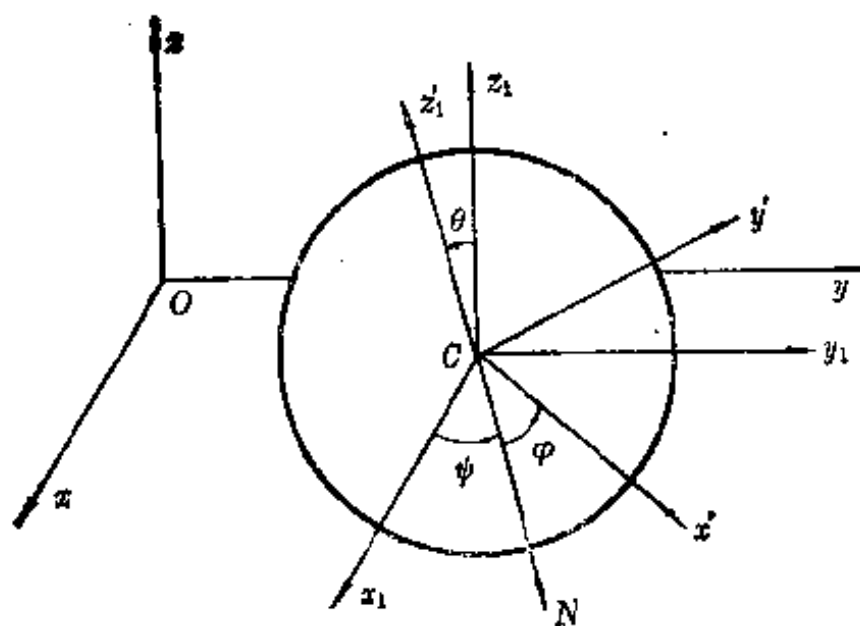


图 6.3

等于零表示了球和水平面的接触点速度为零的约束条件, 将(a)反演后可得:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega_1 \cos \psi + \omega_2 \sin \psi \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{\sin \theta} (\omega_1 \sin \psi - \omega_2 \cos \psi) \\ \dot{\psi} &= \omega_3 - \operatorname{ctg} \theta (\omega_1 \sin \psi - \omega_2 \cos \psi) \\ \dot{x}_C &= a \omega_2 \\ \dot{y}_C &= -a \omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

球体的动能为

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m a^2 (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \theta) \quad (c)$$

上式用准速度表达为

$$T^* = \frac{1}{2} m \left[\frac{7}{5} a^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{2}{5} a^2 \omega_3^2 \right] \quad (d)$$

现在将 $\theta, \varphi, \psi, x_C, y_C$ 依次代表 q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 , 用(b)可排列出系数 $b_{j\dot{k}}$ 如下:

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= \cos \psi, & b_{12} &= \sin \psi, & b_{13} &= 0 \\ b_{21} &= \frac{\sin \psi}{\sin \theta}, & b_{22} &= -\frac{\cos \psi}{\sin \theta}, & b_{23} &= 0 \\ b_{31} &= -\operatorname{ctg} \theta \sin \psi, & b_{32} &= \operatorname{ctg} \theta \cos \psi, & b_{33} &= 1 \\ b_{41} &= 0, & b_{42} &= a, & b_{43} &= 0 \\ b_{51} &= -a, & b_{52} &= 0, & b_{53} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

按以下公式计算 b_{jk} 对“准坐标的偏导数”:

$$\frac{\partial b_{jk}}{\partial \pi_s} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \omega_s} \quad (f)$$

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial \pi_1} = -\sin^2 \psi \operatorname{ctg} \theta$$

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial \pi_2} = -\sin \psi \operatorname{ctg} \theta \cos \psi$$

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial \pi_3} = -\sin \psi$$

$$\frac{\partial b_{12}}{\partial \pi_1} = -\cos \psi \operatorname{ctg} \theta \sin \psi$$

$$\frac{\partial b_{12}}{\partial \pi_2} = \cos \psi \operatorname{ctg} \theta \cos \psi$$

$$\frac{\partial b_{12}}{\partial \pi_3} = \cos \psi$$

$$\frac{\partial b_{21}}{\partial \pi_1} = -\frac{\sin \psi}{\sin^2 \theta} \cos \theta \cos \psi - \frac{\cos \psi}{\sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \sin \psi$$

$$\frac{\partial b_{21}}{\partial \pi_2} = -\frac{\sin^2 \psi}{\sin^2 \theta} \cos \theta - \frac{\cos \psi}{\sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \cos \psi$$

$$\frac{\partial b_{21}}{\partial \pi_3} = \frac{\cos \psi}{\sin \theta}$$

$$\frac{\partial b_{22}}{\partial \pi_1} = \frac{\cos^2 \psi}{\sin^2 \theta} \cos \theta - \frac{\sin^2 \psi}{\sin \theta} \operatorname{ctg} \theta$$

$$\frac{\partial b_{22}}{\partial \pi_2} = \frac{\cos \psi}{\sin^2 \theta} \cos \theta \sin \psi + \frac{\sin \psi}{\sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \cos \psi$$

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial b_{22}}{\partial \pi_3} &= \frac{\sin \psi}{\sin \theta} \\
\frac{\partial b_{31}}{\partial \pi_1} &= \frac{\sin \psi}{\sin^2 \theta} \cos \psi - \cos \psi \operatorname{ctg}^2 \theta \sin \psi \\
\frac{\partial b_{31}}{\partial \pi_2} &= \frac{\sin \psi}{\sin^2 \theta} \sin \psi + \cos \psi \operatorname{ctg}^2 \theta \cos \psi \\
\frac{\partial b_{31}}{\partial \pi_3} &= -\cos \psi \operatorname{ctg} \theta \\
\frac{\partial b_{32}}{\partial \pi_1} &= -\frac{\cos^2 \psi}{\sin^2 \theta} + \operatorname{ctg}^2 \theta \sin^2 \psi \\
\frac{\partial b_{32}}{\partial \pi_2} &= -\frac{\cos \psi}{\sin^2 \theta} \sin \psi - \operatorname{ctg}^2 \theta \sin \psi \cos \psi \\
\frac{\partial b_{32}}{\partial \pi_3} &= -\operatorname{ctg} \theta \sin \psi
\end{aligned} \right\} \quad (g)$$

所有其余偏导数皆为零。由以上各式可求非完整项中的 $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial b_{js}}{\partial \pi_i} - \frac{\partial b_{ji}}{\partial \pi_s} \right) \omega_s$ 如下:

$$\left. \begin{aligned}
\sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial b_{1s}}{\partial \pi_1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial \pi_s} \right) \omega_s &= \sin \psi \omega_3 \\
\sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial b_{2s}}{\partial \pi_1} - \frac{\partial b_{21}}{\partial \pi_s} \right) \omega_s &= -\omega_3 \frac{\cos \psi}{\sin \theta} \\
\sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial b_{3s}}{\partial \pi_1} - \frac{\partial b_{31}}{\partial \pi_s} \right) \omega_s &= -\omega_2 + \omega_3 \operatorname{ctg} \theta \cos \psi \\
\sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial b_{4s}}{\partial \pi_1} - \frac{\partial b_{41}}{\partial \pi_s} \right) \omega_s &= \sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial b_{5s}}{\partial \pi_1} - \frac{\partial b_{51}}{\partial \pi_s} \right) \omega_s = 0
\end{aligned} \right\} \quad (h)$$

所以有

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial b_{js}}{\partial \pi_1} - \frac{\partial b_{j1}}{\partial \pi_s} \right) \omega_s$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{5}ma^2(\omega_1 \cos \psi + \omega_2 \sin \psi) \sin \psi \omega_3 + \\
&\quad + \frac{2}{5}ma^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} (\omega_1 \sin \psi - \omega_2 \cos \psi) + \omega_3 \cos \theta - \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{ctg} \theta \cos \theta (\omega_1 \sin \psi - \omega_2 \cos \psi) \right] \left(-\frac{\cos \psi}{\sin \theta} \omega_3 \right) + \\
&\quad + \frac{2}{5}ma^2 \omega_3 (-\omega_2 + \omega_3 \operatorname{ctg} \theta \cos \psi) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{i}$$

类似的计算表明

$$\sum_{j=1}^5 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial b_{js}}{\partial \pi_2} - \frac{\partial b_{j2}}{\partial \pi_s} \right) \omega_s = 0 \tag{j}$$

$$\sum_{j=1}^5 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial b_{js}}{\partial \pi_3} - \frac{\partial b_{j3}}{\partial \pi_s} \right) \omega_s = 0 \tag{k}$$

设作用在球体上广义力为 m_x 、 m_y 、 m_z 、 F_x 及 F_y (外力主矩在 CN 、 Cz' 、 Cz 上的投影及外力主向量在 Cx 及 Cy 轴上的投影), 则对应于准坐标的广义力可按以下公式计算:

$$Q_k^* = \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} = \sum_{j=1}^n b_{jk} Q_j \tag{l}$$

结果为

$$\left. \begin{aligned} Q_1^* &= m_x \cos \psi + m_y \frac{\sin \psi}{\sin \theta} - m_z \operatorname{ctg} \theta \sin \psi - aF_y \\ Q_2^* &= m_x \sin \psi - m_y \frac{\cos \psi}{\sin \theta} + m_z \operatorname{ctg} \theta \cos \psi + aF_x \end{aligned} \right\} \tag{m}$$

$$Q_3^* = m_z$$

读者可以自行证明, 上式相当于

$$\left. \begin{aligned} Q_1^* &= m_x - aF_y \\ Q_2^* &= m_y + aF_x \\ Q_3^* &= m_z \end{aligned} \right\} \tag{n}$$

其中 m_x, m_y, m_z 分别为外力对 Cx, Cy, Cz 三轴的主矩, Чаплыгин 方程最后给出:

$$\left. \begin{aligned} \frac{7}{5}ma^2\dot{\omega}_1 &= m_x - aF_y \\ \frac{7}{5}ma^2\dot{\omega}_2 &= m_y + aF_x \\ \frac{2}{5}ma^2\dot{\omega}_3 &= m_z \end{aligned} \right\} \quad (o)$$

现在讨论一种特殊情况下的解, 设球体不受任何主动力作用, 则在任意初始条件下的解为:

$$\omega_1 = \text{常数}, \omega_2 = \text{常数}, \omega_3 = \text{常数} \quad (p)$$

此外由 (b) 可知

$$\dot{x}_c = a\omega_2 = \text{常数}, \dot{y}_c = -a\omega_1 = \text{常数} \quad (q)$$

由此可知, 不受主动力时三个角速度 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 及二个线速度 \dot{x}_c, \dot{y}_c 均保持常数。

经过比较, 本题没有选用广义 Чаплыгин 方案, 因为计算太繁, 但在普通型 Чаплыгин 方案中, 仍需求 18 个偏导数, 45 个圆括弧, 计算量仍相当可观, 循环坐标愈多时用本法愈有利。

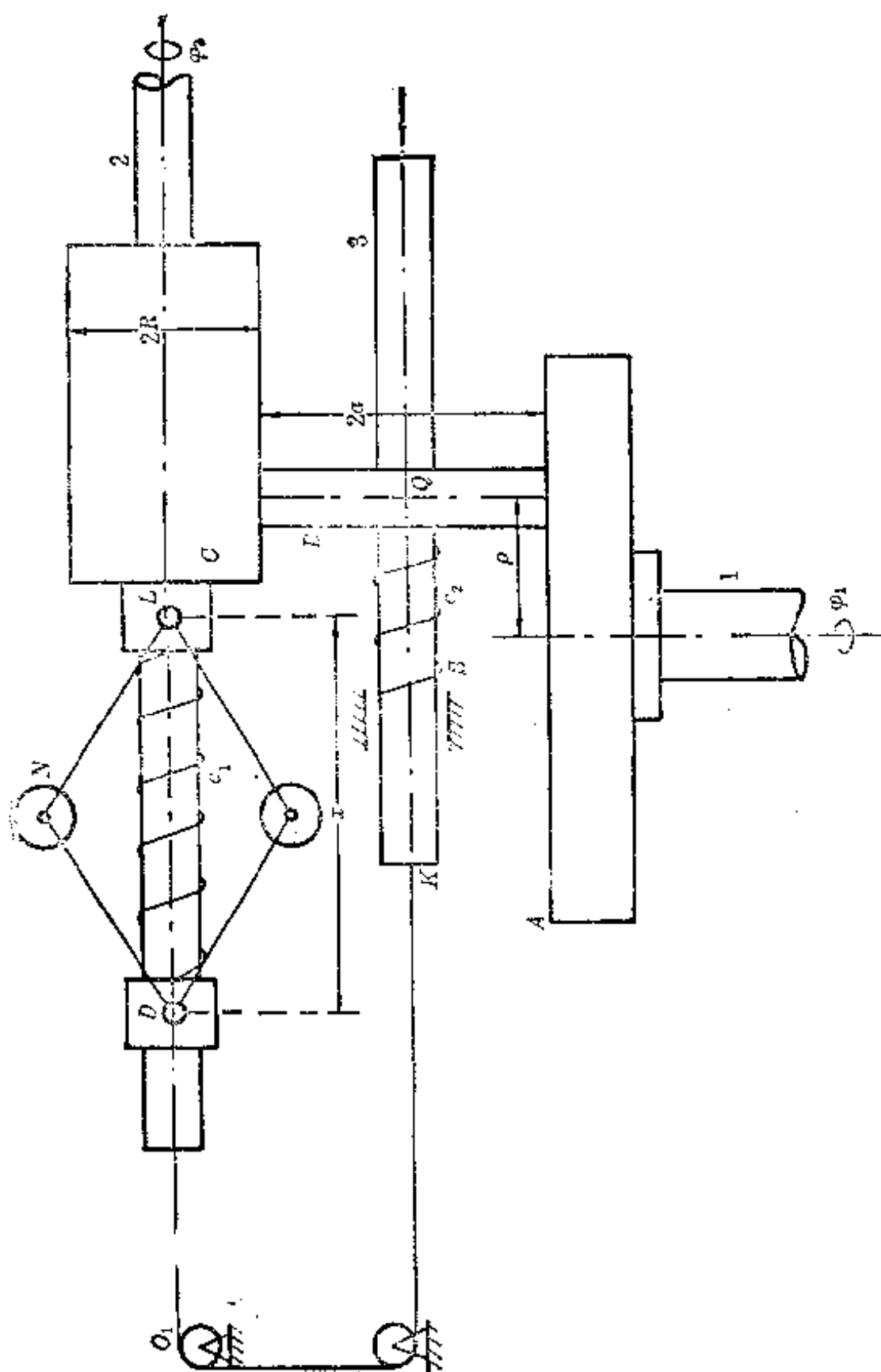
例题 6.4.3 一摩擦调节器如图所示。固定在轴 1 上的圆盘通过摩擦轮 B 传递运动到固定在轴 2 的鼓轮上, 摩擦轮活动地套在不转动的轴 3 上, 但它和轴 3 的联结点固定的, 轴 2 上联结一个飞球调速器, 当轴 2 的角速度 φ_2 增加时, 调速器滑块向右移, 同时借助于不可伸长的柔索带动轴 3 及摩擦轮向左移, 于是由轴 1 传递的角速度相应减小而自动调节。

已知: I_A ——圆盘 A 的转动惯量

I_C ——鼓轮 C 的转动惯量

I_B ——摩擦轮 B 的转动惯量

m_B ——摩擦轮 B 的质量



m_N ——每个飞球的质量

m_D ——滑块 D 的质量

c_1 ——调速器弹簧刚度

c_2 ——摩擦轮弹簧刚度

l ——调速器每杆长度

R ——鼓轮半径

a ——摩擦轮半径

试列出此系统的运动微分方程*。

解 由于柔索不可伸长,故有以下关系:

$$dx = d\rho \quad (a)$$

其中 x 为滑块 D 至 L 点间距离, ρ 为摩擦轮中心线至轴 1 的距离。

将上式积分可得:

$$x - \rho = C$$

其中 C 为常数,且易知 C 可确定如下:

$$C = \overline{O_1L} + \overline{O_2S} - \overline{KQ} - L \quad (c)$$

其中 L 为柔索之全长,摩擦轮传动的运动学关系为:

$$(x - C)\dot{\varphi}_1 = R\dot{\varphi}_2 \quad (d)$$

这是不可积分的微分约束,因而是属于一阶线性有序非完整系统,确定此系统的位形需用三个广义坐标 φ_1, φ_2, x 描述,但由于存在一个非完整约束(d),因而系统有两个自由度,我们注意到约束方程中不显含 φ_1 ,同时系统的 Lagrange 函数也不显含 φ_1 (下面将会看到),因之可选 φ_2 及 \dot{x} 作为独立的广义速度。

传动轮系的动能为

$$T' = \frac{1}{2}I_A\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}(I_O\dot{\varphi}_2^2 + m_B\dot{\rho}^2) + \frac{1}{2}I_B\frac{R^2}{a^2}\dot{\varphi}_2^2$$

* 见参考文献[48]

$$= \frac{1}{2} \left(I_A \dot{\phi}_1^2 + I_C \dot{\phi}_2^2 + m_B \dot{x}^2 + I_B \frac{R^2}{a^2} \dot{\phi}_2^2 \right) \quad (e)$$

调速系统的动能为

$$T'' = \frac{1}{2} \cdot 2m_N \left(l^2 - \frac{x^2}{4} \right) \dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m_N l^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_D \dot{x}^2 \quad (f)$$

其中 α 为 LN 与 LD 之间的夹角。由于

$$\dot{x} = -2l \sin \alpha \dot{\alpha} \quad (g)$$

故有

$$T'' = m_N \left(l^2 - \frac{x^2}{4} \right) \dot{\phi}_2^2 + m_N \frac{l^2 \dot{x}^2}{4l^2 - x^2} + \frac{1}{2} m_D \dot{x}^2 \quad (h)$$

系统的总动能为

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} I_A \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} \left(I_C + I_B \frac{R^2}{a^2} \right) \dot{\phi}_2^2 + m_N \left(l^2 - \frac{x^2}{4} \right) \dot{\phi}_2^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left(m_B + m_D + m_N \frac{2l^2}{4l^2 - x^2} \right) \dot{x}^2 \end{aligned} \quad (i)$$

将约束条件 (d) 代入后, 可得

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} [I(x) \dot{\phi}_2^2 + m(x) \dot{x}^2] \quad (j)$$

其中

$$I(x) = I_A \frac{R^2}{(x-C)^2} + I_C + I_B \frac{R^2}{a^2} + \frac{1}{2} m_N (4l^2 - x^2) \quad (k)$$

$$m(x) = m_B + m_D + \frac{2m_N l^2}{4l^2 - x^2} \quad (l)$$

现在来求广义力。假定在系统的某平稳运动状态 ϕ_2^0 及 x_0 为常值时, 弹簧 c_1 及 c_2 的变形分别为 δ_1 及 $-\delta_2$ (c_1 预受拉, c_2 预受压)。于是在偏离平稳状态时的变形分别为

$$\xi_1 = \delta_1 + x - x_0, \quad \xi_2 = -\delta_2 + x - x_0 \quad (m)$$

弹簧势能为

$$V = \frac{1}{2} c_1 (\delta_1 + x - x_0)^2 + \frac{1}{2} c_2 (-\delta_2 + x - x_0)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(c_1 + c_2)(x - x_0)^2 + (c_1\delta_1 - c_2\delta_2)(x - x_0) \\
&+ \frac{1}{2}(c_1\delta_1^2 + c_2\delta_2^2)
\end{aligned} \tag{n}$$

作用在轴 1 及轴 2 上的力矩 m_1 及 m_2 的元功为

$$\delta' W = m_1 \delta \varphi_1 + m_2 \delta \varphi_2 = \left(m_1 \frac{R}{x - C} + m_2 \right) \delta \varphi_2 \tag{o}$$

由 (n)、(o) 可知广义力为

$$\left. \begin{aligned} Q_{\varphi_2} &= m_1 \frac{R}{x - C} + m_2 \\ Q_x &= -(c_1 + c_2)(x - x_0) - (c_1\delta_1 - c_2\delta_2) \end{aligned} \right\} \tag{p}$$

以下是求非完整项, 取 $q_1 = \varphi_2$, $q_2 = x$, $q_3 = \varphi_1$, 其中 q_3 为非独立坐标, 于是由 (d) 可知:

$$B_{31} = \frac{R}{x - C}, \quad B_{32} = 0 \tag{q}$$

按广义坐标下的 Чаплыгин 方程, 非完整项的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \sum_{s=1}^2 \left(\frac{\partial B_{31}}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial B_{33}}{\partial \dot{q}_1} \right) \dot{q}_s &= -I_A \frac{R^2}{(x - C)^3} \dot{\varphi}_2 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \sum_{s=1}^2 \left(\frac{\partial B_{32}}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial B_{33}}{\partial \dot{q}_2} \right) \dot{q}_s &= I_A \frac{R^2}{(x - C)^3} \dot{\varphi}_2^2 \end{aligned} \right\} \tag{r}$$

此外尚需计算下列各项

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \frac{d}{dt} \left[I_A \frac{R^2}{(x - C)^2} + I_C + I_B \frac{R^2}{a^2} + \frac{1}{2} m_N (4l^2 - x^2) \right] \dot{\varphi}_2 \\ &= I(x) \ddot{\varphi}_2 - \left[\frac{2I_A R^2}{(x - C)^3} + m_N x \right] \dot{\varphi}_2 \dot{x} \end{aligned} \tag{s}$$

其中 $I(x)$ 的内容见 (k) 式。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt} \left[m_B + m_D + \frac{2m_N l^2}{(4l^2 - x^2)} \right] \dot{x} \\ &= m(x) \ddot{x} + \frac{4m_N l^2 x}{4l^2 - x^2} \dot{x}^2 \end{aligned} \tag{t}$$

$$-\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left[-\frac{2R^2}{(x-C)^3} - m_N x \right] \varphi_2^2 - \frac{m_N l^2 \dot{x}^2}{4l^2 - x^2} \cdot 2x \quad (u)$$

将(p)、(r)、(s)、(t)、(u) 诸式代入广义坐标下的 Чаплыгин 方程 (6.4.33), 可得系统的运动微分方程如下:

$$\left. \begin{aligned} I(x)\ddot{\varphi}_2 - \left[\frac{I_A R^2}{(x-C)^3} + m_N x \right] \dot{x} \varphi_2 &= m_1 \frac{R}{x-C} + m_2 \\ m(x)\ddot{x} + \frac{1}{2} m_N x \varphi_2^2 + \frac{2l^2 x}{(4l^2 - x^2)^2} m_N \dot{x}^2 + \\ (c_1 + c_2)(x - x_0) &= -c_1 \delta_1 + c_1 \delta_2 \end{aligned} \right\} \quad (v)$$

分析以上各例题可以看出, 符合 Чаплыгин 条件的系统在工程中并不罕见, 而在非完整约束较少, 且系统自由度数也较少 (如例题 6.4.1 及例题 6.4.3) 的情形下, Чаплыгин 方程不失为建立运动方程的一种简便易行的方法, 但当非完整约束稍多, 且系统自由度也较多时 (如例题 6.4.2), 用 Чаплыгин 方程建立运动方程时消耗在非完整项上的计算工作量将急剧增长, 因之尚须寻求其它更有效的方法。

还应指出, Чаплыгин 方程可以表示成准坐标及广义坐标两种形式, 可以根据需要灵活选择, 而这个优点并非所有其它形式方程都具备的, 读者看下节便知。

6.5 Boltzmann-Hamel 方程

6.5.1 一阶非线性非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程

Boltzmann-Hamel 方程是用准坐标表示的运动方程, 也是完整系统的 Euler-Lagrange 方程的推广。

从准坐标表示的 Jourdain 原理出发:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \omega_k = 0 \quad (6.5.1)$$

令 T^* 为动能 T 转换为速度的表达式, 即

$$T^* = T^*(q_1, \dots, q_n; \omega_1, \dots, \omega_n; t) \quad (6.5.2)$$

则有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.5.3)$$

将上式对 t 求导, 可得:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{r=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \right) \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{r=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.5.4)$$

注意

$$\sum_{r=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \right) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \right) \quad (6.5.5)$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} &= \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \\ &= \sum_{r=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

令

$$P_k^* = \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \quad (6.5.7)$$

则 Jourdain 原理可化为:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - P_k^* \right] \\ \cdot \delta \omega_k = 0 \end{aligned} \quad (6.5.8)$$

现在引入一阶非线性非完整约束, 设约束方程为

$$\omega_k = f_k(q_j, \dot{q}_j, t) = 0 \quad \left(\begin{matrix} k = m+1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{matrix} \right) \quad (6.5.9)$$

則必有

$$\delta\omega_k = 0 \quad (k = m+1, \dots, n) \quad (6.5.10)$$

由剩下的 $\delta\omega_k (k=1, \dots, m)$ 的独立性可得到一阶非线性非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程如下:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \omega_r}{\partial q_j} \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} = P_k^* \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.5.11)$$

注意, 方程中含 $\frac{\partial T^*}{\partial \omega_r}$ 之项需待求出导数后才能引用约束条件 (6.5.9) 式。

6.5.2 一阶线性非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程

对于一阶线性非完整系统, 约束方程有以下形式:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j + a_k = 0 \quad (k = m+1, \dots, n) \quad (6.5.12)$$

准速度与广义速度间有以下关系:

$$\left. \begin{aligned} \omega_r &= \sum_{i=1}^n a_{ri} \dot{q}_i + a_r \quad (r=1, \dots, m) \\ \omega_r &= \sum_{i=1}^n a_{ri} \dot{q}_i + a_r = 0 \quad (r=m+1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (6.5.13)$$

前一组关系可以任选, 后一组关系由约束方程 (6.5.12) 而定。将 (6.5.13) 式反演后, 得到

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^m b_{ik} \omega_k + b_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (6.5.14)$$

利用 (6.5.13) 及 (6.5.14) 式可得:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \omega_r}{\partial q_j} \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{da_{rj}}{dt} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{ri}}{\partial q_j} \dot{q}_i - \frac{\partial a_r}{\partial q_j} \right) b_{jk} \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{rj}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial a_r}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{ri}}{\partial q_j} \dot{q}_i - \frac{\partial a_r}{\partial q_j} \right) b_{jk} \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial a_{rj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ri}}{\partial q_j} \right) b_{is} b_{jk} \omega_s + \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_{rj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ri}}{\partial q_j} \right) b_i b_{jk} + \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial a_{rj}}{\partial t} - \frac{\partial a_r}{\partial q_j} \right) b_{jk} \quad (6.5.15)
\end{aligned}$$

令

$$\gamma_{sk}^r \triangleq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_{rj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ri}}{\partial q_j} \right) b_{is} b_{jk} \quad (6.5.16)$$

$$e_k^r \triangleq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_{rj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ri}}{\partial q_j} \right) b_i b_{jk} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial a_{rj}}{\partial t} - \frac{\partial a_r}{\partial q_j} \right) b_{jk} \quad (6.5.17)$$

将(6.5.15)至(6.5.17)式代入方程(6.5.11)后,即得到一阶线性非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m \gamma_{sk}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_s + \sum_{r=1}^n e_k^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} = P_k^* \\
& (k=1, \dots, m) \quad (6.5.18)
\end{aligned}$$

对于定常约束, e_k^r 恒等于零, 方程(6.5.18)简化为以下形式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m \gamma_{sk}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_s = P_k^* \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.5.19)$$

其中记号 γ_{sk}^r 在第三章中就已提到过, 是所谓的 Boltzmann 三标记号, 显而易见, 完整系统的 Euler-Lagrange 方程和非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程有相同的数学形式。

6.5.3 γ_{sk}^r 及 ϵ_k^r 的求法

为了列出 Boltzmann-Hamel 方程, 关键在于求出参数 γ_{sk}^r 及 ϵ_k^r 。完全按照 (6.5.16) 及 (6.5.17) 式去计算将不胜其繁, 以下将会看到, 直接展开准坐标的 d - δ 交换差关系可以比较容易得到 γ_{sk}^r 及 ϵ_k^r 。

由准坐标与广义坐标之间的关系

$$\omega_r = \omega_r(q_j, \dot{q}_j, t) \quad \begin{pmatrix} j=1, \dots, n \\ r=1, \dots, n \end{pmatrix} \quad (6.5.20)$$

并假定其 Jacobi 行列式不为零:

$$\frac{\partial(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)}{\partial(q_1, q_2, \dots, q_n)} \neq 0 \quad (6.5.21)$$

可解出

$$\dot{q}_r = \dot{q}_r(q_j, \omega_r, t) \quad \begin{pmatrix} j=1, \dots, n \\ r=1, \dots, n \end{pmatrix} \quad (6.5.22)$$

由 (6.5.20) 及 (6.5.22) 式并利用 Четаев 定义, 坐标变分将满足以下关系

$$\delta \pi_r = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \quad (r=1, \dots, n) \quad (6.5.23)$$

$$\delta q_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \pi_k \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.5.24)$$

将(6.5.23)式求导,并对(6.5.20)式取变分,可得:

$$\frac{d}{dt}(\delta\pi_r) = \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial\omega_r}{\partial\dot{q}_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial\omega_r}{\partial\dot{q}_j} \frac{d}{dt} \delta q_j \quad (6.5.25)$$

$$\delta\omega_r = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\omega_r}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial\omega_r}{\partial\dot{q}_j} \delta\dot{q}_j \quad (6.5.26)$$

将(6.5.24)式的 δq_j 表达式代入以上两式,再相减即有以下关系:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta\pi_r) - \delta\omega_r = & \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial\omega_r}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial\omega_r}{\partial q_j} \right) \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\omega_k} \delta\pi_k + \\ & + \sum_{j=1}^n \frac{\partial\omega_r}{\partial\dot{q}_j} \left[\frac{d}{dt} \delta q_j - \delta\dot{q}_j \right] \end{aligned} \quad (6.5.27)$$

现在引入非完整约束条件,后面 $(n-m)$ 个 ω_r 按约束条件应有

$$\omega_r = 0 \quad (r = m+1, \dots, n) \quad (6.5.28)$$

相应地有

$$\delta\pi_r = 0 \quad (r = m+1, \dots, n) \quad (6.5.29)$$

于是由(6.5.27)式给出非完整系统中准坐标的“d- δ ”交换差公式:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta\pi_r) - \delta\omega_r = & \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial\omega_r}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial\omega_r}{\partial q_j} \right) \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\omega_k} \delta\pi_k + \\ & + \sum_{j=1}^n \frac{\partial\omega_r}{\partial\dot{q}_j} \left[\frac{d}{dt} \delta q_j - \delta\dot{q}_j \right] \end{aligned} \quad (6.5.30)$$

但由(6.5.15)至(6.5.17)式我们知道一阶线性非完整系统中有以下关系:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial\omega_r}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial\omega_r}{\partial q_j} \right) \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\omega_k} = \sum_{s=1}^m \gamma_{sk}^r \omega_s + e_k^r \quad (6.5.31)$$

所以准坐标的“d- δ ”交换差关系(6.5.30)成为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta\pi_r) - \delta\omega_r = & \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^m \gamma_{sk}^r \omega_s \delta\pi_k + \sum_{k=1}^m e_k^r \delta\pi_k + \\ & + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{d}{dt} \delta q_j - \delta \dot{q}_j \right] \quad (r=1, \dots, m) \quad (6.5.32) \end{aligned}$$

可见, 只要列出准坐标的“d- δ ”交换差关系式, 其中 $\omega_s \delta\pi_k$ 的系数就是 γ_{sk}^r , $\delta\pi_k$ 的系数就是 e_k^r 。当约束是定常约束时, e_k^r 项恒为零, 最后一项与 γ_{sk}^r 及 e_k^r 无关, 可以不必写出其具体内容以节省运算。

例题 6.5.1 用 Boltzmann-Hamel 方程重新解圆球在粗糙平面上的滚动问题

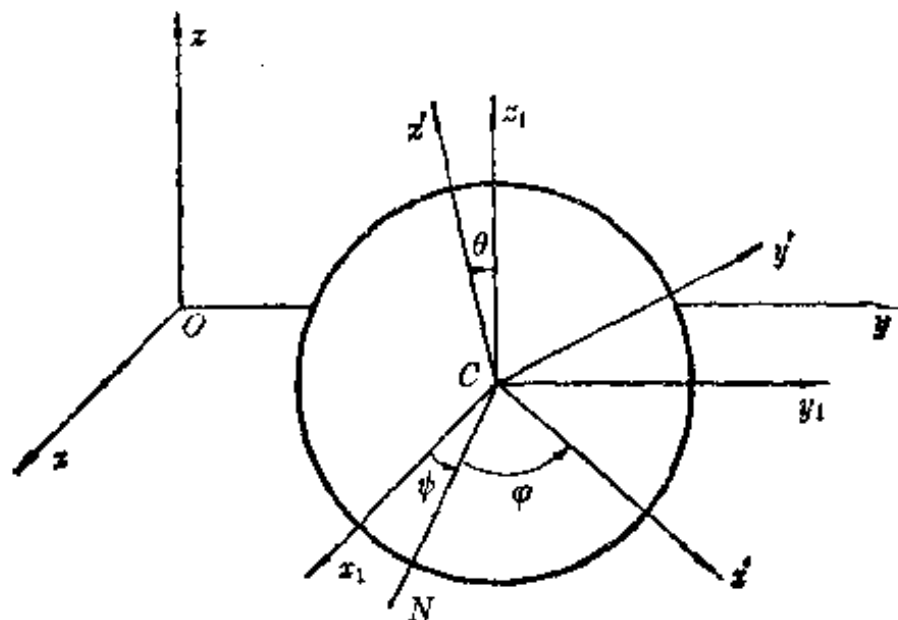


图 6.5

解 在球心 C 取坐标系 $Cx_1y_1z_1$ 保持和 $Oxyz$ 相平行, 取球心坐标 x_c, y_c 及欧拉角 ψ, θ, φ 为广义坐标, 取准坐标如下:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \\ \omega_2 &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \\ \omega_4 &= \dot{x}_c - a(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) = 0 \\ \omega_5 &= \dot{y}_c + a(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

其中 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 为球体角速度在 $Cx_1y_1z_1$ 各轴上之投影, ω_4, ω_5 恒等于零表示了这样的约束条件: 球和水平面的接触点速度为零。

将(a)反演后可得:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \omega_1 \cos \psi + \omega_2 \sin \psi \\ \phi &= \frac{1}{\sin \theta} (\omega_1 \sin \psi - \omega_2 \cos \psi) \\ \dot{\psi} &= \omega_3 - \cotg \theta (\omega_1 \sin \psi - \omega_2 \cos \psi) \\ \dot{x}_c &= \omega_4 + a\omega_2 \\ \dot{y}_c &= \omega_5 - a\omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

球体的动能为

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m a^2 (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta) \quad (c)$$

将(b)代入后, 可得用准速度表示的动能:

$$T^* = \frac{1}{2} m \left[\frac{7}{5} a^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{2}{5} a^2 \omega_3^2 + 2a\omega_2\omega_4 - 2a\omega_1\omega_5 + \omega_4^2 + \omega_5^2 \right] \quad (d)$$

注意此时尚不能令 $\omega_4 = \omega_5 = 0$, 需待求得导数 $\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}$ 后才能嵌入约束条件。

现在列出准坐标的“d- δ ”交换差关系式, 由(a)及(b)可知

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta \pi_1) &= \frac{d}{dt}(\delta \theta \cos \psi + \delta \phi \sin \theta \sin \psi) \\ &= -\delta \theta \sin \psi \dot{\psi} + \delta \phi \cos \theta \sin \psi \dot{\theta} \\ &\quad + \delta \phi \sin \theta \cos \psi \dot{\psi} + (\dots) \\ &= -\delta \pi_2 \dot{\psi} + \delta \psi \cos \theta \sin \psi \dot{\theta} + (\dots) \end{aligned} \quad (e)$$

$$\begin{aligned} \delta \omega_1 &= \delta(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) \\ &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \cos \theta \sin \psi \delta \theta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \delta \psi + (\dots) \\ &= -\omega_2 \delta \psi + \dot{\phi} \cos \theta \sin \psi \delta \theta + (\dots) \end{aligned} \quad (f)$$

将(e)、(f)两式相减可得:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\delta\pi_1) - \delta\omega_1 &= \omega_2\delta\psi - \delta\pi_2\dot{\psi} + \cos\theta\sin\psi(\theta\delta\varphi - \dot{\varphi}\delta\theta) + (\dots) \\
&= \omega_2[\delta\pi_3 - \operatorname{ctg}\theta(\delta\pi_1\sin\psi - \delta\pi_2\cos\psi)] - \\
&\quad - [\omega_3 - \operatorname{ctg}\theta(\omega_1\sin\psi - \omega_2\cos\psi)]\delta\pi_2 + \\
&\quad + \cos\theta\sin\psi[(\omega_1\cos\psi - \omega_2\sin\psi) \\
&\quad \cdot \frac{1}{\sin\theta}(\delta\pi_1\sin\psi - \delta\pi_2\cos\psi) - \\
&\quad - \frac{1}{\sin\theta}(\omega_1\sin\psi - \omega_2\cos\psi) \\
&\quad \cdot (\delta\pi_1\cos\psi + \delta\pi_2\sin\psi)] + (\dots) \quad (g)
\end{aligned}$$

经化简后可得:

$$\frac{d}{dt}(\delta\pi_1) - \delta\omega_1 = \omega_2\delta\pi_3 - \omega_3\delta\pi_2 + (\dots) \quad (h)$$

类似的运算可求得其余的“d-δ”交换差式:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\delta\pi_2) - \delta\omega_2 &= \omega_3\delta\pi_1 - \omega_1\delta\pi_3 + (\dots) \\
\frac{d}{dt}(\delta\pi_3) - \delta\omega_3 &= \omega_1\delta\pi_2 - \omega_2\delta\pi_1 + (\dots) \\
\frac{d}{dt}(\delta\pi_4) - \delta\omega_4 &= -a\omega_3\delta\pi_1 + a\omega_1\delta\pi_3 + (\dots) \\
\frac{d}{dt}(\delta\pi_5) - \delta\omega_5 &= a\omega_2\delta\pi_3 - a\omega_3\delta\pi_2 + (\dots)
\end{aligned} \right\} \quad (i)$$

由以上诸式立即可求得 Boltzmann 三标记号如下:

$$\left. \begin{aligned}
\gamma_{23}^1 &= -\gamma_{32}^1 = 1, & \gamma_{31}^2 &= -\gamma_{13}^2 = 1, & \gamma_{12}^3 &= -\gamma_{21}^3 = 1 \\
\gamma_{13}^4 &= -\gamma_{31}^4 = a, & \gamma_{13}^5 &= -\gamma_{32}^5 = a
\end{aligned} \right\} \quad (j)$$

所有其余的三标记号均为零。

现在求对应准坐标的广义动量, 它们应按以下顺序求得: 先求出 $\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}$, 然后再令 $\omega_4 = \omega_5 = 0$, 于是我们有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_1} &= \frac{7}{5} m a^2 \omega_1, & \frac{\partial T^*}{\partial \omega_2} &= \frac{7}{5} m a^2 \omega_2, & \frac{\partial T^*}{\partial \omega_3} &= \frac{2}{5} m a^2 \omega_3 \\ \frac{\partial T^*}{\partial \omega_4} &= m a \omega_2, & \frac{\partial T^*}{\partial \omega_5} &= -m a \omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

计算表明,所有的非完整项皆为零:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=1}^5 \sum_{s=1}^3 \gamma_{s1}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_s &= 0 \\ \sum_{r=1}^5 \sum_{s=1}^3 \gamma_{s2}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_s &= 0 \\ \sum_{r=1}^5 \sum_{s=1}^3 \gamma_{s3}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

广义力的计算同例题(6.4.2),不再重复:

$$\left. \begin{aligned} Q_1^* &= m_x - a F_y \\ Q_2^* &= m_y + a F_x \\ Q_3^* &= m_z \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

Boltzmann-Hamel 方程最后给出:

$$\left. \begin{aligned} \frac{7}{5} m a^2 \dot{\omega}_1 &= m_x - a F_y \\ \frac{7}{5} m a^2 \dot{\omega}_2 &= m_y + a F_x \\ \frac{2}{5} m a^2 \dot{\omega}_3 &= m_z \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

和用 Чаплыгин 方程所得结果一致,但计算过程要简单一些。

例题 6.5.2 求镇定船舶高射机枪用的陀螺架的运动方程。

当船身摇摆时,为了稳定机枪座的方位,采用如图所示的双陀螺稳定系统。陀螺架与机枪座相固结,其转动轴 ξ' 安装在与船身相联结的轴承上。两个陀螺的外壳通过四连杆机构使其在工作时保持数值相等、方向相反的角速度 $\dot{\beta}$ 及 $-\dot{\beta}$ 。两个陀螺转子的自转

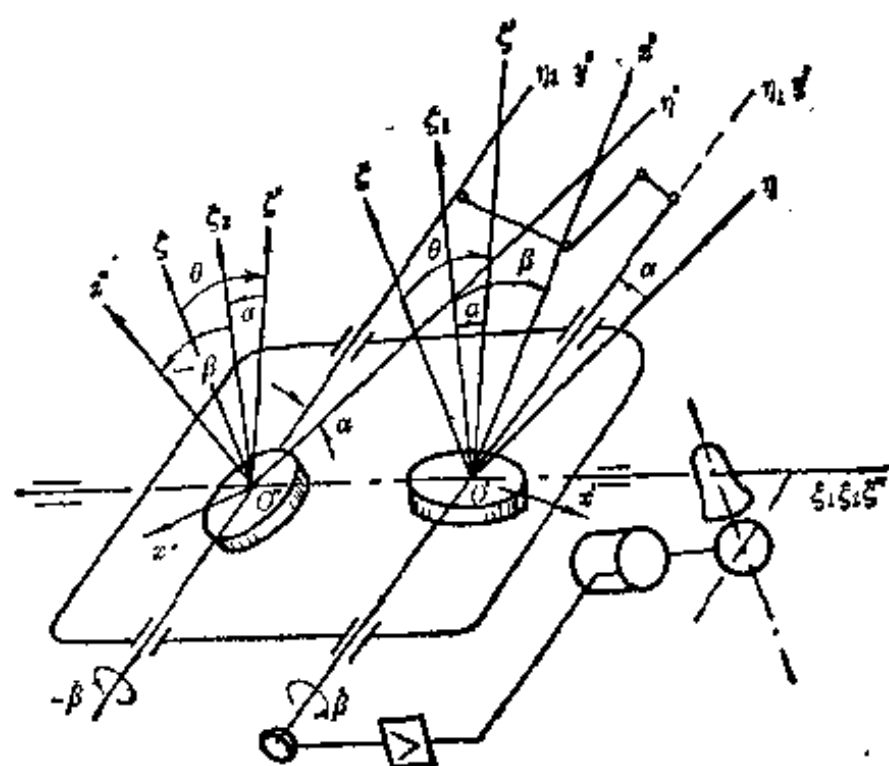


图 6.6

角速度保持相等。整个系统的工作原理为：当外界干扰（如风浪）使陀螺架绕 ξ' 轴有偏转角速度 α 时，陀螺 O' 的外壳就有一个相对陀螺架的角速度 $\dot{\beta}$ ，然后通过随动系统使陀螺架对于 ξ' 轴产生一校正角速度以使陀螺架之绝对角速度在 ξ' 轴上之投影为零。

引入以下记号：

$O'\zeta$ 及 $O''\zeta$ ——铅垂轴；

ξ', η', ζ 及 ξ'', η'', ζ'' ——固结在船上的坐标系；

ξ_1, η_1, ζ_1 及 ξ_2, η_2, ζ_2 ——固结在陀螺架上的坐标系；

x', y', z' 及 x'', y'', z'' ——固结在两个陀螺外壳上的坐标系；

$\omega_{\xi'}, \omega_{\eta'}, \omega_{\zeta'}$ ——船体角速度在 ξ', η', ζ' 坐标系上的投影；

船体角速度由三个分量组成：绕铅垂轴 $O'\zeta$ 的偏航角速度 $\dot{\psi}$ ，绕 $O'\eta'$ 轴之摆动角速度 $\dot{\theta}$ ，绕 $O'\xi$ 轴之摆动角速度。但对陀螺架的运动有影响的分量只有 $\dot{\psi}$ 及 $\dot{\theta}$ 这两项。因之，在计算船体角速

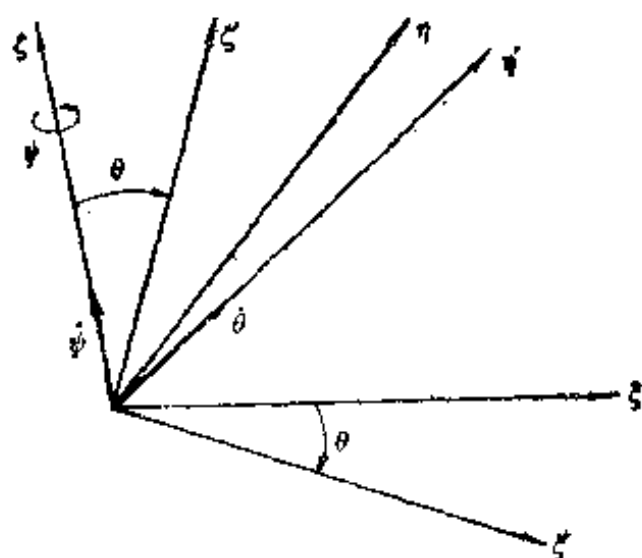


图 6.7

度分量 $\omega_{\xi'}$, $\omega_{\eta'}$, $\omega_{\xi''}$ 时也只计入这两项:

$$\omega_{\xi'} = -\dot{\psi} \sin \theta, \quad \omega_{\eta'} = \dot{\theta}, \quad \omega_{\xi''} = \dot{\psi} \cos \theta \quad (a)$$

设 α 为陀螺架绕 ξ 轴之转角, 则通过随动系统对陀螺架产生之校正角速度 α 应使陀螺架之绝对角速度在 ξ' 轴或 ξ_1 轴上之投影为零, 即

$$\omega_{\xi_1} = \alpha - \dot{\psi} \sin \theta = 0 \quad (b)$$

这个方程表示广义速度 α 及 $\dot{\psi}$ 之间受到一个约束条件的限制, 而且这个约束条件显然具有非完整性质。这样我们就面临一个具有非完整约束的机电系统的动力学问题。这个系统的参数(广义坐标)为

ψ ——船体的偏航角;

θ ——船体绕 $O'\eta'$ 轴之摆角;

α ——陀螺架之转角;

β ——陀螺 O' 之外壳相对陀螺架之转角(陀螺 O'' 之外壳相对陀螺架之转角为 $-\beta$);

γ ——陀螺 O' 之转子自转角(陀螺 O'' 之转子自转角为 $-\gamma$);

i ——控制电机之电流, 关于 i 的作用后面将要进行分析。

先求系统的动能。假设两陀螺间之距离很小可以忽略不计。

首先求陀螺框架的动能。因为船体角速度在 $O'\xi'\eta'\zeta'$ 坐标系各轴上的投影为 $-\dot{\psi}\sin\theta$, $\dot{\psi}\cos\theta$ 及 $\dot{\theta}$ 如图 6.8, 故框架绝对角速度在固结于框架上的坐标系 $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ 各轴上的投影为

$$\alpha - \dot{\psi}\sin\theta, \dot{\theta}\cos\alpha + \dot{\psi}\cos\theta\sin\alpha, -\dot{\theta}\sin\alpha + \dot{\psi}\cos\theta\cos\alpha$$

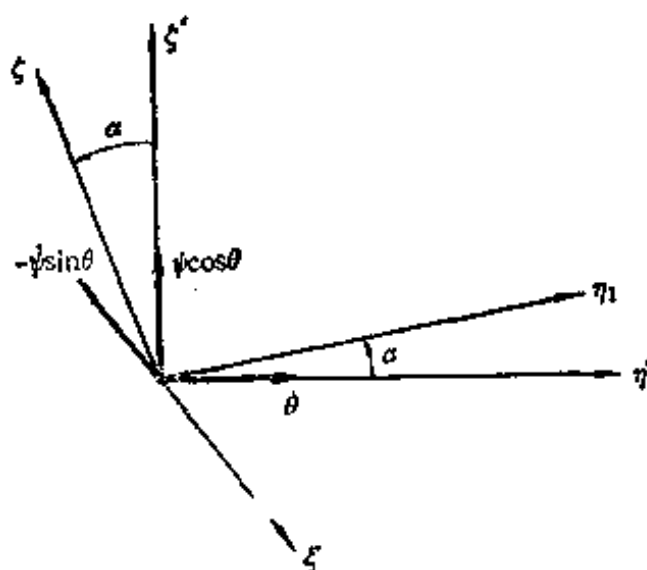


图 6.8

设框架对 $O'\xi_1$, $O'\eta_1$ 及 $O'\zeta_1$ 之转动惯量为 I_{ξ_1} , I_{η_1} 及 I_{ζ_1} , 则框架的动能为

$$T_1 = \frac{1}{2} [I_{\xi_1}(\alpha - \dot{\psi}\sin\theta)^2 + I_{\eta_1}(\dot{\theta}\cos\alpha + \dot{\psi}\cos\theta\sin\alpha)^2 + I_{\zeta_1}(-\dot{\theta}\sin\alpha + \dot{\psi}\cos\theta\cos\alpha)^2] \quad (c)$$

然后求陀螺外壳的动能。由图 6.9 可知, 陀螺外壳主轴系对于框架转过了 β 角。陀螺外壳的角速度在其主轴 $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ 上的投影为:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x'} &= (\alpha - \dot{\psi}\sin\theta)\cos\beta - (-\dot{\theta}\sin\alpha + \dot{\psi}\cos\theta\cos\alpha)\sin\beta \\ \omega_{y'} &= \dot{\theta}\cos\alpha + \dot{\psi}\cos\theta\sin\alpha + \dot{\beta} \\ \omega_{z'} &= (\alpha - \dot{\psi}\sin\theta)\sin\beta + (-\dot{\theta}\sin\alpha + \dot{\psi}\cos\theta\cos\alpha)\cos\beta \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

只要将上式中 β 换成 $-\beta$, 则可得到另一陀螺外壳角速度在主轴

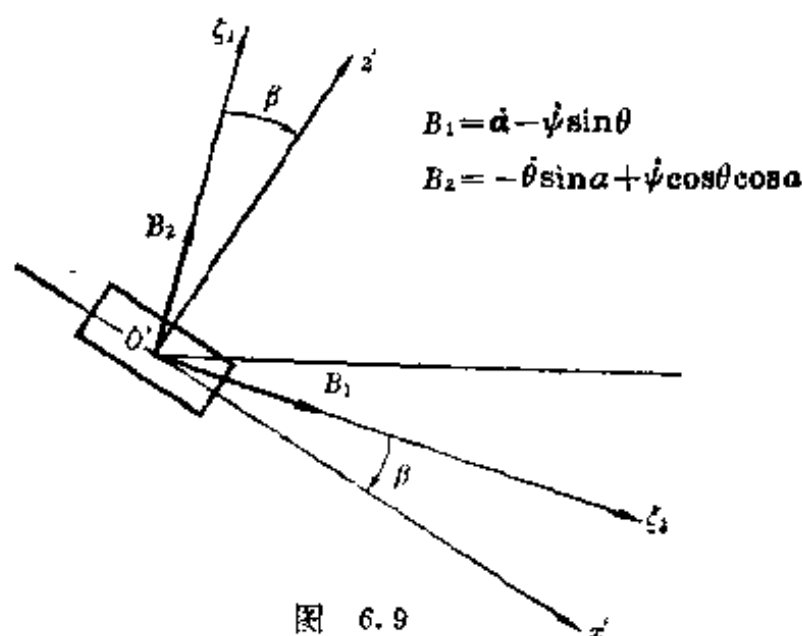


图 6.9

$O''x'', O''y'', O''z''$ 上的投影:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x''} &= (\dot{\alpha} - \dot{\psi} \sin \theta) \cos \beta - (-\dot{\theta} \sin \alpha + \dot{\psi} \cos \theta \cos \alpha) \sin(-\beta) \\ \omega_{y''} &= \dot{\theta} \cos \alpha + \dot{\psi} \cos \theta \sin \alpha - \dot{\beta} \\ \omega_{z''} &= (\dot{\alpha} - \dot{\psi} \sin \theta) \sin(-\beta) + (-\dot{\theta} \sin \alpha + \dot{\psi} \cos \theta \cos \alpha) \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

令陀螺外壳对其主轴之转动惯量为 $I_{x'}, I_{y'}, I_{z'}$, 则两个陀螺外壳的动能之和为

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} I_{x'} (\omega_{x'}^2 + \omega_{x''}^2) + \frac{1}{2} I_{y'} (\omega_{y'}^2 + \omega_{y''}^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} I_{z'} (\omega_{z'}^2 + \omega_{z''}^2) \\ &= (I_{x'} \cos^2 \beta + I_{z'} \sin^2 \beta) (\dot{\alpha} - \dot{\psi} \sin \alpha)^2 \\ &\quad + (I_{x'} \sin^2 \beta + I_{z'} \cos^2 \beta) (-\dot{\theta} \sin \alpha + \dot{\psi} \cos \theta \cos \alpha)^2 \\ &\quad + I_{y'} (\dot{\theta} \cos \alpha + \dot{\psi} \cos \theta \sin \alpha)^2 + I_{y'} \dot{\beta}^2 \end{aligned} \quad (f)$$

现在求陀螺转子的动能。陀螺转子只比陀螺外壳多一个自转角速度 γ , 只要将(d)中的 ω_z 加上 γ , 将(e)中的 $\omega_{z''}$ 减去 γ , 其余都不必改动就可得到陀螺转子角速度在 $O'x', O'y', O'z'$ 及 $O''x'', O''y'', O''z''$ (虽非固结于转子上的轴, 但由于转子的轴对称性, 仍

为转子的主轴)上的投影。于是我们可得到转子的动能为

$$\begin{aligned} T_3 = & (A \cos^2 \beta + C \sin^2 \beta) (\dot{\alpha} - \dot{\psi} \sin \theta)^2 + (A \sin^2 \beta \\ & + C \cos^2 \beta) (-\dot{\theta} \sin \alpha + \dot{\psi} \cos \theta \cos \alpha)^2 \\ & + A(\dot{\theta} \cos \alpha + \dot{\psi} \cos \theta \sin \alpha)^2 + A\dot{\beta}^2 + C\dot{\gamma}^2 + 2C\dot{\gamma} \\ & (\dot{\alpha} - \dot{\psi} \sin \theta) \sin \beta \end{aligned} \quad (g)$$

最后计算减速轮的动能。设减速轮的传速比为 j 。当框架有一角 α 的偏离时, 伺服电机使其绕 $O'\xi_1$ 轴有一转角 $(-j\alpha)$, 因此减速轮的角速度在 $O'\xi_1$ 轴上的投影为 $(-j\dot{\alpha} - \dot{\psi} \sin \theta)$ 。减速轮还有随船共同运动的角速度分量 $\dot{\theta}, \dot{\psi} \cos \theta$ 。设减速轮的转动惯量为 I_0 及 I'_0 , 则其动能为

$$T_4 = \frac{1}{2} I_0 (j\dot{\alpha} + \dot{\psi} \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} I'_0 (\dot{\psi} \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2) \quad (h)$$

系统的总动能为

$$\begin{aligned} T = \sum_{i=1}^4 T_i = & \left(\frac{1}{2} I_{\xi_1} + I_{x'} \cos^2 \beta + I_{x'} \sin^2 \beta + A \cos^2 \beta \right. \\ & + C \sin^2 \beta) (\dot{\alpha} - \dot{\psi} \sin \theta)^2 + (I_{y'} + A) \dot{\beta}^2 \\ & + C\dot{\gamma}^2 + 2C\dot{\gamma}(\dot{\alpha} - \dot{\psi} \sin \theta) \sin \beta + \frac{1}{2} I_0 (j\dot{\alpha} + \dot{\psi} \sin \theta)^2 \\ & + \left(\frac{1}{2} I_{\xi_1} + I_{x'} \sin^2 \beta + I_{x'} \cos^2 \beta + A \sin^2 \beta \right. \\ & + C \cos^2 \beta) (-\dot{\theta} \sin \alpha + \dot{\psi} \cos \theta \cos \alpha)^2 \\ & + \left(\frac{1}{2} I_{\eta_1} + I_{y'} + A \right) (\dot{\theta} \cos \alpha + \dot{\psi} \cos \theta \sin \alpha)^2 \\ & + \frac{1}{2} I'_0 (\dot{\psi} \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2) \end{aligned} \quad (i)$$

以下来求三标记号。为此, 先设以下的准速度与广义速度的关系式:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\alpha}, \omega_2 = \dot{\beta}, \omega_3 = \dot{\gamma}, \\ \omega_4 &= \dot{\theta}, \omega_5 = -\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

我们有相应的准坐标变分表达式:

$$\left. \begin{aligned} \delta\pi_1 &= \delta\alpha, \delta\pi_2 = \delta\beta, \delta\pi_3 = \delta\gamma, \delta\pi_4 = \delta\theta \\ \delta\pi_5 &= -\delta\psi \sin\theta + \delta\alpha \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

由此可列出

$$\begin{aligned} (\delta\pi_5) - \delta\omega_5 &= -\omega_4 \cos\theta \cdot \delta\psi + \dot{\psi} \cos\theta \delta\theta + (\dots) \\ &= [\omega_4(\delta\pi_5 - \delta\pi_1) - (\omega_5 - \omega_1)\delta\pi_4] \operatorname{ctg}\theta \\ &\quad + (\dots) \end{aligned} \quad (l)$$

由此可求得三标记号如下:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{41}^5 &= -\gamma_{14}^5 = -\operatorname{ctg}\theta \\ \gamma_{54}^5 &= -\gamma_{45}^5 = -\operatorname{ctg}\theta \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

其余的三标记号都等于零。系统的准广义力为

$$P_\alpha = Q_\alpha = j \frac{C_1}{g} i \quad (n)$$

其中 j 为减速器的传速比, g 为重力加速度, i 为电流, C_1 为控制电机系数。另一准广义力为

$$P_\theta = Q_\theta = M_\theta \quad (o)$$

其中 M_θ 为当有倾角 θ 时船作用于陀螺上的力矩。在以下的推导中, 考虑到实际情况下 α, β, θ 及其对时间的导数都很小, 故可在方程中仅保留一阶小量, 并且假设

$$|\dot{\alpha}\dot{\theta}| \ll |\sin^3\theta|, \quad \dot{\alpha}^2 \ll |\sin^2\theta| \quad (p)$$

Boltzmann-Hamel 方程具有以下形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} + \frac{\partial T}{\partial \pi_5} \gamma_{41}^5 \dot{\theta} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= j \frac{C_1}{g} i \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial T}{\partial \gamma} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial T}{\partial \pi_5} \gamma_{14}^5 \dot{\alpha} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= M_\theta \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

以上的动能表达式应表为准速度的函数, 并且利用非完整约束条件(b)化简, 略去高阶小量后的展开式为:

$$\left. \begin{aligned} & \alpha[I_0(j+1)^2 + (I_{\eta_1} + 2I_{\nu'} + 2A) + \frac{1}{\sin^2 \theta}] \\ & (I_{\xi_1} + 2I_{z'} + 2C + I'_{\theta}) + \ddot{\theta}[(I_{\eta_1} + 2I_{\nu'} + 2A) - (I_{\xi_1} + 2I_{z'} + 2C)] - 2C\dot{\gamma}\dot{\theta} \\ & = j\frac{C_1}{g}i \\ & 2(I_{\nu'} + A)\ddot{\beta} = 0 \\ & C\dot{\gamma} = 0 \\ & \ddot{\alpha}[(I_{\eta_1} + 2I_{\nu'} + 2A) - (I_{\xi_1} + 2I_{z'} + 2C)] \\ & + \ddot{\theta}(I_{\eta_1} + 2I_{\nu'} + 2A + I'_{\theta}) + 2C\dot{\gamma}\dot{\alpha} = M_{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (r)$$

其中 θ_0 为某常数。除以上方程组外, 还需补充一个方程, 即带电机的电放大器方程:

$$-\mu\beta = Ri + L\frac{di}{dt} + jG_2\alpha \quad (s)$$

其中 R, L 为电机的电阻及电感; G_2, μ 为系数。

以上的分析不过是初步的。为了更好地反映实际情况, 应该将随动系统的误差考虑进去。这时, 非完整约束条件变为

$$\alpha - \psi \sin \theta - \varepsilon = 0 \quad (t)$$

ε 可以认为是新出现的准速度。修正后的运动方程及其解的讨论从略, 读者可参阅有关文献*。

6.5.4 关于广义 Чаплыгин 方程与 Boltzmann-Hamel 方程的讨论

广义 Чаплыгин 方程与 Boltzmann-Hamel 方程都源于准坐标下 Euler-Lagrange 型的 Jourdain 原理

* 见参考文献[49]

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \omega_k = 0 \quad (6.5.33)$$

只不过这两种方程采用的变换方法不同而已，在 Чаплыгин 方程中采用如下的导数变换：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \\ \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} \end{aligned} \right\} \quad (6.5.34)$$

在 Boltzmann-Hamel 方程中则采取反向导数变换：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{r=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_{r=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \frac{\partial \omega_r}{\partial q_j} + \frac{\partial T^*}{\partial \pi_j} \end{aligned} \right\} \quad (6.5.35)$$

因此这两种方程既有很密切的“血缘关系”，又存在一定的互换性，这种互换性集中地表现在它们的非完整项上。

广义 Чаплыгин 方程具有以下形式：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} \right) = Q_k^* \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.5.36)$$

如将 (6.5.35) 式引入，则 Чаплыгин 方程可表为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} - \sum_{r=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} \right) \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} = Q_k^* \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.5.37)$$

Boltzmann-Hamel 方程具有以下形式：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \omega_r}{\partial q_j} \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} = Q_k^* \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.5.38)$$

两相比较可知,它们的非完整项有类似的数学结构,而且在两个非完整项中, ω_r 与 \dot{q}_j 之间互换了位置。

在(6.5.37)及(6.5.38)式中出现于非完整项中的偏导数 $\frac{\partial T^*}{\partial \omega_r}$ 均应理解为求完导数后再代入非完整约束条件,至于前两项

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k}$$

则不论求导前或求导后代入约束条件并无区别,其原因在于这部分只限于对独立的准速度或独立的准坐标求导(对准坐标求导仍导致对准速度求导),在 T^* 是准速度的二次型或二次函数时,何时引入约束条件显然都不影响求导结果。

由此可见,(6.5.37)与(6.5.38)式前两项及最后一项(广义力)都相同,因之两种不同形式的非完整项也应相同,于是我们有以下关系

$$-\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} \right) \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \omega_r}{\partial q_j} \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \quad \left(\begin{matrix} r=1, \dots, n \\ k=1, \dots, m \end{matrix} \right) \quad (6.5.39)$$

利用这个互换关系式可以得到一个和准坐标中“d- δ ”交换差关系相对应的另一个“d- δ ”交换差关系,我们已知准坐标下的“d- δ ”交换差关系为(见(6.5.27)式)

$$\frac{d}{dt} (\delta \pi_r) - \delta \omega_r = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \delta q_j - \delta \dot{q}_j \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \omega_r}{\partial q_j} \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \pi_k$$

$$(r=1, \dots, n) \quad (6.5.40)$$

将(6.5.39)式代入上式, 并各项乘以 $\frac{\partial \dot{q}_t}{\partial \omega_r}$ 后再按指标 r 求和:

$$\sum_{r=1}^n \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial \omega_r} \left(\frac{d}{dt} \delta \pi_r - \delta \omega_r \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial \omega_r} \left(\frac{d}{dt} \delta q_j - \delta \dot{q}_j \right) -$$

$$- \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial \omega_r} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} \right) \delta \pi_k$$

$$(t=1, \dots, n) \quad (6.5.41)$$

注意以下恒等式

$$\sum_{r=1}^n \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial \omega_r} = \delta_{tj} \quad (i=1, \dots, n) \quad (6.5.42)$$

就可将(6.5.41)式化简, 于是我们有

$$\frac{d}{dt} (\delta q_j) - \delta \dot{q}_j = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_r} \left(\frac{d}{dt} \delta \pi_r - \delta \omega_r \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} \right) \delta \pi_k$$

$$(j=1, \dots, n) \quad (6.5.43)$$

现在可以将指标 r 用 k 代替, 以得到较整齐的关系式

$$\frac{d}{dt} (\delta q_j) - \delta \dot{q}_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \left(\frac{d}{dt} \delta \pi_k - \delta \omega_k \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} \right) \delta \pi_k \quad (j=1, \dots, n)$$

$$(6.5.44)$$

这就是与(6.5.40)式相对应的“d- δ ”交换差关系,这个交换差关系可以作为求 Чаплыгин 方程中的非完整项的另一种手段;利用这两类交换差关系和中心方程可以作为推导 Чаплыгин 方程及 Boltzmann-Hamel 方程的另一种方法*;利用这两类交换差关系还可以由 Hamilton 原理或 Lagrange 原理推导 Чаплыгин 方程及 Boltzmann-Hamel 方程**。

最后要指出,如果引入非完整约束条件,则有

$$\delta\pi_k = 0, \delta\omega_k = 0 \quad (k = m+1, \dots, n) \quad (6.5.45)$$

剩下 m 个 $\delta\pi_k$ 或 $\delta\omega_k$ 是独立的,因之它们的交换关系成立。于是(6.5.44)式简化为

$$\frac{d}{dt}(\delta q_j) - \delta \dot{q}_j = \sum_{k=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} \right) \delta \pi_k \quad (j = 1, \dots, n) \quad (6.5.46)$$

6.6 Appell 方程

6.6.1 Appell 形式的 Jourdain 原理

广义坐标下的 Jourdain 原理为

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = 0 \quad (6.6.1)$$

由经典关系

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{q}_j} \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ j = 1, \dots, n \end{array} \right) \quad (6.6.2)$$

可知

* 见参考文献[2]

** 见本书 6.8 节

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.6.3)$$

其中定义 S 如下

$$S \triangleq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i \quad (6.6.4)$$

通常称 S 为 Appell 函数* 或系统的加速度能, 由恒等式

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad \begin{pmatrix} i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, n \end{pmatrix} \quad (6.6.5)$$

可知

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.6.6)$$

Q_j 是对应广义坐标 q_j 的广义力, 将 (6.6.4) 及 (6.6.6) 式代入 (6.6.1) 式, 便得到 Appell 形式的 Jourdain 原理:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} - Q_j \right) \delta \ddot{q}_j = 0 \quad (6.6.7)$$

Appell 形式的 Jourdain 原理是推导各种形式的 Appell 方程的基础。

6.6.2 Appell 方程

设系统受有 $l = n - m$ 个一阶非线性非完整约束

$$f_k(q_j, \dot{q}_j, t) = 0 \quad (k = m+1, \dots, n) \quad (6.6.8)$$

取准速度如下:

$$\left. \begin{aligned} \omega_k &= \omega_k(q_j, \dot{q}_j, t) & (k=1, \dots, m) \\ \omega_k &= f_k(q_j, \dot{q}_j, t) = 0 & (k=m+1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (6.6.9)$$

* 也有人称 S 为 Gibbs 函数。其实, Williard Gibbs 于 1879 年首先得到方程 (6.6.28), 廿年后 Appell 深入研究了 this 方程, 现在一般习惯称其为 Appell 方程。

设这组函数的 Jacobi 行列式不为零:

$$\frac{\partial(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)}{\partial(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)} \neq 0 \quad (6.6.10)$$

则可由(6.6.9)式中解出 \dot{q}_j 如下

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_s, \omega_k, t) \quad \begin{pmatrix} s=1, \dots, n \\ k=1, \dots, m \end{pmatrix} \quad (6.6.11)$$

取 δr 空间中之变分

$$\delta \dot{q}_j = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \omega_k \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.6.12)$$

代入(6.6.7)式后, Jourdain 原理化为以下形式:

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_j} - Q_j \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \omega_k = 0 \quad (6.6.13)$$

由恒等式

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} = \frac{\partial \ddot{q}_j}{\partial \dot{\omega}_k} \quad \begin{pmatrix} j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, m \end{pmatrix} \quad (6.6.14)$$

可得

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} = \frac{\partial S^*}{\partial \dot{\omega}_k} \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.6.15)$$

其中

$$S^* = S^*(q_j, \omega_k, \dot{\omega}_k, t) \quad (6.6.16)$$

为函数 $S(q_j, \dot{q}_j, \ddot{q}_j, t)$ 中借助 (6.6.11) 式消去 \dot{q}_j 及 \ddot{q}_j 后之表达式。令

$$P_k^* \triangleq \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.6.17)$$

P_k^* 是对应准速度 ω_k 之广义力。将(6.6.15) 及(6.6.17) 式代入(6.6.13)式, 并注意 $\delta \omega_1, \delta \omega_2, \dots, \delta \omega_m$ 是互相独立的变分, 便得到

一阶非线性非完整系统准坐标下的 Appell 方程:

$$\frac{\partial S^*}{\partial \omega_k} = P_k^* \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.6.18)$$

我们可以看到, Appell 方程在数学结构上比迄今为止我们所熟悉的非完整系统动力学方程都要简单得多, 这也是 Appell 方程的主要优点。

以下讨论两种常见的特殊形式:

推论一: 如系统受有一阶线性非完整约束

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j + a_k = 0 \quad (k=m+1, \dots, n) \quad (6.6.19)$$

取准速度如下

$$\left. \begin{aligned} \omega_k &= \sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j + a_k \quad (k=1, \dots, m) \\ \omega_k &= \sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j + a_k = 0 \quad (k=m+1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (6.6.20)$$

当 $a_{kj} \neq 0$ 时, 由 (6.6.20) 式反演后可得

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^m b_{jk} \omega_k + b_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.6.21)$$

令

$$P_k^* \triangleq \sum_{j=1}^n Q_j b_{jk} \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.6.22)$$

则一阶线性非完整系统准坐标下的 Appell 方程仍保留 (6.6.18) 式的一般形式:

$$\frac{\partial S^*}{\partial \omega_k} = P_k^* \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.6.23)$$

推论二: 设系统受有如下形式的一阶线性非完整约束

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^m B_{jk} \dot{q}_k + B_j \quad (j=m+1, \dots, n) \quad (6.6.24)$$

取

$$\omega_k = \dot{q}_k \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.6.25)$$

则广义速度与准速度间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_j &= \omega_j & (j=1, \dots, m) \\ \dot{q}_j &= \sum_{k=1}^m B_{jk} \omega_k + B_j & (j=m+1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (6.6.26)$$

将以上关系代入(6.6.17)式,可求得准广义力如下

$$\bar{Q}_k = \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} = Q_k + \sum_{j=m+1}^n Q_j B_{jk} \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.6.27)$$

令 \tilde{S} 为 S 中消去不独立的广义加速度 $\ddot{q}_{m+1}, \dots, \ddot{q}_n$ 后之表达式, 则一阶线性非完整系统广义坐标下之 Appell 方程为

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \dot{q}_k} = \bar{Q}_k \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.6.28)$$

6.6.3 Appell 函数

各种形式的 Appell 方程都含有 Appell 函数, 因之如何确定 Appell 函数便成为列方程的关键性问题。以下要讨论关于 Appell 函数的某些问题。

(1) Appell 函数的一般结构

假设系统所受约束为非定常的一般情况, 因为

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (6.6.29)$$

所以有

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6.6.30)$$

因此函数 S 具有以下一般形式

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk} \ddot{q}_j \ddot{q}_k + \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n B_{jk}^r \dot{q}_j \dot{q}_k \ddot{q}_r + \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + S'
 \end{aligned} \tag{6.6.31}$$

其中 S' 为不显含广义加速度之项, 由于这一项对于列方程不起作用, 可不予考虑, 而只取显含广义加速度的部分, 并以 S_0 表之, 于是有

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk} \ddot{q}_j \ddot{q}_k + \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n B_{jk}^r \dot{q}_j \dot{q}_k \ddot{q}_r + \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k
 \end{aligned} \tag{6.6.32}$$

可见, S_0 包含广义加速度的二次项及一次项, 而一次项中又有广义速度的二次式系数及一次式系数两部分, 当约束为定常约束时, (6.6.30) 式的最后两项化为零, 于是 S_0 成为

$$S_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk} \ddot{q}_j \ddot{q}_k + \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n B_{jk}^r \dot{q}_j \dot{q}_k \ddot{q}_r \tag{6.6.33}$$

其中各系数 A_{jk} 、 B_{jk}^r 、 C_{jk} 一般都是广义坐标和时间的函数, 在定常约束情况下不显含时间, 在特殊情况下, 例如刚体作平动或绕定轴转动时, B_{jk}^r 恒等于零。

(2) 系统加速度能的 König 定理

对任意质点系, 其加速度能 S 都存在类似于动能那样的 König 定理: 质点系对空间参考系的加速度能 S 等于该质点系随

质心 C 平动的加速度能及质点系相对质心平动坐标系 $Cx'y'z'$ 的相对运动中的加速度能之和。

证明: 系统中任一质点 m_i 的加速度可分解为随质心平动之牵连加速度及相对加速度之和:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_C + \ddot{\mathbf{r}}'_i \quad (i=1, \dots, N) \quad (6.6.34)$$

因之系统的加速度能等于

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\ddot{\mathbf{r}}_C + \ddot{\mathbf{r}}'_i) \cdot (\ddot{\mathbf{r}}_C + \ddot{\mathbf{r}}'_i) \\ &= \frac{1}{2} M \ddot{\mathbf{r}}_C \cdot \ddot{\mathbf{r}}_C + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}'_i + \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_C \end{aligned} \quad (6.6.35)$$

但由质心的定义可知

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = 0 \quad (6.6.36)$$

于是(6.6.35)式给出

$$S = \frac{1}{2} M \ddot{\mathbf{r}}_C \cdot \ddot{\mathbf{r}}_C + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}'_i \quad (6.6.37)$$

或

$$S = S_C + S'_C \quad (6.6.38)$$

这就是关于加速度能的 König 定理。

(3) 刚体的加速度能

利用 König 定理可知, 刚体作任意运动的加速度能等于刚体随质心 C 作平动的加速度能

$$S_C = \frac{1}{2} M (\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2 + \ddot{z}_C^2) \quad (6.6.39)$$

及相对 C 点转动的加速度能 S'_C 。以下的问题集中在 S'_C 的推导, 设刚体绕 C 点转动的角速度及角加速度为 ω 及 $\dot{\omega}$, 则刚体内任一

点的加速度为

$$\boldsymbol{\omega}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_i' \quad (6.6.40)$$

于是相对运动,即刚体绕 C 点转动中的加速度能应为

$$\begin{aligned} S'_C &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_i') \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_i') \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_i) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_i') \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_i') + \\ &\quad + \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_i') \end{aligned} \quad (6.6.41)$$

式中右端第二项不含 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, 不影响列方程, 可不予考虑, 因此只需处理第一、三两项。

取固结在刚体上的动坐标系为 $Cx'y'z'$, 角速度在 $Cx'y'z'$ 上的分解式为

$$\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k} \quad (6.6.42)$$

$\boldsymbol{\omega}$ 的时间导数与其相对导数之间的关系为

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} \quad (6.6.43)$$

因此由 (6.6.42) 及 (6.6.43) 式可得

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{p}\mathbf{i} + \dot{q}\mathbf{j} + \dot{r}\mathbf{k} \quad (6.6.44)$$

取 $Cx'y'z'$ 沿中心惯性主轴方向, 令中心主惯性矩分别为 A, B, C , 则刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \quad (6.6.45)$$

完全类似地可有

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\dot{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} (A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2) \quad (6.6.46)$$

由于 $\mathbf{v}'_i = \omega \times \mathbf{r}_i$, 故恒等式

$$\mathbf{r}_i \times (\omega \times \mathbf{v}'_i) + \omega \times (\mathbf{v}'_i \times \mathbf{r}_i) + \mathbf{v}'_i \times (\mathbf{r}_i \times \omega) = 0 \quad (6.6.47)$$

中左端最右一项为零, 因此有

$$\mathbf{r}_i \times (\omega \times \mathbf{v}'_i) = \omega \times (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}'_i) \quad (6.6.48)$$

于是可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\omega \times \mathbf{v}'_i) &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\omega} \cdot [\mathbf{r}_i \times (\omega \times \mathbf{v}'_i)] \\ &= \dot{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N \omega \times (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}'_i) \\ &= \dot{\omega} \cdot \omega \times \mathbf{G}_C \end{aligned} \quad (6.6.49)$$

其中 \mathbf{G}_C 为刚体对 C 点的相对转动的动量矩, 我们知道它可表为

$$\mathbf{G}_C = A p \mathbf{i} + B q \mathbf{j} + C r \mathbf{k} \quad (6.6.50)$$

因此(6.6.49)式可表为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\omega \times \mathbf{v}'_i) &= \dot{\omega} \cdot \omega \times (A p \mathbf{i} + B q \mathbf{j} + C r \mathbf{k}) \\ &= \dot{p} q r (C - B) + \dot{q} r p (A - C) + \dot{r} p q (B - A) \end{aligned} \quad (6.6.51)$$

将(6.6.46)及(6.6.51)式代入(6.6.41)式, 最后可得刚体绕 C 点转动的加速度能(略去无意义项)为:

$$\begin{aligned} S'_C &= \frac{1}{2} (A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2) + \dot{p} q r (C - B) + \dot{q} r p (A - C) \\ &\quad + \dot{r} p q (B - A) \end{aligned} \quad (6.6.52)$$

例题 6.6.1 用 Appell 方程重新解球体在粗糙水平面上的

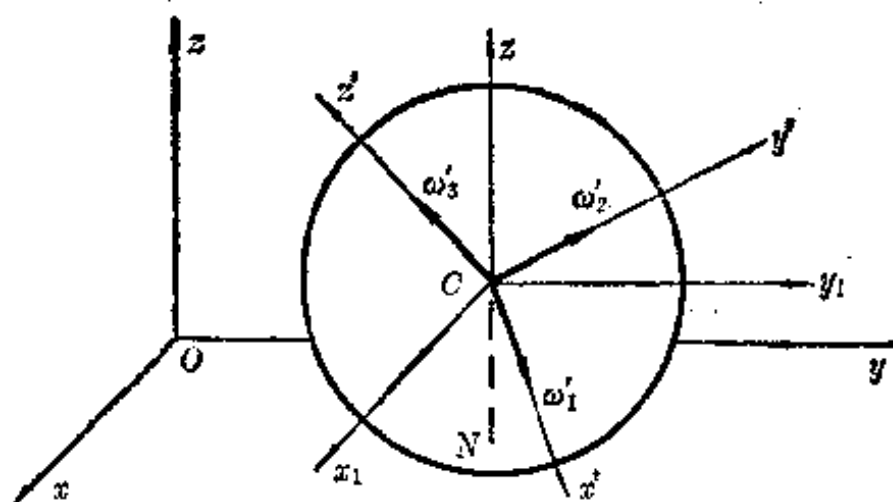


图 6.10

滚动问题。

解 用 x_c, y_c 表示球心加速度在 Ox 轴及 Oy 轴上的投影, 在球心 C 点取平动坐标系 $Cx_1y_1z_1$ 及固结在球上的转动坐标系 $Cx'y'z'$ 。球体的角加速度在 $Cx'y'z'$ 轴系上的投影为 $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$ 。于是球体的 Appell 函数为

$$S = \frac{1}{2}m(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}ma^2(\omega_1'^2 + \omega_2'^2 + \omega_3'^2) \quad (a)$$

因为球体的特殊性: $A=B=C$, 所以 S 中不含角速度的一次项, 为了利用约束条件, 需将角速度转换成 $Cx_1y_1z_1$ 轴系上的投影, 但由于 (a) 中恰好只出现 ω 的模的平方, 因此我们很容易转换成以下式子:

$$\omega_1'^2 + \omega_2'^2 + \omega_3'^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \quad (b)$$

将 (b) 代入 (a), 并引入约束条件

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_c &= \frac{d}{dt}(a\omega_2) = a\dot{\omega}_2 \\ \dot{y}_c &= \frac{d}{dt}(-a\omega_1) = -a\dot{\omega}_1 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

将 (b), (c) 代入 (a) 中, 即得到以准坐标表示的 Appell 函数:

$$S = \frac{1}{2}m \left[\frac{7}{5}a^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{2}{5}a^2\omega_3^2 \right] \quad (d)$$

在准坐标中的广义力求法和例题 6.4.2 及例题 6.5.1 完全相同, 不再重复, 列出 Appell 方程如下

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}_k} = P_k^* \quad (k=1, 2, 3) \quad (e)$$

最后给出以下运动方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{7}{5} m a^2 \dot{\omega}_1 &= m_x - a F_y \\ \frac{7}{5} m a^2 \dot{\omega}_2 &= m_y + a F_x \\ \frac{2}{5} m a^2 \dot{\omega}_3 &= m_z \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

可见, 在滚球问题中用 Appell 方程是最优选择, 比用 Чаплыгин 方程或 Boltzmann-Hamel 方程都要简捷得多。

例题 6.6.2 求自动调节式截煤机的运动方程。

截煤机由行走部分 A 及切割部分 B 组成, 行走部分包含一鼓轮, 鼓轮上缠绕的钢绳连接在坑木上。当鼓轮收紧钢绳时, 整个机器沿斜面上升。切割部分的电动机工作时的电流应保持在额定值上, 但由于煤层的硬度及行走钢绳拉力的变化会发生偏差。为此, 采用如图 6.12 所示的自动调节系统。将切割电动机的三相电流引至一个力矩马达 C 上, 力矩马达可以反应出切割电动机电流的偏差, 并带动减速机械系统, 最后传递到液压放大器的阀 D 上。阀的开度发生变化就影响油缸中活塞 E 行程的变化。活塞的运动经过杠杆改变摩擦轮 F 的角度, 这样就可以调节切割电动机主轴与鼓轮主轴间无级变速器的传速比, 通过调节传速比达到调节鼓轮转速的目的。

整个系统包含四个广义坐标:

φ ——切割电动机主轴的转角;

ψ ——行走鼓轮主轴的转角;

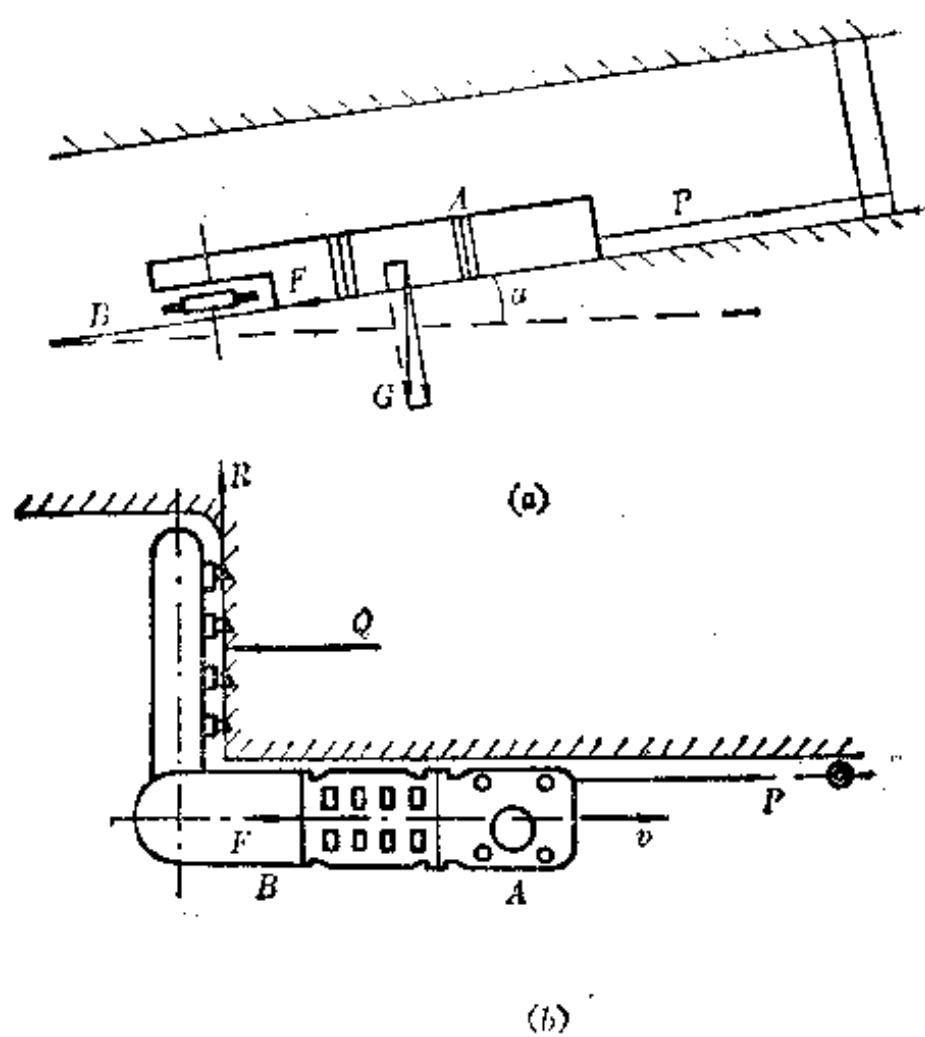


图 6.11

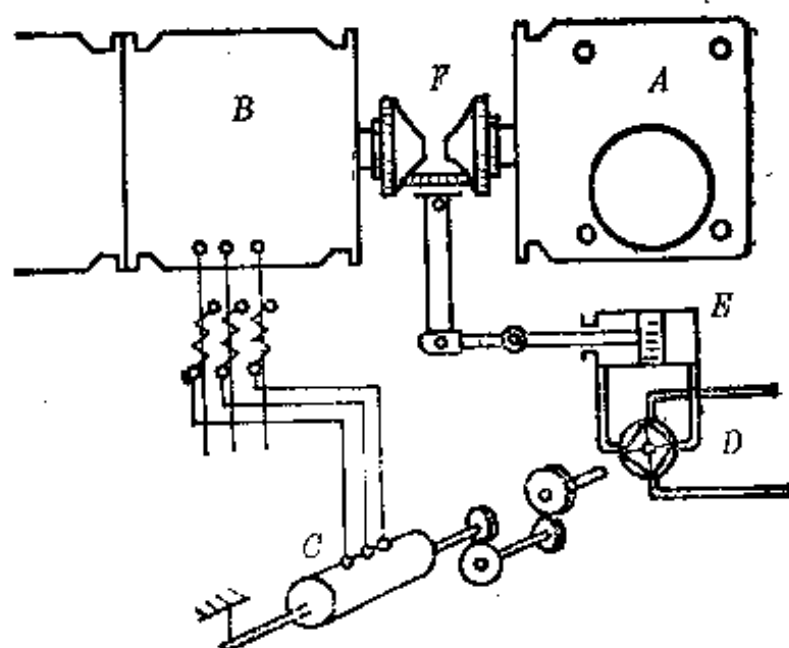


图 6.12

ξ ——液压放大器油缸活塞的行程;

x ——整个机器沿坑道斜面的位移。

ϕ 和 $\dot{\psi}$ 之间通过无级变速器可建立如下关系:

$$\phi = i\dot{\psi} \quad (a)$$

其中 i 为传速比。但它不是常数, 而是液压放大器活塞行程 ξ 的函数。在最简单的情况下可以假设 i 与 ξ 是线性关系:

$$i = a + b\xi \quad (b)$$

其中 a, b 为与变速器结构及行走部分减速机构有关的常数。由 (a) 及 (b) 可知

$$\phi = (a + b\xi)\dot{\psi} \quad (c)$$

这是不可积分的约束条件, 因此这是具有一个非完整约束的系统。

下面我们列出截煤机的主要部分——行走部分 A 及切割部分 B 的运动方程式。此系统的加速度能为

$$S = \frac{1}{2} [m\ddot{x}^2 + I_1\ddot{\psi}^2 + I_2\ddot{\psi}^2 + \dots] \quad (d)$$

其中 m ——整个机器的质量;

I_1 ——与电动机转子有运动学联系的元件简化到转子上的转动惯量;

I_2 ——与鼓轮有运动学联系的元件简化到鼓轮上的转动惯量。

取 \dot{x} 及 $\dot{\psi}$ 为非零准速度, ϕ 可藉助约束条件 (c) 消去。由 (c) 可得

$$\ddot{\phi} = (a + b\xi)\ddot{\psi} + b\dot{\xi}\dot{\psi} \quad (e)$$

代入 (d) 后, 可得

$$S = \frac{m\dot{x}^2}{2} [I_1(a + b\xi)^2 + I_2] \frac{\ddot{\psi}^2}{2} + I_1(a + b\xi)b\dot{\xi}\dot{\psi}\ddot{\psi} + (\dots) \quad (f)$$

略去的项不含准加速度, 不影响列 Appell 方程。

系统的运动方程为

$$\frac{\partial S}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\psi}} = Q_{\ddot{\psi}} \quad (g)$$

加速度能对 x 及 $\ddot{\psi}$ 的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= m\ddot{x}, \\ \frac{\partial S}{\partial \ddot{\psi}} &= [I_1(a+b\xi)^2 + I_2]\ddot{\psi} + I_1(a+b\xi)b\dot{\xi}\dot{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

为确定广义力, 引入以下记号:

G ——机器的总重;

M_a ——电动机主轴上的主动力矩;

M_c ——切割部分中由切割煤层及干摩擦简化到电动机主轴上的阻力矩;

Q ——煤层对机器的阻力;

F ——机器沿斜面移动时所受的摩擦阻力;

P ——钢缆绳的拉力。

如假设电动机在切割的过渡过程中服从线性的机械特性:

$$M_a = A - B\phi = A - B(a + b\xi)\dot{\psi} \quad (i)$$

其中 A 及 B 为依赖于电动机特性的常数。

摩擦阻力 F 等于

$$F = fG\cos\alpha \quad (j)$$

其中 f 为机器与底层面之间的摩擦系数, α 为底层面之倾角。

最后, P 由以下公式表示:

$$P = \frac{EA_0}{l} (R\psi - x + \lambda_0) \quad (k)$$

其中 E, A_0, l 及 λ 分别为钢绳之弹性模量、横截面积、长度及 $\psi=0$ 时之变形, R 为鼓轮之半径。

在坐标变分 δx 代表的虚位移上, 有以下虚功:

$$\delta' W_x = (P - Q - F - G \sin \alpha) \delta x \quad (l)$$

故有

$$Q_x = \frac{EA_0}{l} (R\psi - x + \lambda_0) - Q - G(f \cos \alpha + \sin \alpha) \quad (m)$$

在坐标变分 $\delta\psi$ 代表的虚位移上, 有以下虚功:

$$\delta' W_\psi = (M_a - M_c)(a + b\xi) \delta\psi - PR\delta\psi \quad (n)$$

故有

$$Q_\psi = [A - B(a + b\xi)\dot{\psi} - M_c](a + b\xi) - \frac{EA_0}{l} (R\psi - x + \lambda_0) R \quad (o)$$

最后可得此系统的 Appell 方程:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{EA_0}{l} (R\psi - x + \lambda_0) - Q - G(f \cos \alpha + \sin \alpha) \\ [I_1(a + b\xi)^2 + I_2]\ddot{\psi} + I_1(a + b\xi)b\dot{\xi}\dot{\psi} \\ &= [A - B(a + b\xi)\dot{\psi} - M_c](a + b\xi) \\ &\quad - \frac{EA_0}{l} (R\psi - x + \lambda_0) R \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

将以上两方程与力矩马达方程及液压放大器方程联合起来就可以研究截煤机的调节过程, 调节行走速度使主机输出功率基本不变, 后两个方程因涉及更复杂的因素, 故不再列出。

6.7 建立动力学方程的 Kane 方法

到此为止, 我们已经研究了一些基本类型的动力学方程, 适用于完整系统的有 Lagrange 方程, Euler-Lagrange 方程, Hamilton 正则方程等; 适用于完整及非完整系统的有 Routh 方程, Чаплыгин 方程, Boltzmann-Hamel 方程, Appell 方程等, 这些方程的共同特点是: (1) 由表征系统运动状态的某函数 (动能、Hamilton 函数、加速度能等) 及广义力按照规定的微分算子就能导出, 思路

简捷、表达简捷是其一大优点。(2)如将 Lagrange 方程视为 Routh 方程、Чаплыгин 方程及 Boltzmann-Hamel 方程的特殊情形,则所有方程既适用于完整系统,也适用于非完整系统,既能用广义坐标表达,也能用准坐标表达,而且理想约束的约束力不出现在方程中,其中特别值得称道的是用准坐标表达的方程具有很大的概括性(用广义坐标表达不过是它的特殊情形),而且方程的结果往往很简捷,都是一阶方程。

由于以上原因,完整及非完整系统动力学的经典研究不仅在理论上,而且在应用上都有其不可磨灭的重要意义,不过也应看到这些方程的不足之处,主要是建立了动力学基本函数后,还需经过微分算子的求导演算,对于比较复杂的系统,这种求导运算过程是十分冗长的。相对而言,Appell 方程中的微分算子是最简单的,但建立复杂系统的 Appell 函数亦非易事,因此需要研究建立动力学方程的新方法,以达到省力、灵活、便于用计算机处理等目的。本节要介绍的 Kane 方法便是能满足上述要求的方法。Kane 方法的特点是:(1)用准坐标表达,所有方程都是一阶微分方程;(2)进行了必要的运动学分析之后,推导方程的过程全部是代数运算,避免了求导的运算;(3)本方法是普遍方法,能适用于完整及非完整系统;(4)由于(1)、(2)两大特点,使本方法很容易在计算机上推导,并在计算机上作数值积分。

T.R.Kane 在阐明他的方法时,论证不够完善,没有说明它和分析力学的经典研究的关系,本书则将从 Jourdain 原理出发建立 Kane 方法及其方程,这样将有助于阐明这种方法的本质。

6.7.1 Kane 方法概要

设系统由 n 个独立的广义坐标描述,取准速度及非完整约束

条件如下*

$$\left. \begin{aligned} u_k &= u_k(q_j, \dot{q}_j, t) & (k=1, \dots, m) \\ u_k &= u_k(q_j, \dot{q}_j, t) = 0 & (k=m+1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (6.7.1)$$

和以前的规定一样, 前面 m 个准速度是独立的, 可以任选它们为 m 个以 q_j, \dot{q}_j, t 为自变量的函数, 后面 $n-m$ 个 u_k 和约束条件相联系而等于零, 并要求 $\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)} \neq 0$, 于是由(6.7.1)式反演后可得

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_s, u_k, t) \quad \left(\begin{array}{l} s=1, \dots, n \\ k=1, \dots, m \end{array} \right) \quad (6.7.2)$$

取 $\delta \dot{\mathbf{r}}$ 空间中之变分:

$$\delta \dot{q}_j = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial u_k} \delta u_k \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.7.3)$$

代入 Jourdain 原理

$$\sum_{i=1}^N (f_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i = 0 \quad (6.7.4)$$

后, 可得

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N (f_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial u_k} \right) \delta u_k = 0 \quad (6.7.5)$$

定义质点 i 的第 k 个偏速度为

$$\mathbf{v}_k^i \triangleq \sum_{j=1}^n \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial u_k} \quad \left(\begin{array}{l} i=1, \dots, N \\ k=1, \dots, m \end{array} \right) \quad (6.7.6)$$

再定义系统的广义主动力及广义惯性力分别为

* 为了读者查阅原著方便, 本书在此处采用了 Kane 本人使用的准速度记号。

$$\left. \begin{aligned} F_k &= \sum_{i=1}^N f_i \cdot v_k^i \\ F_k^* &= \sum_{i=1}^N (-m_i \ddot{r}_i) \cdot v_k^i \end{aligned} \right\} \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.7.7)$$

注意 (6.7.5) 式中诸 δu_k 的独立性便有以下形式的动力学方程

$$F_k + F_k^* = 0 \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.7.8)$$

以上方程也有人称之为 Kane 方程。显而易见, Kane 方程的数目和系统的自由度数一致。

以下着重研究一阶线性非完整系统。在这种情况下, 广义速度与准速度之间的一般关系为

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^m b_{jk} u_k + b_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.7.9)$$

其中 b_{jk} 及 b_j 为广义坐标及时间的函数。于是在一阶线性非完整系统中偏速度表达式 (6.7.6) 可化为

$$v_k^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} b_{jk} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} b_{jk} \quad (6.7.10)$$

另一方面, 第 i 个质点的速度为

$$\begin{aligned} v_i &= \dot{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \left(\sum_{k=1}^m b_{jk} u_k + b_j \right) + \frac{\partial r_i}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} b_{jk} \right) u_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} b_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.7.11)$$

比较 (6.7.10) 及 (6.7.11) 两式可知

$$v_i = \sum_{k=1}^m v_k^i u_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} b_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (6.7.12)$$

令

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \quad (6.7.13)$$

它是速度表达式中由非定常约束给予的贡献, 于是(6.7.12)式可简化为

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{k=1}^m \boldsymbol{v}_i^k u_k + \boldsymbol{v}_i^{(1)} \quad (i=1, \dots, N) \quad (6.7.14)$$

由此发现一个重要法则: 质点 i 的第 k 个偏速度 \boldsymbol{v}_i^k 是速度 \boldsymbol{v}_i 展开式中第 k 个准速度 u_k 的系数, 偏速度的意义可以这样来理解: 将(6.7.14)式取 $\delta \dot{\boldsymbol{r}}$ 空间中的变分:

$$\delta \boldsymbol{v}_i = \sum_{k=1}^m \boldsymbol{v}_i^k \delta u_k \quad (i=1, \dots, N) \quad (6.7.15)$$

可见, 偏速度不过是单位准速度变分在虚位移中的贡献, 当然这里的虚位移是指 $\delta \dot{\boldsymbol{r}}$ 空间中的虚位移, 其实这个本质在(6.7.4)及(6.7.5)式中已经显示出来了。

Kane 方程实际上是动静法在准坐标下的表现形式, 它表明: 和每个准坐标相对应的广义主动力和广义惯性力相平衡。

6.7.2 刚体中的广义主动力和广义惯性力

Kane 方法最后归结为广义主动力和广义惯性力的计算, 对于刚体完全按照(6.7.7)式去计算将不胜其繁, 因此需研究刚体中的广义惯性力和广义主动力的计算方法。

设有刚体 A , 其中任一点的速度 \boldsymbol{v}_i 取决于某参考点 S 的速度 \boldsymbol{v}_S 及刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i \quad (i=1, \dots, N) \quad (6.7.16)$$

而 \boldsymbol{v}_S 及 $\boldsymbol{\omega}$ 又可如(6.7.14)式那样, 表为准速度的线性关系式:

$$\mathbf{v}_S = \sum_{k=1}^m \mathbf{v}_k^g \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_S^{(i)} \quad (6.7.17)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{k=1}^m \boldsymbol{\omega}_k \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\omega}^{(i)} \quad (6.7.18)$$

其中 \mathbf{v}_k^g 为偏速度, $\boldsymbol{\omega}_k$ 为偏角速度, 将以上两式代入 (6.7.16) 式, 可得

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^m (\mathbf{v}_k^g + \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{r}_i) \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_S^{(i)} + \boldsymbol{\omega}^{(i)} \times \mathbf{r}_i \quad (6.7.19)$$

由 \mathbf{u}_k 的系数即得到 i 点的偏速度:

$$\mathbf{v}_i^g = \mathbf{v}_k^g + \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{r}_i \quad (i=1, \dots, N) \quad (6.7.20)$$

换言之, 任一点的偏速度等于基点的偏速度与刚体以偏角速度转动之速度之和。

将以上公式代入 (6.7.7) 式中的广义主动力公式, 可得:

$$F_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot (\mathbf{v}_i^g + \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{r}_i)$$

或

$$F_k = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_k^g + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\omega}_k \quad (k=1, \dots, m) \quad (6.7.21)$$

其中 \mathbf{R} 及 \mathbf{T} 分别为主动力的主向量及对 S 点之主矩:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i, \quad \mathbf{T} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i \quad (6.7.22)$$

同样, 广义惯性力可表为

$$F_k^* = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{v}_k^g + \mathbf{T}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_k \quad (6.7.23)$$

其中 \mathbf{R}^* 及 \mathbf{T}^* 分别为刚体惯性力主向量及对 S 点的主矩。其表达式如下

$$\mathbf{R}^* = \sum_{i=1}^N -m_i \boldsymbol{\omega}_i = -M \boldsymbol{\omega}_0 \quad (6.7.24)$$

其中 \boldsymbol{w}_C 为 C 点的加速度。

$$\boldsymbol{T}^* = - \sum_{i=1}^N \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{w}_i \quad (6.7.25)$$

将 (6.7.16) 式对时间求导, 可得刚体内各点加速度为:

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}_S + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) \quad (6.7.26)$$

于是有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}^* = & - \sum_{i=1}^N \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{w}_S - \sum_{i=1}^N [\boldsymbol{r}_i \times m_i (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_i)] - \\ & - \sum_{i=1}^N \{ \boldsymbol{r}_i \times m_i [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] \} \end{aligned} \quad (6.7.27)$$

分别简化各项如下

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{w}_S &= \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{w}_S = \boldsymbol{r}_C \times M \boldsymbol{w}_S \\ \sum_{i=1}^N [\boldsymbol{r}_i \times m_i (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_i)] &= \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{E} - \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{r}_i) \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{I}_S \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \sum_{i=1}^N \{ \boldsymbol{r}_i \times m_i [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] \} &= \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\omega} \times m_i [\boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}_S \cdot \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

代入 (6.7.27) 式后, 得到惯性力对基点 S 的主矩:

$$\boldsymbol{T}^* = -\boldsymbol{r}_C \times M \boldsymbol{w}_S - \boldsymbol{I}_S \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}_S \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (6.7.28)$$

如取质心为基点, 由于 $\boldsymbol{r}_C = 0$, 上式化为

$$\boldsymbol{T}^* = -\boldsymbol{I}_C \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}_C \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (6.7.29)$$

其中 \boldsymbol{I}_C 为刚体对质心的惯性张量

当系统含有多个刚体时, 只要将每个刚体的广义主动力或广义惯性力分别求出, 然后相加即可。容易证明, 当右旋坐标系和中心惯性主轴相重合时, 惯性力对 C 点之主矩可表为

$$\begin{aligned}
 T^* = & -[I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3]\mathbf{e}_1 - \\
 & -[I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1]\mathbf{e}_2 - \\
 & -[I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2]\mathbf{e}_3 \quad (6.7.30)
 \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 分别为按右旋顺序沿三个主轴所取的单位向量。

以下分别举例说明 Kane 方法在完整系统及非完整系统动力学问题中的应用。

例题6.7.1 用 Kane 方法建立曲轴消振器的运动微分方程。详细内容见例题 3.3.3, 此处不再重复。

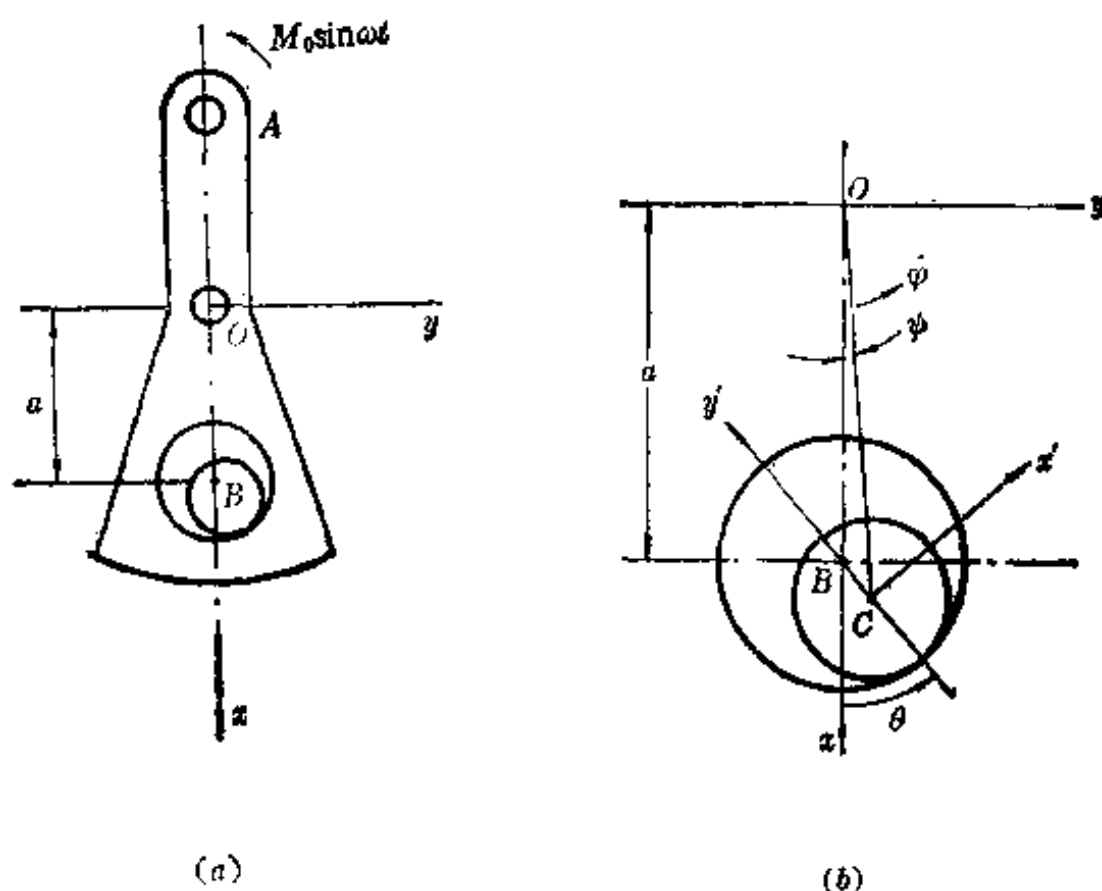


图 6.13

解 曲柄的运动可由 ϕ 表示, 振子的相对运动可由 θ 表示, 今取准速度如下:

$$u_1 = \dot{\phi}, \quad \dot{u}_2 = \dot{\theta} \quad (a)$$

曲柄的基点自然应取在 O 点, 此时 O 点偏速度当然为零, 其角速度为

$$\omega_A = u_1 \mathbf{k} \quad (b)$$

故其偏角速度为 \mathbf{k} 。

振子的基点应取在质心 C , 取坐标系 $Cx'y'$ 如图, Cy' 恒指向 B 点, 于是有

$$\mathbf{v}_C = [(R-r)\dot{\theta} + r_C\dot{\phi}\cos(\theta-\psi)]\mathbf{i}' - r_C\dot{\phi}\sin(\theta-\psi)\mathbf{j}' \quad (c)$$

由于

$$r_C\cos(\theta-\psi) \approx R-r+a=h \quad (d)$$

$$r_C\sin(\theta-\psi) = a\sin\theta \approx a\theta \quad (e)$$

故有

$$\mathbf{v}_C = [hu_1 + (R-r)u_2]\mathbf{i}' - a\theta u_1\mathbf{j}' \quad (f)$$

相应的偏速度为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1^C &= h\mathbf{i}' - a\theta\mathbf{j}' \\ \mathbf{v}_2^C &= (R-r)\mathbf{i}' \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

振子的角速度为

$$\omega = \left(u_1 + \frac{R-r}{r}u_2 \right) \mathbf{k}$$

相应的偏角速度为

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \mathbf{k} \\ \omega_2 &= \frac{R-r}{r}\mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

为了醒目以备查, 可列表如下:

k	v_k^A	ω_k^A	v_k^B	ω_k^B
1	0	\mathbf{k}	$h\mathbf{i}' - a\theta\mathbf{j}'$	\mathbf{k}
2	0	0	$(R-r)\mathbf{i}'$	$\frac{R-r}{r}\mathbf{k}$

其中上标 A, B 分别指曲柄及振子

将 (f) 式对时间求导以求 \mathbf{w}_C :

$$\mathbf{w}_C = [h\dot{u}_1 + (R-r)\dot{u}_2]\mathbf{i}' - (au_2u_1 + a\theta\dot{u}_1)\mathbf{j}' +$$

$$\begin{aligned}
& + [hu_1 + (R-r)u_2] \left(u_1 + \frac{R-r}{r} u_2 \right) \mathbf{j}' \\
& + a\theta u_1 \left(u_1 + \frac{R-r}{r} u_2 \right) \mathbf{i}'
\end{aligned} \quad (i)$$

由于

$$u_1 = \omega + \varepsilon(t) \approx \omega, \quad u_2 \ll u_1 \quad (j)$$

故可略去高阶小量以简化为:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_c &= [h\dot{u}_1 + (R-r)\dot{u}_2 + a\omega^2\theta] \mathbf{i}' \\
& + [hu_1 + (R-r)u_2] \left(u_1 + \frac{R-r}{r} u_2 \right) \mathbf{j}'
\end{aligned} \quad (k)$$

对于振子, 惯性力的主向量及主矩分别为

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_B^* &= -m\mathbf{w}_c = -m[h\dot{u}_1 + (R-r)\dot{u}_2 + a\omega^2\theta] \mathbf{i}' \\
& - m[hu_1 + (R-r)u_2] \left(u_1 + \frac{R-r}{r} u_2 \right) \mathbf{j}'
\end{aligned} \quad (l)$$

$$\mathbf{T}_B^* = - \left[I_1 \dot{u}_1 + I_1 \left(\frac{R-r}{r} \right) \dot{u}_2 \right] \mathbf{k} \quad (m)$$

对于曲柄, \mathbf{R}^* 不必求, 因为 $v_1^0 = v_2^0 = 0$, 只有主矩需求:

$$\mathbf{T}_A^* = -I_0 \dot{u}_1 \mathbf{k} \quad (n)$$

广义主动力很容易求:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_A &= M_0 \sin n\omega t \mathbf{k}_1 \\
\mathbf{R}_A &= \mathbf{R}_B = \mathbf{T}_B = 0
\end{aligned} \quad (o)$$

以下就列 Kane 方程:

$$\left. \begin{aligned}
\Sigma(\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{v}_1^s + \mathbf{T}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_1) + \Sigma(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_1^s + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\omega}_1) &= 0 \\
\Sigma(\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{v}_2^s + \mathbf{T}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_2) + \Sigma(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_2^s + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\omega}_2) &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (p)$$

其中

$$\begin{aligned}
\Sigma \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{v}_1^s &= -mh[h\dot{u}_1 + (R-r)\dot{u}_2 + a\omega^2\theta] + \\
& + ma\theta[hu_1 + (R-r)u_2] \left(u_1 + \frac{R-r}{r} u_2 \right) \\
& \approx -mh^2\dot{u}_1 - mh(R-r)\dot{u}_2
\end{aligned} \quad (q)$$

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{T}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_1 &= -J_0 \dot{u}_1 - \left[I_1 \dot{u}_1 + I_1 \left(\frac{R-r}{r} \right) \dot{u}_2 \right] \\ &= -(I_0 + I_1) \dot{u}_1 - I_1 \left(\frac{R-r}{r} \right) \dot{u}_2\end{aligned}\quad (r)$$

$$\Sigma \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{v}_2^s = -m(R-r)[h\dot{u}_1 + (R-r)\dot{u}_2 + a\omega^2\theta] \quad (s)$$

$$\Sigma \mathbf{T}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_2 = -I_1 \left[\dot{u}_1 + \left(\frac{R-r}{r} \right) \dot{u}_2 \right] \left(\frac{R-r}{r} \right) \quad (t)$$

Kane 方程(p)给出:

$$\left. \begin{aligned}(I_0 + I_1 + mh^2)\dot{u}_1 + (I_1 + mhr) \left(\frac{R-r}{r} \right) \dot{u}_2 &= M_0 \sin n\omega t \\ (I_1 + mhr) \left(\frac{R-r}{r} \right) \dot{u}_1 + (I_1 + mr^2) \left(\frac{R-r}{r} \right)^2 \dot{u}_2 \\ &+ ma(R-r)\omega^2\theta = 0\end{aligned} \right\} \quad (u)$$

这和例题 3.3.3 所得结果完全一致, 和例题 3.3.3 相比较就会发现, 在简单问题中 Kane 方法并未显示其多少优越性, 因为不管问题多么简单, 都要经过选择准速度, 求偏速度, 求广义主动力及广义惯性力这一套刻板的步骤, 而这些步骤对简单问题有时反而显得笨拙、累赘。Kane 方法的优越性主要是在复杂力学系统中, 可以利用符号运算程序自动地列方程, 大大节省人力, 可以避免出错。由此看来, 经典方法和现代方法各有长处, 不可偏废, 它们是互相补充的, 并各自有其存在的价值。

Kane 方程给出了准速度应满足的一阶运动微分方程, 这组方程还应和联系准速度与广义速度的运动学关系式联立求解, 才能得到问题的全部解。另外, 在应用 Kane 方法时, 应注意适当地选择准坐标使速度表达式最简单, 因为速度表达式愈简单时, 偏速度也愈简单, 这对于求广义主动力或广义惯性力都是很有利的。

例题 6.7.2 半径为 a , 质量为 m 的对称圆盘在粗糙水平面上作纯滚动, 其三个中心主惯性矩分别为 I_1, I_1, I_2 。试列出滚盘的运动方程。

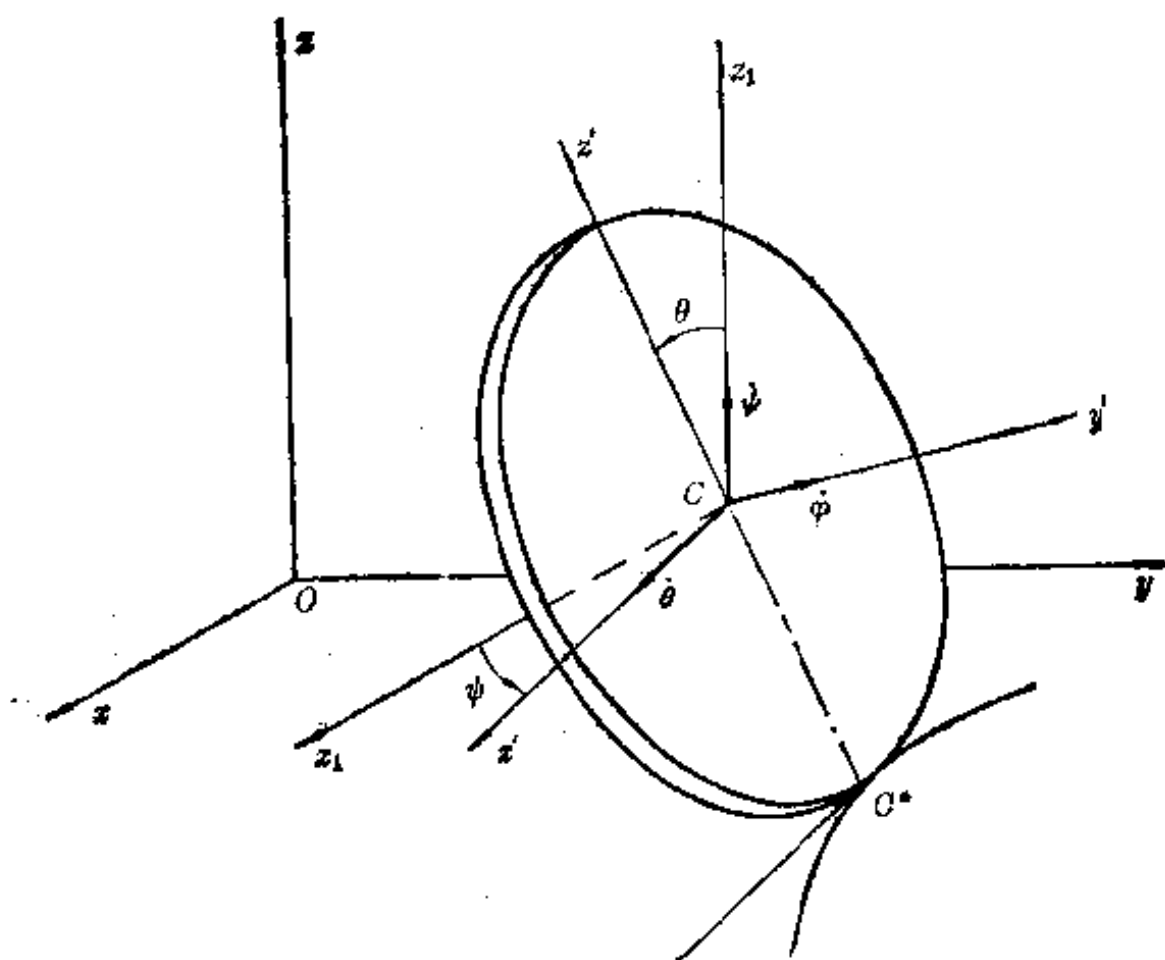


图 6.14

解 滚盘的位形需用质心的两个坐标 x_c, y_c 及三个方位角 ψ, θ, φ 决定, 由于本题非完整的约束条件为接触点 C^* 的速度为0, 即 $\dot{x}_{C^*}=0, \dot{y}_{C^*}=0$, 使得独立的广义速度只有3个, 系统有三个自由度。取动坐标系 $Cx'y'z'$ 如图6.14。 Cx' 轴在水平面内, Cy' 轴和盘面正交, Cz' 轴沿接触点与质心的连线 C^*C 方向, 用这个参考系表示的角速度为

$$\omega = \dot{\theta}e_1 + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta)e_2 + \dot{\psi}\cos\theta e_3 \quad (a)$$

其中 e_1, e_2, e_3 为固结在参考系 $Cx'y'z'$ 上的单位向量。取准速度如下

$$u_1 = \dot{\theta}, \quad u_2 = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta, \quad u_3 = \dot{\psi}\cos\theta \quad (b)$$

角速度可表为

$$\omega = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \quad (c)$$

利用无滑动滚动条件, C 点速度为

$$\mathbf{v}_C = \omega \times a \mathbf{e}_3 = -u_1 a \mathbf{e}_2 + u_2 a \mathbf{e}_1 \quad (d)$$

由(c)、(d)可得偏速度及偏角速度如下:

k	1	2	3
\mathbf{v}_k^C	$-a \mathbf{e}_2$	$a \mathbf{e}_1$	0
ω_k	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3

动坐标系 $Cx'y'z'$ 之角速度不同于滚盘之角速度, 应为

$$\omega' = u_1 \mathbf{e}_1 + (u_2 - \phi) \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \quad (e)$$

将 \mathbf{v}_C 对 t 求导以得 C 点加速度:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_C &= \dot{\mathbf{v}}_C \\ &= -\dot{u}_1 a \mathbf{e}_2 - u_1 a \omega' \times \mathbf{e}_2 + \dot{u}_2 a \mathbf{e}_1 + u_2 a \omega' \times \mathbf{e}_1 \\ &= a(\dot{u}_2 + u_1 u_3) \mathbf{e}_1 + a(-\dot{u}_1 + u_2 u_3) \mathbf{e}_2 - a[u_1^2 + u_2(u_2 - \phi)] \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (f)$$

于是惯性力的主向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^* &= -m \mathbf{a}_C \\ &= -ma(\dot{u}_2 + u_1 u_3) \mathbf{e}_1 - ma(-\dot{u}_1 + u_2 u_3) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + ma[u_1^2 + u_2(u_2 - \phi)] \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (g)$$

为了求惯性力的主矩, 需先求角加速度:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{d}{dt}(u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) \\ &= \dot{u}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{u}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{u}_3 \mathbf{e}_3 + u_1 \omega' \times \mathbf{e}_1 + u_2 \omega' \times \mathbf{e}_2 + u_3 \omega' \times \mathbf{e}_3 \\ &= (\dot{u}_1 - u_3 \phi) \mathbf{e}_1 + \dot{u}_2 \mathbf{e}_2 + (\dot{u}_3 + u_1 \phi) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (h)$$

于是惯性力的主矩为

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_C^* &= -[I_1(\dot{u}_1 - u_3 \phi) - (I_2 - I_1)u_2 u_3] \mathbf{e}_1 - I_2 \dot{u}_2 \mathbf{e}_2 \\ &\quad - [I_1(\dot{u}_3 + u_1 \phi) - (I_1 - I_2)u_1 u_2] \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (i)$$

广义惯性力为

$$F_1^* = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{v}_1^C + \mathbf{T}_O^* \cdot \boldsymbol{\omega}_1$$

$$= ma^2(-\dot{u}_1 + u_2 u_3) - I_1(\dot{u}_1 - u_3 \phi) + (I_2 - I_1)u_2 u_3 \quad (j)$$

$$F_2^* = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{v}_2^C + \mathbf{T}_O^* \cdot \boldsymbol{\omega}_2$$

$$= -ma^2(\dot{u}_2 + u_1 u_3) - I_2 \dot{u}_2 \quad (k)$$

$$F_3^* = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{v}_3^C + \mathbf{T}_O^* \cdot \boldsymbol{\omega}_3$$

$$= -I_1(\dot{u}_3 + u_1 \phi) + (I_1 - I_2)u_1 u_2 \quad (l)$$

圆盘所受唯一主动力为重力, 对 O 点之主矩为零, 故广义主动力为

$$F_1 = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_1^C = mga \sin \theta \quad (m)$$

$$F_2 = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_2^C = 0 \quad (n)$$

$$F_3 = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_3^C = 0 \quad (o)$$

利用运动学关系

$$\theta = u_1, \quad \dot{\psi} = \frac{u_3}{\cos \theta}, \quad \phi = u_2 - u_3 \operatorname{tg} \theta \quad (p)$$

将广义惯性力中的 ϕ 代之以准速度后, 即可由 Kane 方程给出以下的运动方程:

$$\left. \begin{aligned} (I_1 + ma^2)\dot{u}_1 &= (I_2 + ma^2)u_2 u_3 - I_1 u_3^2 \operatorname{tg} \theta + mga \sin \theta \\ (I_2 + ma^2)\dot{u}_2 &= -ma^2 u_1 u_3 \\ I_1 \dot{u}_3 &= I_1 \operatorname{tg} \theta u_1 u_3 - I_2 u_1 u_2 \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

将 (p)、(q) 联立求解, 可解 6 个未知量: $u_1, u_2, u_3, \theta, \psi, \phi$ 。这是一组一阶非线性微分方程组, 已经整理成标准形, 便于利用数值积分程序在计算机上求解。

现在研究滚盘运动的特解: $\theta = 0, \dot{\theta} = \omega_1 = 0, \omega_2 \omega_3 = 0$, 显然能满足方程 (q)。 $\omega_2 \omega_3 = 0$ 代表两种情况: (1) $\omega_2 \neq 0, \omega_3 = 0$: 表示圆盘保持盘面为铅垂面作直线滚动, (2) $\omega_3 \neq 0, \omega_2 = 0$: 表示圆盘绕铅垂轴作定轴转动。

当圆盘受到扰动后,三个角速度将产生偏离如下

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= e_1 = \theta \\ \omega_2 &= \omega_{20} + e_2 \\ \omega_3 &= \omega_{30} + e_3 \end{aligned} \right\} \quad (r)$$

将以上关系代入方程(q),并考虑到定常状态的特解及略去高阶小量,即有

$$\left. \begin{aligned} (I_1 + ma^2) \dot{e}_2 &= -ma^2 \omega_{30} \dot{\theta} \\ (I_1 + ma^2) \ddot{\theta} + I_1 \omega_{30}^2 \theta - (I_2 + ma^2) (\omega_{20} e_3 + \omega_{30} e_2) - mga \theta &= 0 \\ I_1 \dot{e}_3 + I_2 \omega_{20} \dot{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (s)$$

由(s)的一、三两方程可积分求解如下

$$\left. \begin{aligned} (I_1 + ma^2) e_2 &= -ma^2 \omega_{30} \theta \\ I_1 e_3 &= -I_2 \omega_{20} \theta \end{aligned} \right\} \quad (t)$$

将(t)代入(s)的第二方程,可得

$$(I_1 + ma^2) \ddot{\theta} + \left[\omega_{20}^2 \frac{I_2}{I_1} (I_2 + ma^2) + \omega_{30}^2 (I_1 + ma^2) - mga \right] \theta = 0 \quad (u)$$

在圆盘滚动的情形,即 $\omega_{30} = 0$ 时,可得稳定的必要条件为

$$\omega_{20} > \sqrt{\frac{I_1 mga}{I_2 (I_2 + ma^2)}} \quad (v)$$

在圆盘绕竖轴转动的情形,即 $\omega_{20} = 0$ 时,可得稳定的必要条件为

$$\omega_{30} > \sqrt{\frac{mga}{I_1 + ma^2}}$$

6.8 再论非完整系统动力学的积分变分原理

在第五章中曾讨论过非完整系统的 Hamilton 原理,我们曾指出,作为泛函驻值原理的 Hamilton 原理

$$\delta \int_{t_0}^t L dt = 0 \quad (6.8.1)$$

对非完整系统不适用, 但非驻值原理的两种形式可推广至非完整系统:

(1) Hölder 形式的积分原理: 当采用微分-变分交换关系的 Hölder 定义

$$\frac{d}{dt} \delta q_j - \delta \dot{q}_j = 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (6.8.2)$$

后, 有以下形式的积分原理:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' W) dt = 0 \quad (6.8.3)$$

(2) Сушлов 形式的积分原理:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta T + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{d}{dt} (\delta q_j) - \delta \dot{q}_j \right] + \delta' W \right\} dt = 0 \quad (6.8.4)$$

此时应取 Сушлов 定义的“d-δ”交换关系。

两种形式的积分原理和它们各自相适应的 d-δ 交换关系相结合后都适用于一阶非完整系统, 并可据此推导一阶非完整系统的动力学方程。

本节将讨论积分原理(6.8.3)及(6.8.4)向准坐标的变换, 并指出准坐标形式的积分原理与我们已建立的某些非完整系统动力学方程, 如 Чаплыгин 方程, Boltzmann-Hamel 方程之间的联系。

在第五章中我们已看到, 在位形空间中研究一阶非完整系统动力学必须推广虚位移的概念, 采用 Appell-Четаев 定义。先不考虑非完整约束, 而任选 n 个准速度

$$\omega_k = \omega_k(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (k, j=1, \dots, n) \quad (6.8.5)$$

如 ω_k 是独立的, 其 Jacobi 行列式不等于零:

$$\frac{\partial(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)}{\partial(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)} \neq 0$$

于是可解出 $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_s, \omega_k, t)$ ($j, s, k = 1, \dots, n$) (6.8.6)

现在对(6.8.5)及(6.8.6)式应用 Appell-Четаев 定义, 便可得到以下关系: (6.3.2 节虽得到类似结果, 但出发点不同, 此处不用 $\delta \dot{r}$ 空间虚位移概念)

$$\left. \begin{aligned} \delta q_j &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \pi_k & (j=1, \dots, n) \\ \delta \pi_k &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j & (k=1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (6.8.7)$$

以下着重讨论 Hölder 形式的积分原理向准坐标的变换, 主动力的虚功可表为

$$\delta' W = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \pi_k \quad (6.8.8)$$

定义 P_k 为准坐标形式的广义力:

$$P_k = \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \quad (k=1, \dots, n) \quad (6.8.9)$$

因之主动力的虚功可表为

$$\delta' W^* = \sum_{k=1}^n P_k \delta \pi_k \quad (6.8.10)$$

至于积分原理中的 δT , 将证明它等于以准坐标为自变量的动能 T^* 的变分 δT^* , 证明如下: 由于

$$T^*(\omega, q, t) = T(\dot{q}(\omega, q, t), q, t) \quad (6.8.11)$$

故有

$$\begin{aligned} \delta T^* &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \delta \omega_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \omega_k + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta \dot{q}_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \omega_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} \delta q_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \omega_k + \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} \delta q_k \right) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j = \delta T
\end{aligned} \tag{6.8.12}$$

将(6.8.9)及(6.8.12)式代入 Hölder 形式积分原理, 则有

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T^* + \delta' W^*) dt = 0 \tag{6.8.13}$$

由(6.8.7)式可知, 时端条件应变为

$$\delta \pi_k|_{t_0} = 0, \quad \delta \pi_k|_{t_1} = 0 \quad (k=1, \dots, n) \tag{6.8.14}$$

完全类似地, Сулов 形式的积分原理将变为

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta T^* + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{d}{dt} (\delta q_j) - \delta \dot{q}_j \right] + \delta' W^* \right\} dt = 0 \tag{6.8.15}$$

时端条件仍为(6.8.14)式。

到此为止, 尚未应用非完整约束条件, 因之两种原理对于完整系统及非完整系统都是适用的, 对于非完整系统, 只需令后面 $(n-m)$ 个 ω_k 都等于零, 即 $\omega_{m+1} = \omega_{m+2} = \dots = \omega_n = 0$ 。

以下要由 Hölder 形式积分原理推导有关准坐标形式的非完整系统动力学方程。首先推导 Чаплыгин 方程, 为此, 我们列出准坐标形式的一种交换差关系(见(6.5.44)式):

$$(\delta q_j)' - \delta \dot{q}_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} [(\delta \pi_k)' - \delta \omega_k]$$

$$+\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\omega_k}-\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\pi_k}\right]\delta\pi_k \quad (j=1,\dots,n) \quad (6.8.16)$$

按 Hölder 定义的交换关系, 等式左端应为零, 再将各项乘以 $\frac{\partial\omega_r}{\partial\dot{q}_j}$,

然后按指标 j 求和:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial\omega_r}{\partial\dot{q}_j} \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\omega_k} [(\delta\pi_k)' - \delta\omega_k] + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial\omega_r}{\partial\dot{q}_j} \cdot \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\omega_k}-\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\pi_k}\right]\delta\pi_k=0 \quad (6.8.17)$$

由于

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial\omega_r}{\partial\dot{q}_j} \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\omega_k} = \delta_{rk} \quad (6.8.18)$$

其中 δ_{rk} 为 Kronecker 符号, 于是 (6.8.17) 式化为

$$(\delta\pi_r)' - \delta\omega_r + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial\omega_r}{\partial\dot{q}_j} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\omega_k}-\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\pi_k}\right]\delta\pi_k=0 \quad (r=1,\dots,n) \quad (6.8.19)$$

现在引入约束条件, 即

$$\delta\pi_r=0, \quad \delta\omega_r=0 \quad (r=m+1, m+2, \dots, n) \quad (6.8.20)$$

于是交换关系 (6.8.19) 变为

$$(\delta\pi_r)' - \delta\omega_r + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial\omega_r}{\partial\dot{q}_j} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\omega_k}-\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\pi_k}\right]\delta\pi_k=0 \quad (r=1,\dots,m) \quad (6.8.21)$$

由于

$$\delta T^* = \sum_{r=1}^m \frac{\partial T^*}{\partial\omega_r} \delta\omega_r + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial q_j} \delta q_j \quad (6.8.22)$$

将(6.8.21)式代入上式后可得:

$$\begin{aligned} \delta T^* = & \sum_{r=1}^m \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} (\delta \pi_r) + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \delta \pi_k + \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^m \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} \right] \delta \pi_k \end{aligned} \quad (6.8.23)$$

由于

$$\sum_{r=1}^m \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j}, \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} \triangleq \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} \quad (6.8.24)$$

故(6.8.23)式可化为

$$\begin{aligned} \delta T^* = & \sum_{k=1}^m \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} (\delta \pi_k) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} \delta \pi_k + \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} \right] \delta \pi_k \end{aligned} \quad (6.8.25)$$

主动力虚功为

$$\delta' W = \sum_{k=1}^m P_k \delta \pi_k \quad (6.8.26)$$

将(6.8.25)及(6.8.26)式代入 Hölder 形式的积分原理, 并将 δT^* 表达式右端第一项作分部积分, 考虑到时端条件(6.8.14)后, 即有

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} \right] - P_k \right\} \\ \cdot \delta \pi_k dt = 0 \end{aligned} \quad (6.8.27)$$

由于诸 $\delta \pi_k$ 是互相独立的, 故以上方程导致 m 个独立方程, 即广义 Чаплыгин 方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \pi_k} \right] = P_k$$

$$(k=1, \dots, m) \quad (6.8.28)$$

现在再由 Hölder 形式积分原理推导 Boltzmann-Hamel 方程, 为此, 我们利用另一种形式的 d - δ 交换差关系(见(6.5.28)式):

$$\begin{aligned} (\delta\pi_k)' - \delta\omega_k = & \sum_{j=1}^n \frac{\partial\omega_k}{\partial\dot{q}_j} [(\delta q_j)' - \delta\dot{q}_j] + \\ & + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial\omega_k}{\partial\dot{q}_r} - \frac{\partial\omega_k}{\partial q_r} \right) \frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_s} \delta\pi_s \end{aligned} \quad (k=1, \dots, n) \quad (6.8.29)$$

现在引入 Hölder 交换关系(6.8.2)得:

$$\begin{aligned} (\delta\pi_k)' - \delta\omega_k = & \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial\omega_k}{\partial\dot{q}_r} - \frac{\partial\omega_k}{\partial q_r} \right) \frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_s} \delta\pi_s \end{aligned} \quad (k=1, \dots, n) \quad (6.8.30)$$

于是我们有

$$\begin{aligned} \delta T^* = & \sum_{k=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial\omega_k} \delta\omega_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial\pi_k} \delta\pi_k \\ = & \sum_{k=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial\omega_k} (\delta\pi_k)' + \sum_{k=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial\pi_k} \delta\pi_k - \\ & - \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial\omega_k} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial\omega_k}{\partial\dot{q}_r} - \frac{\partial\omega_k}{\partial q_r} \right) \frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_s} \delta\pi_s \end{aligned} \quad (6.8.31)$$

将上式最后一项下标 s, k 互易后, 经过分部积分及利用时端条件(6.8.14), 于是 Hölder 形式的积分原理给出:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial\omega_k} - \frac{\partial T^*}{\partial\pi_k} + \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial\omega_k} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_r} - \frac{\partial\omega_s}{\partial q_r} \right) \frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_k} - \right.$$

$$-P_k \} \delta \pi_k dt = 0 \quad (6.8.32)$$

现在引入非完整约束条件

$$\delta \pi_k = 0, \quad (k = m, m+1, \dots, n) \quad (6.8.33)$$

于是由前面 m 个 $\delta \pi_k$ 的独立性给出 Boltzmann-Hamel 方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} + \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_s} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \omega_s}{\partial q_r} \right) \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_k} = P_k$$

$$(k = 1, 2, \dots, m) \quad (6.8.34)$$

和以前所述一样,需待第三项中的导数求出后,方可利用约束条件

$$\omega_k = 0 \quad (k = m+1, \dots, n) \quad (6.8.35)$$

利用 Суслов 形式的积分原理及相应的 d - δ 交换关系,同样可以推导出以上两种非完整系统的动力学方程,现留给读者作为练习。

第六章 习 题

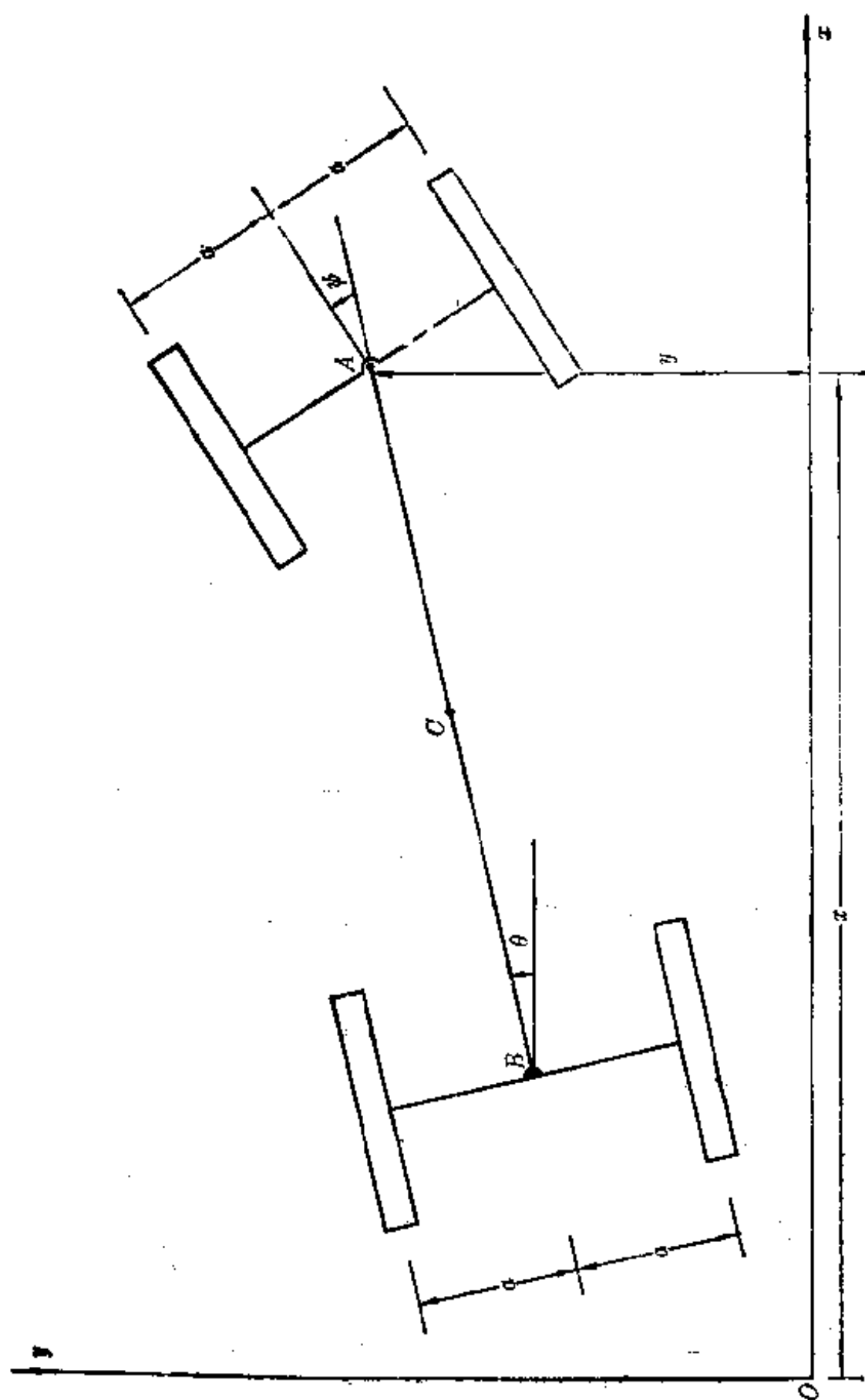
6.1 半径为 a , 质量为 M 的均质圆盘在粗糙水平面上作无滑动的滚动,用如图 6.14 所示的 C 点坐标及三个 Euler 角决定圆盘位置,用 Routh 方程列出圆盘的运动方程。

6.2 同上题,用 Чаплыгин 方程求解。

6.3 同上题,用 Boltzmann-Hamel 方程求解。

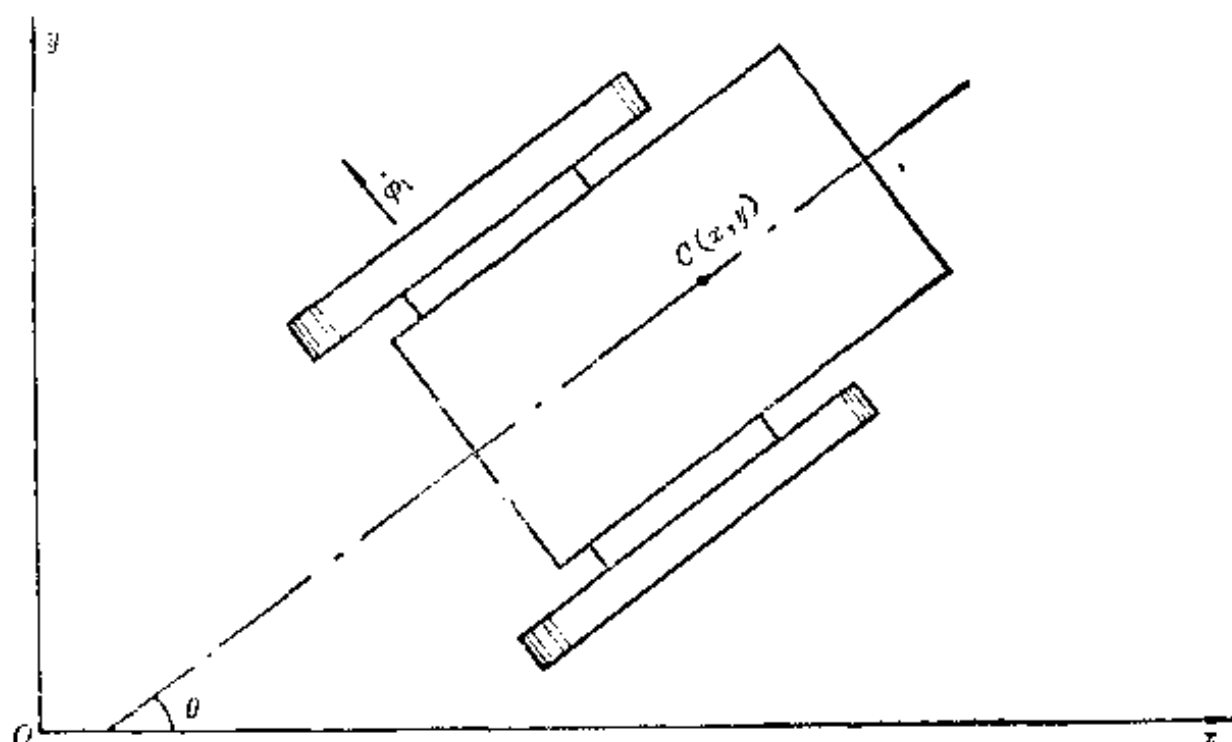
6.4 同上题,用 Appell 方程求解。

6.5 四轮小车如图所示,车架 AB 与后轴刚性连结,与前轴在 A 点铰接。设前后轮之半径皆为 R ,轮距皆为 $2a$, AB 长为 l ,车架及后轴重 P_1 ,其重心 C 至 B 点距离为 s ,对重心轴(垂直于图面)之转动惯量为 I_1 。前轴重 P_2 ,对其重心之转动惯量为 I_2 。每个后轮重 P_3 ,其中心主惯性矩为 A_1, C_1, C_1 。每个前轮重 P_4 ,其中心主惯性矩为 A_2, C_2, C_2 。每个车轮在水平面上作无滑动的滚动。列出小车在任意主动力作用下的运动方程。(任选一种经典方法)。



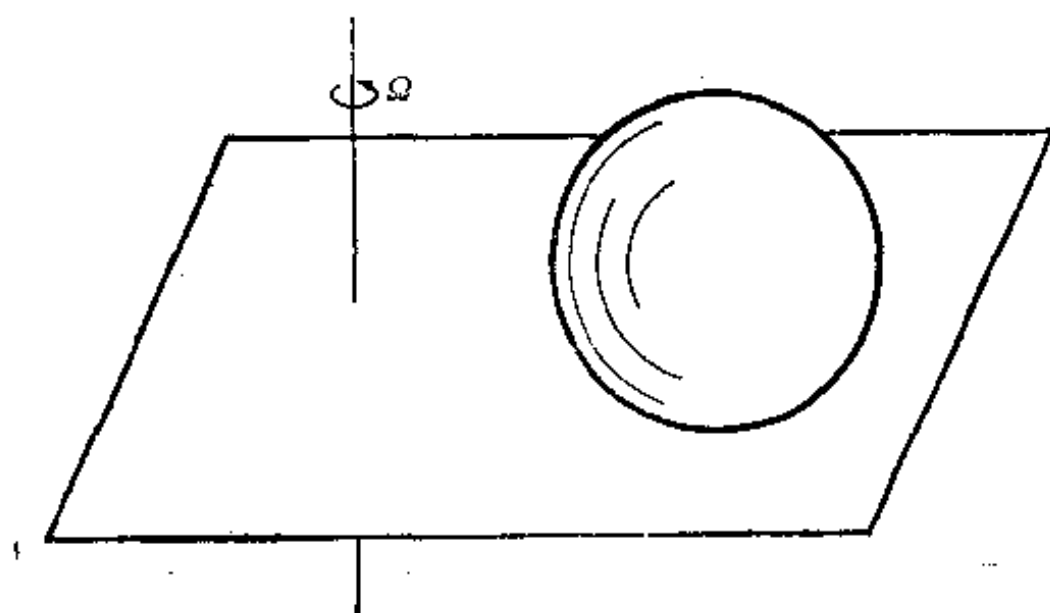
題 6-5

6.6 履带式拖拉机如图所示,履带仅保证沿纵向作无滑动滚动,设 r 为履带轮之半径, $2l$ 为履带轮轴距。 (1) 以 x, y, φ, θ 为广义坐标, 列出非完整约束方程 (2) 设作用在左右履带上之力矩分别为 $M_1(t)$ 及 $M_2(t)$, m 为拖拉机质量, 履带及轮之质量略去不计, I 为拖拉机对于过质心之铅垂轴之转动惯量。试列出拖拉机之运动方程。(任选一种经典方法)



题 6.6

6.7 一均质圆球放在一绕铅垂轴以等角速 Ω 转动的粗糙水平面上如图



题 6.7

所示, 设圆球放上去时, 接触点间没有相对滑动, 试求此后圆球的运动。设圆球的质量为 M , 半径为 a 。任选一种经典方法列方程。

6.8 同上题, 用 Kane 方法列方程。

6.9 用 Kane 方法列出带有天线的人造卫星的运动方程 (见第三章例题 3.5.1)

6.10 用 Hamilton 原理的 Сулов 形式推导广义 Напльгин 方程

6.11 用 Hamilton 原理的 Сулов 形式推导 Boltzmann-Hamel 方程

习 题 答 案

第 一 章

1.1 $x = R \cos \theta - (l + R\omega t - R\theta) \sin \theta$

$y = R \sin \theta + (l + R\omega t - R\theta) \cos \theta$

(θ 为绳索之摆角)

1.2 约束方程: $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0$

变换关系: $-\frac{x_1}{y_1} = \operatorname{tg} \omega t$

$-\frac{x_2}{y_2} = \operatorname{tg} \omega t$

若取 A 点到 z 轴距离 r 及 z_1 和 AB 与水平面倾角 θ 为广义坐标, 则

$x_1 = -r \sin \omega t, y_1 = r \cos \omega t, z_1 = z_1$

$x_2 = -(r + l \cos \theta) \sin \omega t, y_2 = (r + l \cos \theta) \cos \omega t, z_2 = z_1 + l \sin \theta$

1.3 $n=2$. 取 φ_1, φ_2 为广义坐标

$x_c = l_1 \cos \varphi_1, y_c = l_1 \sin \varphi_1, x_D = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \theta_1$

$y_D = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \theta_1, x_E = l - l_3 \cos \varphi_2, y_E = l \sin \varphi_2$

其中 θ_1, θ_2 可由下式决定:

$l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \theta_1 = l_3 \sin \theta_2 + l_4 \sin \varphi_2$

$l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \theta_1 + l_3 \cos \theta_2 + l_4 \cos \varphi_2 = l$

1.4 $x = x_0 + l \sin \varphi, y = y_0 + l \cos \varphi$

非定常完整约束

1.5 $x = a \cos \omega t + (R - r) \cos (\omega t + \varphi) + \xi \cos \left(\frac{R-r}{r} \varphi - \omega t \right)$

$+ \eta \sin \left(\frac{R-r}{r} \varphi - \omega t \right)$

$y = a \sin \omega t + (R - r) \sin (\omega t + \varphi) - \xi \sin \left(\frac{R-r}{r} \varphi - \omega t \right)$

$+ \eta \cos \left(\frac{R-r}{r} \varphi - \omega t \right)$

1.6 $x \phi \cdot \left(\frac{h}{\cos \alpha} - x \right) \phi$, 其中 x 为小轮至上圆锥体顶点之距。若 x 为广义

坐标, 则约束是非完整的, 若 x 为常数, 即为完整约束。

$$1.7 \quad \text{i) ii) 不可积, iii) 可积, } (x+y+z)^2 - (xy+yz+xz) = \text{const.}$$

$$\text{iv) 可积, } e^x(x^2+y^2+z^2) = \text{const.}$$

$$1.8 \quad \dot{x} + \dot{\theta}(-\xi \sin \theta - \eta \cos \theta) = 0$$

$$\dot{y} + \dot{\theta}(\xi \cos \theta + \eta \sin \theta) = 0$$

$$1.9 \quad \text{i) } \dot{x}_C - a(\dot{\psi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \cos \theta \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi) = 0,$$

$$\dot{y}_C - a(\dot{\psi} \sin \theta \sin \psi - \dot{\theta} \cos \theta \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi) = 0,$$

$$\dot{z}_C + a\dot{\theta} \sin \theta = 0.$$

$$\text{ii) } \dot{x} - a\dot{\phi} \cos \psi = 0, \dot{y} - a\dot{\phi} \sin \psi = 0$$

$$1.10 \quad \dot{x}_C \sin \psi - \dot{y}_C \cos \psi - a\dot{\theta} \cos \theta = 0$$

$$1.11 \quad \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta - a\dot{\theta} - R\dot{\varphi}_1 = 0$$

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta + a\dot{\theta} - R\dot{\varphi}_2 = 0$$

$$\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta = 0$$

(其中 φ_1, φ_2 是轮的自转角)

$$1.12 \quad \dot{x} - R\dot{\varphi} \sin \theta - \dot{\theta}(r\varphi_1 - y) = 0,$$

$$\dot{y} - R\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\theta}(r\varphi_1 - y) \operatorname{ctg} \theta - 2r\dot{\varphi}_1 = 0,$$

$$\dot{x} \sin(\theta - \alpha) - R\dot{\varphi} \sin \theta \sin(\theta - \alpha) - \dot{\theta}(r\varphi_2 + x \sin \alpha - y \cos \alpha) \sin \theta \\ + 2r\dot{\varphi}_2 \sin \alpha \sin(\theta - \alpha) = 0,$$

$$\dot{y} \cos(\theta - \alpha) + R\dot{\varphi} \cos \theta \sin(\theta - \alpha) + \dot{\theta}(r\varphi_2 - x \sin \alpha - y \cos \alpha) \cos \theta \\ - 2r\dot{\varphi}_2 \cos \alpha \sin(\theta - \alpha) = 0,$$

$$n=2.$$

$$1.13 \quad \dot{x} \sin(\theta + \gamma) - \dot{y} \cos(\theta + \gamma) = 0,$$

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta + l\dot{\theta} = 0,$$

$$\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - a\dot{\theta} + r_1\dot{\varphi}_1 = 0,$$

$$\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta + a\dot{\theta} - r_1\dot{\varphi}_1 = 0,$$

$$x \cos(\theta + \gamma) + y \sin(\theta + \gamma) - c(\theta + \gamma) - r_2\dot{\varphi}_3 = 0,$$

$$\dot{x} \cos(\theta + \gamma) + \dot{y} \sin(\theta + \gamma) + c(\theta + \gamma) - r_2\dot{\varphi}_4 = 0.$$

$$1.14 \quad T = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{P}{g} + \frac{Q}{2g} \right) \dot{x}_1^2 + \frac{3}{2} \frac{Q}{g} \dot{x}_2^2 - \frac{Q}{g} \dot{x}_1 \dot{x}_2 \right],$$

$$V = \left(\frac{P}{g} x_1 + \frac{Q}{g} x_2 \right) g \sin \alpha.$$

$$1.15 \quad T = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{g} + \frac{Q}{g} \right) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{g} \right) \dot{x}_2^2 + \frac{Q}{g} \dot{x}_1 \dot{x}_2 \cos \alpha,$$

$$V = \left(\frac{P}{g} + \frac{Q}{g} \right) x_1 \sin \alpha.$$

$$1.16 \quad T = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{l}{2} \omega \sin \varphi \right)^2 + \left(\frac{l}{2} \dot{\varphi} \right)^2 \right] + \frac{ml^2}{6} (\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \sin^2 \varphi)$$

$$V = \frac{mg}{2} l \cos \varphi + \frac{k}{2} l^2 (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)^2$$

$$1.17 \quad T = \frac{1}{2} [m_3 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + A \dot{\theta}^2 + C \dot{\varphi}^2 + I_1 \dot{\phi}_1^2 + I_2 \dot{\phi}_2^2]$$

其中: m_3 为第三(上面)圆柱体的质量, A 及 C 分别为第三圆柱体的两个中心主转动惯量, I_1 及 I_2 分别为第一、第二圆柱体对母线的转动惯量。

$$1.18 \quad \text{i)} T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{5} m a^2 (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta)$$

$$\text{ii)} T = \frac{1}{2} m \left[\frac{7}{5} a^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{2}{5} a \omega_3^2 \right]$$

$$1.19 \quad x_1 = \frac{c_3}{c_1} \sin \varphi + \frac{g}{2c_1^2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{g}{2c_1^2} \varphi - \frac{l}{2} \cos \varphi + c_4,$$

$$y_1 = -\frac{c_3}{c_1} \cos \varphi - \frac{g}{2c_1^2} \cos^2 \varphi - \frac{l}{2} \sin \varphi + c_5,$$

$$x_2 = \frac{c_3}{c_1} \sin \varphi + \frac{g}{2c_1^2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{g}{2c_1^2} \varphi + \frac{l}{2} \cos \varphi + c_4,$$

$$y_2 = -\frac{c_3}{c_1} \cos \varphi - \frac{g}{2c_1^2} \cos^2 \varphi + \frac{l}{2} \sin \varphi + c_5,$$

$$\varphi = c_1 t + c_2.$$

$$1.20 \quad \ddot{x} - \lambda [x - f(t)] = 0, \ddot{y} - g - \lambda y = 0.$$

第二章

$$2.1 \quad \left(\frac{M}{2} + m \right) R \ddot{\varphi} + m R l \cos(\varphi - \psi) \ddot{\psi} + m R \sin(\varphi - \psi) \dot{\psi}^2 + m g R \sin \varphi = 0,$$

$$R \cos(\varphi - \psi) \ddot{\varphi} + l \ddot{\psi} - R \sin(\varphi - \psi) \dot{\varphi}^2 + g \sin \psi = 0.$$

$$2.2 \quad \left(M + \frac{m}{2} \right) R \ddot{\theta} - \frac{1}{2} (R - r) \ddot{\varphi} = 0,$$

$$\frac{3}{2} (R - r) \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} R \ddot{\theta} + g \sin \varphi = 0.$$

$$2.3 \quad \frac{3}{2} m \ddot{x}_1 - m g + k(x_1 - x_2) = 0,$$

$$2mx_1 + 2mg - k(x_1 - x_2) = 0.$$

$$2.4 \quad \rho^2 > \frac{m + \frac{M}{2}}{m - m_1} r^2$$

$$2.5 \quad \varepsilon = \frac{6Mg}{(2P_1 + 3P_2)r^2}, \quad Q_0 = \frac{2Mg}{(2P_1 + 3P_2)r}.$$

$$2.6 \quad a_A = a_B = 3mg / (9M + 4m), \quad \varepsilon = \sqrt{2} a_A / l.$$

$$2.7 \quad \ddot{\varphi} - \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - \frac{g}{R} \sin \varphi + \frac{k}{m} (\varphi - \varphi_0) = 0.$$

$$2.8 \quad \varphi = \frac{M}{52ma^2} t^2 + \frac{M}{676k} \left(1 - \cos 1.02 \sqrt{\frac{k}{ma^2}} t \right),$$

$$\psi = \frac{M}{26k} \left(1 - \cos \frac{\sqrt{26}}{5} \sqrt{\frac{k}{ma^2}} t \right).$$

$$2.9 \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{b[m(a-b+c)^2 + J_A]}{mg[b^2c - (a-b)^2]}}$$

$$2.10 \quad \text{循环积分: } \frac{4}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi = C,$$

$$\text{能量积分: } \frac{2}{3} m l^2 \dot{\varphi} + \frac{C}{2} + mgl \cos \varphi = h.$$

$$2.11 \quad q_1 = \left(\beta \alpha + \frac{1}{2} \beta b A^2 \right) t - \frac{\beta b A^2}{4\sqrt{2b_1 + b\beta^2}} \sin 2(\sqrt{2b_1 + b\beta^2} t + \alpha) + C$$

$$q_2 = A \sin(\sqrt{2b_1 + b\beta^2} t + \alpha).$$

其中 A, α, β, C 是积分常数。

$$2.12 \quad z - \cos^2 \alpha (z\dot{\varphi}^2 - mg) = 0, \quad z^2 \ddot{\varphi} + 2z\dot{z}\dot{\varphi} = 0$$

$$\text{循环积分: } z^2 \dot{\varphi} = C$$

$$\text{能量积分: } z^2 + \cos^2 \alpha (C\dot{\varphi} + 2gz) = h$$

$$2.13 \quad \ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0,$$

$$\ddot{\psi} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \cdot \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0.$$

$$\text{循环积分: } \dot{\varphi} \sin^2 \theta = C_1$$

$$\text{能量积分: } \dot{\theta}^2 + C_1^2 - \frac{g}{R} \cos \theta = h$$

$$2.14 \quad I_2(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \sin \theta) = C_1$$

$$(I + Ma^2 \sin^2 \theta + I_1 \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + C_1 \sin \theta = C_2$$

$$\frac{1}{2}(Ma^2 + I_1)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(Ma^2 \sin^2\theta + I_1 \cos^2\theta + I)\dot{\phi} - Mga \cos\theta = c,$$

$$2.15 \quad q_1 = \frac{h'}{\sqrt{2}} \int \frac{dq_2}{\sqrt{f(q_2) \{f(q_2) [h - \psi(q_2)] - \frac{h'^2}{2}\}}}$$

$$2.16 \quad \frac{d}{dt} \left[\left(I_1 + \frac{1}{12} m_2 l_2^2 + J(r) \sin^2\theta \right) \dot{\phi} \right] = M_\phi,$$

$$\frac{d}{dt} [I(r) \dot{\theta}] - J(r) \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta = M_\theta + \left[m_2 \left(r - \frac{l_2}{2} \right) + mr \right] g \sin\theta,$$

$$(m_2 + m) \ddot{r} - \left[m_2 \left(r - \frac{l_2}{2} \right) + mr \right] (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta)$$

$$= F_{23} - (m_2 + m) g \cos\theta,$$

$$\text{其中 } I(r) = m_2 \left(r^2 - r l_2 + \frac{l_2^2}{3} \right) + m r^2.$$

$$2.17 \quad T = \frac{1}{2} [I_z \dot{\psi}^2 + (I'_x \dot{\psi}^2 \cos^2\theta + I'_1 \dot{\theta}^2 + I'_x \dot{\psi}^2 \sin^2\theta) +$$

$$+ I_x (\dot{\psi}^2 \cos^2\theta + \dot{\theta}^2) + I_x (\dot{\phi} + \dot{\psi} \sin\theta)^2],$$

$$\text{能量积分: } [I_z + I_x + (I'_x - I_x - I'_x) \cos^2\theta] \dot{\psi}^2 + (I_y + I'_y) \dot{\theta}^2 = h,$$

$$\text{循环积分: } \phi + \psi \sin\theta = n,$$

$$[I_z + I_x + (I'_x + I_x - I'_x) \cos^2\theta] \dot{\phi} + I_x C_1 \sin\theta = C_2.$$

$$2.18 \quad R = \frac{1}{2} (I_y + I'_y) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \{ [I_z + I_x + (I'_x + I_x - I'_x) \cos^2\theta] \dot{\psi}^2 +$$

$$+ I_x n^2 \} - I_x C_1 \phi - C_2 \dot{\phi}$$

Routh 能量积分:

$$\frac{1}{2} (I_y + I'_y) \dot{\theta}^2 + I_x C_1 \phi + C_2 \dot{\phi} - \frac{1}{2} \{ [I_z + I_x + (I'_x + I_x - I'_x) \cos^2\theta] \dot{\psi}^2 +$$

$$+ I_x C_1^2 \} = h_1$$

$$2.19 \quad \text{循环积分: } \phi + u \sin\theta = n,$$

$$\text{广义能量积分: } \frac{1}{2} [(C \dot{\phi}^2 + A \dot{\theta}^2) - u^2 (C \sin^2\theta + A \cos^2\theta)]$$

$$+ \frac{1}{2} C \dot{\theta}^2 = h.$$

$$2.20 \quad R = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} (C \dot{\theta}^2 - A u^2 \cos^2\theta - 2 C u \sin\theta + C n^2)$$

Routh 能量积分:

$$\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(C\theta^2 - Au^2\cos^2\theta + 2Cnu\sin\theta) = h$$

$$2.21 \quad \varphi + \frac{2\varphi}{t} + \frac{g\varphi}{R\omega t} = 0$$

$$2.22 \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{g}}$$

$$2.24 \quad m\ddot{x} + kx + \alpha\dot{x} = \varepsilon ar\omega \cos \omega t + \varepsilon^2 a \cos \omega t \left[\dot{x} - r\omega \left(\frac{x}{r} - \sin \omega t \right) \right] + \\ + \varepsilon^3 a \cos \omega t \left\{ r\omega \left[3\left(\frac{x}{r} \right)^2 - 6\frac{x}{r} \sin \omega t + 4\sin^2 \omega t - 1 \right] - \right. \\ \left. - 2\left(\frac{x}{r} - \sin \omega t \right) \left[\dot{x} + r\omega \left(\frac{x}{r} - \sin \omega t \right) \right] \right\} + O(\varepsilon^4)$$

2.25 平衡位置由以下方程给出:

$$\left\{ mgh - \frac{C_\varphi (mh^2 + A - C) \cos \theta}{(mh^2 + A) \sin^2 \theta - [C - (mh^2 + A)] \cos^2 \theta} \right\} \sin \theta = 0$$

其中 C_φ 为循环积分常数

$$\text{振动周期为 } \tau = 2\pi \sqrt{\frac{(A + Mh^2)(A + Mh^2 - C)}{(A + Mh^2 - C)^2 \omega^4 - M^2 g^2 h^2}}$$

2.26 提示: 计算杆之势能时应计入轴向力引起之弯矩。因之, 利用以下形式之杆件平衡微分方程:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \alpha^2 y = -\alpha^2 y_0 + \frac{(l-z)}{EI_x} Q$$

其中 y_0 为重块之相对位移, z 为沿杆轴线方向之坐标, Q 为杆端所受剪力,

$\alpha^2 = \frac{N}{EI} = \frac{m\omega^2(R+l)}{kI_x}$ 。解此方程并利用边界条件确定积分常数,

可求得杆端之刚度为

$$k = \frac{Q}{y_0} = \frac{\text{ch} \alpha l}{(l/N) \text{ch} \alpha l - (1/\alpha N) \text{sh} \alpha l}$$

由此求得相对运动方程为:

$$y_0 + \left[\frac{\text{ch} \alpha l \alpha^3 EI_x}{(\alpha l \text{ch} \alpha l - \text{sh} \alpha l) m} - \omega^2 \right] y_0 = 0$$

$$\text{固有频率为 } p = p_0 \sqrt{\frac{(\alpha l^3) \text{ch} \alpha l}{3(\alpha l \text{ch} \alpha l - \text{sh} \alpha l)} - \frac{(\alpha l)^2}{3(1+R/l)}}$$

其中 $p_0 = \frac{3EI_x}{ml^3}$ 为无转动时之固有频率

$$2.27 \quad 1) (I_C + ma^2) \ddot{\varphi} + m\omega^2 r \left[\left(R_1 R_2 - a \Delta R - a^2 \frac{\Delta R}{r} \right) / \Delta R \right] \varphi = 0$$

$$2) p = \left\{ \left[m\omega^2 r / (I_C + ma^2) \right] (R_1 R_2 / \Delta R - a - a^2 / r) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$2.28 \quad [(m_1 + m_2) l^2 + m_3 (l + a)^2 + I_{y_1} + I_{y_2}] \ddot{\gamma} + I_{x_1} \Omega_0 \dot{\theta} + \\ + [(m_1 + m_2) gl + m_3 g (l + a)] \gamma = 0,$$

$$[I_{x_1} + I_{x_2} + m_3 a^2] \ddot{\theta} - I_{x_1} \Omega_0 \dot{\gamma} + m_3 ga \theta = 0,$$

$$p_1 = \left\{ \frac{[(m_1 + m_2) l + m_3 (l + a)] g}{[(m_1 + m_2) l^2 + m_3 (l + a)^2 + I_{y_1} + I_{y_2}]} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$p_2 = \left[\frac{m_3 ga}{I_{x_1} + I_{x_2} + m_3 a^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$2.29 \quad T = \frac{I_0 \dot{\varphi}}{2} + \frac{m}{2} \dot{y}^2 + \frac{m_1 \dot{y}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{y}_2^2}{2},$$

$$V = \frac{k_1}{2} (y + b\varphi - y_1)^2 + \frac{k_2}{2} (y - a\varphi - y_2)^2 + \frac{k y_1^2}{2} + \frac{2k y_2^2}{2},$$

$$\Phi = \frac{c}{2} (\dot{y} + \dot{\varphi} b - \dot{y}_1)^2 + \frac{c}{2} (\dot{y} - \dot{\varphi} a - \dot{y}_2)^2.$$

运动方程:

$$I_0 \ddot{\varphi} + c(a^2 + b^2) \ddot{\varphi} + (k_2 a^2 + k_1 b^2) \varphi + c(a - b) \dot{y} + (k_1 b - k_2 a) y - \\ - cb \dot{y}_1 + ca \dot{y}_2 - k_1 b y_1 + k_2 y_2 a = 0,$$

$$m \ddot{y} + 2c \dot{y} + (k_1 + k_2) y + c(b - a) \dot{\varphi} + (k_1 b - k_2 a) \varphi - c(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) \\ - k_1 y - k_2 y_2 = 0$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + c \dot{y}_1 + (k + k_1) y_1 - cb \dot{\varphi} - k_1 b \varphi - c \dot{y} - k_1 y = 0,$$

$$m_2 \ddot{y}_2 - c \dot{y}_2 + (2k + k_2) y_2 + ca \dot{\varphi} + k_2 a \varphi - c \dot{y} - k_2 y = 0$$

$$2.30 \quad \frac{II_d}{I + I_d} \ddot{\varphi} + 4a^2 k \varphi = 0$$

$$r = 2a \sqrt{\frac{k(I + I_d)}{II_d}}$$

2.31 运动方程为

$$\ddot{\theta} + \frac{I_z \Omega_0}{I_x} \dot{\varphi} - \frac{l}{2I_x} (Mg - 4k_2 l) \theta = 0$$

$$\ddot{\varphi} - \frac{I_z \Omega_0}{I_x} \dot{\theta} - \frac{l}{2I_x} (Mg - 4k_1 l) \varphi = 0$$

$$\Delta \left(\frac{I_z \Omega_0}{I_x} \right)^2 - \frac{Mgl + 2l^2(k_1 + k_2)}{J_x} > 0,$$

$$(Mg - 4k_1 l)(Mg - 4k_2 l) > 0,$$

$$\text{及} \left[\left(\frac{I_z \Omega_0}{I_x} \right)^2 - \frac{Mg r + 2l^2(k_1 + k_2)}{I_x} \right]^2 - \frac{l^2}{I_x^2} (Mg - 4k_1 l) (Mg - 4k_2 l) > 0$$

满足时, 系统保持稳定。临界角速度由下式给出:

$$\Omega_k^2 = \frac{I_z^2}{I_x^3} \left[\frac{l}{I_x} \sqrt{(Mg - 4k_1 l) (Mg - 4k_2 l)} + \frac{l}{I_x} (Mg - 2k_1 l - 2k_2 l) \right]$$

第 三 章

$$3.1 \quad \theta = \frac{Sr}{I(\theta)} \left(\sin \theta + \frac{r}{2l} \sin 2\theta \right)$$

(假设 $r \ll l$, 略去高于 $\left(\frac{r}{l}\right)^2$ 的高阶小量)

$$\text{其中 } I(\theta) = I_0 + m_1 \left(r^2 + \frac{r^3}{l} \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{r^4}{16l^2} \sin^2 2\theta \right) + \\ + I_1 \frac{r^2}{l^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta \right)^2 + m_2 \left(r \sin \theta + \frac{r^2}{2l} \sin 2\theta \right)^2$$

$$3.2 \quad \text{i) } \dot{x}_A = \frac{S(1+3\sin^2\theta)}{4m}, \quad \dot{\theta} = \frac{3S\sin\theta}{ml}$$

其中 m 为每杆之质量

当 $\theta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{21}}$ 时, C 点不动

$$\text{ii) } \dot{\theta} = \frac{3S\sin\theta(2+3\sin^2\theta)}{4m(1+3\sin^2\theta)}$$

$$\dot{\psi} = -\frac{9S\sin^3\theta}{4m(1+3\sin^2\theta)}$$

$\dot{\theta}$ 及 $\dot{\psi}$ 分别表示 BA 杆和 BC 杆之角速度

$$3.3 \quad \dot{\theta} = \frac{(M+m)lv\sin\theta - C_0}{\left(M + \frac{2}{3}m\right)l^2}$$

$$3.4 \quad m\ddot{r} - \frac{4m\dot{A}^2}{r^3} = f(r)$$

$$\dot{A} = 0$$

$$3.5 \quad A\omega_1 - A\operatorname{tg}\beta\omega_1\omega_2 - C\omega_2\omega_3 = \frac{M_\sigma}{\cos\beta} - \operatorname{tg}\beta M_\tau$$

$$A\omega_2 + A\operatorname{tg}\beta\omega_1^2 + C\omega_1\omega_3 = M_\beta$$

$$C\omega_3 = M_\gamma$$

$$3.6 \quad \text{固有频率为 } p = \omega \sqrt{\frac{\frac{R_1 R_2 r}{\Delta R} - a(a+r)}{\rho_0^2 + a^2}}$$

$$\text{实现消振条件为 } \frac{R_1 R_2 r}{\Delta R} - a(a+r) = n^2(\rho_0^2 + a^2)$$

$$3.7 \quad A\ddot{\theta}_1 + c\dot{\theta}_1 + k\theta_1 + C\omega_0\dot{\theta}_2 = -A\dot{\Omega}_x - C\omega_0\Omega_y$$

$$A\ddot{\theta}_2 + c\dot{\theta}_2 + k\theta_2 - C\omega_0\dot{\theta}_1 = -A\dot{\Omega}_y + C\omega_0\Omega_x$$

$$\text{其中 } k = 2k_1 a, \quad c = 2c_1 a$$

3.9 卫星体的运动方程为:

$$m\ddot{x} + m_0[2\dot{\xi}\omega_y + \xi(\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z)] = F_x,$$

$$m\ddot{y} - m_0[2\dot{\xi}\omega_x + \xi(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z)] = F_y,$$

$$m\ddot{z} - m_0[\xi(\omega_x^2 + \omega_y^2) - \dot{\xi}] = F_z,$$

$$(A + m_0\dot{\xi}^2)\dot{\omega}_x + (C - A - m_0\dot{\xi}^2)\omega_y\omega_z - m_0x_0\dot{\xi}\dot{\omega}_x - m_0x_0\dot{\xi}\omega_x\omega_y$$

$$+ 2m_0\dot{\xi}\dot{\xi}\omega_x - \frac{m_0^2}{m}[2\dot{\xi}\omega_x + \xi(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z)]\dot{\xi} = M_x,$$

$$(A + m_0\dot{\xi}^2)\dot{\omega}_y - (C - A - m_0\dot{\xi}^2)\omega_x\omega_z + m_0x_0\dot{\xi}(\omega_x^2 - \omega_z^2) - m_0x_0\dot{\xi}$$

$$+ 2m_0\dot{\xi}\dot{\xi}\omega_y - \frac{m_0^2}{m}[2\dot{\xi}\omega_y - \xi(\dot{\omega}_y - \omega_x\omega_z)]\dot{\xi} = M_y,$$

$$C\dot{\omega}_z - m_0x_0\dot{\xi}\dot{\omega}_x + m_0x_0\dot{\xi}\omega_y\omega_z - 2m_0x_0\dot{\xi}\omega_x = M_z,$$

质量 m 的相对运动:

$$m_0[\dot{\xi} - x_0\dot{\omega}_y + x_0\omega_x\omega_z - \xi(\omega_x^2 + \omega_y^2)] + \frac{m_0^2}{m}[\xi(\omega_x^2 + \omega_y^2) - \dot{\xi}] + C\dot{\xi} + k\xi = 0.$$

$$3.12 \quad \omega_1^2 = \frac{48EI}{Ml^3}, \quad \omega_2^2 = \frac{12EI}{(C-A)l \cos \alpha}.$$

$$3.13 \quad \left[m_0 \left(1 + \frac{k_0^2}{a^2} \right) + 2 \frac{m}{l} (l - y) \right] \ddot{y} - \frac{m}{l} \dot{y}^2 = \left[m_0 + \frac{m}{l} (l - y) \right] g$$

$$3.14 \quad \text{运动方程: } \ddot{\varphi} + \frac{3m_1 v_0}{m_0 + m_1 l} \dot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \varphi = 0$$

其中 $m_1 = \rho A_0$, 为管中单位长度质量

小摆动频率为

$$p = \sqrt{\frac{3g}{2l} - \left[\frac{3m_1 v_0}{2(m_0 + m_1 l)} \right]^2}$$

运动变为非周期性之条件为

$$v > \frac{m_0 + m_1 l}{m_1} \sqrt{\frac{2g}{3l}}$$

3.15 出现稳定平衡位形的条件为

$$m_1 v_0^2 \sin \alpha < \frac{g}{2} (m_0 + m_1 l)$$

稳定平衡位形 φ_0 由下式给出:

$$\sin \varphi_0 = -\frac{2m_1}{m_0 + m_1 l} \cdot \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g}$$

在位形 φ_0 附近的小振动频率为

$$p = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{g \cos \varphi_0}{l} - \left[\frac{3}{2} \frac{m_1 v_0}{(m_0 + m_1 l)} \right]^2}$$

当 $v > \frac{m_0 + m_1 l}{m_1} \sqrt{\frac{2g}{3l} \cos \varphi_0}$ 时, 运动是非周期的。

3.16 磁带的直线段远小于其全长, 可略去不计。设 $t=0$ 时磁带尚未卷入主动轴, 主动轴上之力矩为

$$M = \alpha \left(1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \frac{v_0}{\sqrt{\frac{\delta v_0 t}{\pi} + r_0^2}} - \rho \frac{\delta^2 v_0^2}{4\pi^2} \cdot \frac{(l - v_0 t)^2 \frac{R_2^2}{R_1^2} + v_0^2 t^2}{\left(\frac{\delta v_0 t}{\pi} + r_0^2 \right)^{3/2}}$$

$$\text{其中 } R_1^2 = \frac{\delta(l - v_0 t)}{\pi} + r_0^2, \quad R_2^2 = \frac{\delta v_0 t}{\pi} + r_0^2$$

3.18 沿 y 轴方向横向振动方程:

$$\sum_{\beta=1}^n [A_{\alpha\beta} \ddot{q}_\beta + (\lambda_z^2 C_{\alpha\beta} + \omega^2 m_{\alpha\beta} + \omega^2 A_{\alpha\beta}) q_\beta] = 0, \quad (\alpha=1, \dots, n)$$

沿 z 轴方向横向振动方程:

$$\sum_{\beta=1}^n [A_{\alpha\beta} \ddot{q}_{\beta+n} + (\lambda_z^2 C_{\alpha\beta} + \omega^2 m_{\alpha\beta}) q_{\beta+n}] = 0 \quad (\alpha=1, \dots, n)$$

$$\text{其中 } A_{\alpha\beta} = \int_0^1 \varphi_\alpha(\xi) \varphi_\beta(\xi) d\xi, \xi \text{ 为无量纲参数: } \xi = \frac{x}{l}$$

$$C_{\alpha\beta} = \int_0^1 \varphi_\alpha''(\xi) \varphi_\beta''(\xi) d\xi$$

$$\lambda_z^2 = \frac{EI_z}{ml^4}, \quad \lambda_y^2 = \frac{EI_y}{ml^4}, \quad m_{\alpha\beta} = \int_0^1 \left(\frac{R}{l} + \xi \right) d\xi \int_0^1 \varphi_\alpha'(\eta) \varphi_\beta'(\eta) d\eta$$

3.19 运动方程:

$$L\dot{q} + R\dot{q} + \dot{q}x \frac{\partial L}{\partial x} = E$$

$$M\ddot{x} - \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x} \dot{q}^2 + kx = Mg$$

3.20 运动方程:

$$m\ddot{x} + kx - \frac{E}{a}q + \frac{q^2}{2C_0a} = p(t)$$

$$L\dot{q} + R\dot{q} - \frac{E}{a}x + \frac{q}{C_0} - \frac{qx}{aC_0} = 0$$

当电路电阻不计时,微音器小振动固有频率为

$$p_{1,2} = \sqrt{\frac{C_0L + k/m}{2}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(C_0L - \frac{k}{m}\right)^2 + 4\frac{q_0^2}{mC_0a^2}}$$

$$3.21 \quad L = \frac{1}{2} (I\dot{\theta}^2 + m\dot{x}^2 + M_{11}\dot{q}_1^2 + M_{22}\dot{q}_2^2 +$$

$$+ E_1q_1 - E_2(q_1 - q_2) + N\varphi\dot{q}_1\theta -$$

$$- \frac{1}{2} \left[k_2x^2 + (q_1 - q_2)^2 \frac{S-x}{A} + k_1\theta^2 \right] + mgx$$

运动方程:

$$M_{11}\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \frac{(q_1 - q_2)(S-x)}{A} - N\varphi\dot{\theta} - E_1 + E_2 = 0,$$

$$M_{22}\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 - \frac{(q_1 - q_2)(S-x)}{A} - E_2 = 0,$$

$$I\ddot{\theta} + k_1\theta - N\varphi\dot{q}_1 = 0$$

$$m\ddot{x} + k_2x - \frac{(q_1 - q_2)^2}{2A} - mg = 0.$$

第 四 章

$$4.1 \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}, \quad \dot{\psi} = \frac{p_\psi}{mr^2 \cos^2 \varphi};$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} + \frac{p_\psi^2}{mr^3 \cos^2 \varphi} - \frac{\mu m}{r^2},$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\sin \varphi}{mr^2 \cos^3 \varphi} p_\psi^2, \quad \dot{p}_\psi = 0.$$

$$\text{能量积分: } \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + \frac{p_\psi^2}{r^2 \cos^2 \varphi} \right) - \frac{\mu m}{r} = h$$

循环积分: $p_\psi = \text{const.}$

$$4.2 \quad \text{能量积分: } \frac{1}{2} \left[\frac{p_\theta^2}{A} + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{A \sin^2 \theta} + \frac{p_\varphi^2}{C} \right] + Mga \cos \theta = h$$

循环积分: $p_\psi = \beta_1, \quad p_\varphi = \beta_2$

$$\theta = \frac{p_\theta}{A}, \quad \varphi = \frac{p_\varphi}{C} - \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)}{A \sin^2 \theta} \cos \theta, \quad \psi = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \theta}{A \sin^2 \theta},$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)}{A \sin^2 \theta} (p_\psi - p_\varphi) + Mga \sin \theta, \quad \dot{p}_\psi = 0, \quad \dot{p}_\varphi = 0$$

$$4.3 \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \varphi = \frac{p_\varphi}{m(l+x)^2}, \quad \dot{p}_x = \frac{p_\varphi^2}{m(l+x)^3} - kx + mg \cos \varphi$$

$$\dot{p}_\varphi = mg(l+x) \sin \varphi$$

$$4.4 \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m},$$

$$\theta = \frac{3p_\theta}{ml^2}, \quad \psi = \frac{3p_\psi}{ml^2 \sin^2 \theta};$$

$$\dot{p}_x = 0, \quad \dot{p}_y = 0, \quad \dot{p}_z = -mg,$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{3p_\psi^2 \cos \theta}{ml^2 \sin^3 \theta}, \quad \dot{p}_\psi = 0.$$

首次积分:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{3}{2ml^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\psi^2}{\sin^2 \theta} \right) + mgz = h,$$

$$p_x = p_{x0}, \quad p_y = p_{y0}, \quad p_z = p_{z0}, \quad p_z = -mgt + p_{z0}$$

坐标的解;

$$x = \frac{\beta_1}{m} t + x_0, \quad y = \frac{\beta_2}{m} t + y_0, \quad z = \beta_3 t - \frac{g}{2} t^2 + z_0$$

$$\frac{3}{ml^2} (t - t_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{p_{\theta_0}^2 - p_{\psi_0}^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta_0} \right)}}$$

$$\psi - \psi_0 = p_{\psi_0} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{p_{\theta_0}^2 - p_{\psi_0}^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta_0} \right)}}$$

$$4.5 \quad F = Q \sin^{-1} \frac{q}{\sqrt{2Q - q^2}} + \frac{1}{2} q \sqrt{2Q - q^2}$$

$$4.6 \quad F = q \cos^{-1} \frac{Q e^{-t}}{\sqrt{2q}} - \frac{1}{2} Q e^{-t} \sqrt{2q - Q e^{-t}}$$

$$4.7 \quad F_1 = q \cos^{-1} \sqrt{1 - q^2 e^{2Q}} + \sqrt{e^{-2Q} - q^2}$$

$$F_2 = q \operatorname{tg}^{-1} \frac{q}{P} + P(1 - \ln \sqrt{q^2 + P^2})$$

$$F_3 = e^{-q} \cos p$$

$$F_4 = P + P \ln \frac{\cos p}{P}$$

$$4.8 \quad F_1 = \sum_{i=1}^n (q_i + Q_i)^{\alpha+1}$$

$$4.9 \quad F_2 = \sum_{i=1}^n [P_i(q_i - 1 + \ln P_i) - e^{P_i}]$$

$$4.10 \quad K \equiv 0$$

$$F_1 = \frac{1}{2t}(q-Q)^2 + \frac{1}{2}gt(q+Q)$$

$$F_2 = \left(q - \frac{1}{2}tP\right)(p+gt)$$

$$F_3 = \left(Q + \frac{1}{2}tp\right)(gt-p)$$

$$F_4 = \frac{1}{2}gt^2p - \frac{1}{2}tp^2$$

$$4.13 \quad \text{i) } S = -\beta t + \int (\beta - q) dq$$

$$\text{ii) } S = -\beta t + 2m\beta \int e^{q/a} dq$$

$$4.14 \quad S = -\alpha_1 t + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3 + \int \sqrt{2\alpha_1 - \alpha_2^2 - \frac{1}{\cos^2 q_1} (\alpha_3 - \alpha_2 \sin q_1)^2} dq_1$$

$$4.15 \quad S = h \cos t + \sqrt{\frac{\alpha_1}{1-2h}} \ln q_1 + \sqrt{\frac{\alpha_1}{3h-1}} \ln q_2$$

$$4.16 \quad t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{ml^2 d\theta}{\sqrt{f(\theta)}}, \quad \varphi - \varphi_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\alpha_\varphi d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{f(\theta)}}$$

$$f(\theta) = 2 \left[ml^2 \alpha t + m^2 gl^3 \cos \theta - \frac{\alpha_\varphi^2}{2 \sin^2 \theta} \right]$$

$$4.17 \quad q = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha_{10}^2} + \frac{3}{4}\mu t\right)}} \sin(t - \alpha_{20}) \text{ 其中 } \alpha_{10}, \alpha_{20} \text{ 为积分常数。}$$

$$4.18 \quad \text{不稳定区为 } 1 - \frac{1}{4}\mu < \omega_0 < 1 + \frac{1}{4}\mu$$

第五章

5.3 平衡位形为一悬链线

5.6 取近似解 $x = a \sin \omega t$, 则有

$$\omega_0^2 a + \frac{3}{4} \alpha a^3 = f + a w^2$$

5.7 取近似解 $x = a \sin \omega t$, 则有当 $a > a_1$ 时

$$\frac{k_2}{k_1 - k_2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1 \right) \frac{a}{a_0} + \frac{k_2}{k_1 - k_2} \left(\frac{P}{k_2 a} \right) = \pm \frac{2}{\pi} \left[\frac{a}{a_0} \sin^{-1} \left(\frac{a_0}{a} \right) + \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{a} \right)^2} \right]$$

$$\text{其中 } \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

当 $a < a_0$ 时, 为普通的线性振动, 此时有

$$a = \frac{P}{k_1} \left[\frac{1}{1 - \omega^2 / \omega_1^2} \right]$$

5.8 $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0$, 其中 $c = \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$,

$$v \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0, EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \Big|_{x=l} = c(v \Big|_{x=l} - u),$$

$$mu = c(v \Big|_{x=l} - 2u)$$

5.9 坐标 z 从杆的固定端计起时, Hamilton 原理给出以下方程: (计入轴向力对弯曲势能的影响)

$$EI_x \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} - \frac{1}{2} m \omega^2 l^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(1 - \frac{z^2}{l^2} \right) \frac{\partial y}{\partial z} \right] + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$Mu + \left[EI_x \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} - M \omega^2 (R + l) \frac{\partial y}{\partial z} \right]_{z=l} - M \omega^2 u = 0$$

其中 u 为重块之相对位移, y 为杆上任一点之相对位移。

此外, 尚需满足以下边界条件:

$$\left[EI_x \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right] \delta \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right) \Big|_0^l = 0$$

$$\left[\left(EI_x \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \right) - M \omega^2 (R + l) \right] \delta y \Big|_0 = 0$$

第六章

6.1 消去 Lagrange 乘子后, 可得以下方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta) + \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta &= 0 \\ \frac{5}{4} \ddot{\theta} + \frac{1}{4} \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{3}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta) \dot{\psi} \cos \theta &= \frac{g}{a} \sin \theta \\ \frac{1}{4} \ddot{\psi} - \frac{1}{2} \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta + \frac{1}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta) \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

6.2 用三个角速度分量 $\omega_1 = \dot{\theta}$, $\omega_2 = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta$, $\omega_3 = \dot{\psi} \cos \theta$ 作为非零准速度, 圆盘的运动方程为

$$5\omega_1 - 6\omega_2\omega_3 + \operatorname{tg} \theta \omega_3^2 = 4g \sin \theta$$

$$\omega_2 + \frac{2}{3} \omega_1 \omega_3 = 0$$

$$\omega_3 + 2\omega_1\omega_2 - \operatorname{tg} \theta \omega_1\omega_3 = 0$$

6.3 见 6.2 答案

6.4 见 6.2 答案

6.5 以铰 A 的线速度 v_A 及前轴相对于车架的角速度 ψ 作为非零准速度, 运动方程可表为:

$$(\mu + \mu_1 \sin^2 \psi) \dot{v}_A + \mu v_A \dot{\psi} \sin \psi \cos \psi + v \dot{\psi} \sin \psi = P_1^*$$

$$\left(\dot{\psi} + \frac{1}{l} v_A \sin \psi \right) = \frac{1}{vl} P_2^*$$

$$\text{其中 } \mu_1 = \frac{P_1}{g} + 2 \frac{P_3}{g} + \frac{P_2}{g} + \frac{2A_1}{R^2} + \frac{2A_2}{R^2}$$

$$\begin{aligned} \mu_2 = \frac{1}{l^2} \left(I_1 + 2 \frac{P_3 a^2}{g} + 2C_1 + I_2 + 2 \frac{P_4 a^2}{g} + 2C_2 \right) - \frac{P_1}{g} - 2 \frac{P_3}{g} + \\ + 2 \frac{A_2 a^2}{R^2 l^2} - \frac{A_1}{R^2} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{l} \left(I_2 + 2 \frac{P_4 c^2}{g} + 2C_2 + \frac{A_2 a^2}{R^2} \right)$$

P_1^*, P_2^* 为对应于准速度 v_A 及 ψ 的广义力。

6.6 非完整约束方程为

$$\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - r \dot{\varphi}_1 - l \dot{\theta} = 0$$

拖拉机的运动方程为

$$mr\ddot{x} = (M_1 + M_2) \cos \theta,$$

$$mr\ddot{y} = (M_1 + M_2) \sin \theta$$

$$I\tau\ddot{\theta} = l(M_2 - M_1)$$

$$r\dot{\phi}_1 = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - l\dot{\theta}$$

$$6.7 \quad \ddot{x} - \frac{2}{7}\Omega\dot{y} = 0$$

$$\ddot{y} - \frac{2}{7}\Omega\dot{x} = 0$$

$$\dot{\omega}_z = 0$$

按给定初始条件解此方程组, 可知圆球中心的轨迹为一圆周。

$$6.8 \quad \text{取偏速度 } u_1 = \dot{x}, u_2 = \dot{y}, u_3 = \omega_z$$

Kane 方程为

$$\left. \begin{aligned} m\dot{u}_1 + \frac{2}{5}ma\dot{\omega}_y &= 0 \\ m\dot{u}_2 - \frac{2}{5}ma\dot{\omega}_x &= 0 \\ \dot{u}_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

再从约束方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1 - a\dot{\omega}_y - \Omega u_2 &= 0 \\ \dot{u}_2 + a\dot{\omega}_x - \Omega u_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

消去 $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y$ 即可得到和 6.7 形式相同的解。

$$6.9 \quad \text{取偏速度 } u_1 = \dot{x}_A, u_2 = \dot{y}_A, u_3 = \omega$$

$$u_{3+i} = \dot{q}_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

则 Kane 方程为

$$\dot{u}_1(m_A + m_B) - \dot{u}_3 \sum_{i=1}^n E_i q_i - (m_A + m_B) u_2 u_3 - 2u_3 \sum_{i=1}^n E_i u_{3+i} -$$

$$-u_3^2(bm_B + e_B) = R_x$$

$$\dot{u}_2(m_A + m_B) + \dot{u}_3(bm_B + e_B) + \sum_{i=1}^n E_i \dot{u}_{3+i} + (m_A + m_B) u_3 u_1 -$$

$$-u_3^2 \sum_{i=1}^n E_i u_{3+i} = R_y$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{u}_1 \sum_{i=1}^n E_i q_i + \dot{u}_2 (b m_B + e_B) + \dot{u}_3 (b^2 m_B + 2b e_B + I_B + I_A) + \\
& + \sum_{i=1}^n (b E_i + F_i) \dot{u}_{3-i} + u_2 u_3 \sum_{i=1}^n E_i u_{3+i} + u_3 u_1 (b m_B + e_B) = M_A \\
& \dot{u}_2 E_j + \dot{u}_3 (b E_j + F_j) + \sum_{i=1}^n G_{ij} \dot{u}_{3+i} + u_3 u_1 E_j - u_3^2 \sum_{i=1}^n G_{ij} q_i + \\
& + \sum_{i=1}^n H_{ij} q_i = Q_j \quad (j=1, \dots, n)
\end{aligned}$$

其中各广义力 R_x, R_y, M_A 及 Q_j 见本书第三章例题 3.5.1, 其余记号如 E_i, G_{ij}, H_{ij} 等也与该例题相同。

参 考 文 献

- [1] 吴大猷,《古典动力学》,科学出版社,1983
- [2] 梅凤翔,《非完整系统力学基础》,北京工业学院出版社,1985
- [3] 杨来伍,梅凤翔,《变质量系统力学》,北京理工大学出版社,1989
- [4] 牛青萍,“经典力学基本微分原理与不完整力学组的运动方程”,《力学学报》,第7卷,第二期,1964
- [5] 高为炳,《运动稳定性基础》,高等教育出版社,1987
- [6] 陈滨,《分析动力学》,北京大学出版社,1987
- [7] 贾书惠,《刚体动力学》,高等教育出版社,1987
- [8] 黄昭度,纪辉玉,《分析力学》,清华大学出版社,1985
- [9] 谈开孚,《分析力学》,哈尔滨工业大学出版社,1985
- [10] 赵国景,“用 *Hamilton* 定律求动力响应的直接方法”,《全国第二届非线性振动学术会议论文集》,1981
- [11] 马淦林,“纺织卷绕机构的变质量动力学”,《第三届全国振动理论及应用学术会议论文集》,1987
- [12] 罗勇,“分析力学的高阶微分变分原理与近似方法”,《北京工业学院研究生毕业论文集》,1988
- [13] 赵俊三,“导数空间变分原理”,《清华大学工程力学与工程热物理学学术会议论文集》,清华大学出版社,1988
- [14] E. J. Routh, *Advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, Dover, 1955
- [15] E. T. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge, 1937
- [16] G. Hamel, *Theoretische Mechanik*, Springer-Verlag, 1978
- [17] L. A. Pars, *A treatise on analytical dynamics*, Heinemann, 1965
- [18] L. Meirovitch, *Methods of analytical dynamics*, Mc Graw-Hill, 1970
- [19] H. Goldstein, 汤家镛,陈为洵译,《经典力学》,科学出版社,1981
- [20] D. T. Greenwood, 孙国琨译,《经典动力学》,科学出版社
- [21] R. M. Rosenberg, *Analytical dynamics of discrete systems*, Plenum, 1977

- [22] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, 1978
- [23] Edward A. Desloge, *Classical mechanics, V. II*, John-Wiley & Sons, 1982
- [24] P. Hagedorn, *Non-linear oscillations*, Clarendon Press, 1981
- [25] A. H. Nayfeh, *Perturbation methods*, John-Wiley & Sons, 1973
- [26] T. R. Kane, P. W. Likins, D. A. Levinson, *Spacecraft dynamics* Mc Graw-Hill, 1983
- [27] T. R. Kane, D. A. Levinson, *Dynamics, theory and applications* Mc Graw-Hill, 1985
- [28] Ronald N. Arnold, *Gyrodynamics and its engineering applications*, Academic Press, 1961
- [29] W. T. Thomson, *Introduction to space dynamics*, John-Wiley & Sons, 1961
- [30] L. Meirovitch, A new method of solution of the eigenvalue problem for gyroscopic systems, *AIAAJ*, V. 12, No. 10, pp. 1337—1342, 1974
- [31] M. Baruch, R. Riff, Hamilton's Principle Hamilton's Law——6 correct formulations, *AIAAJ*, V. 20, No. 5, 1982
- [32] D. L. Hitzl, Implementing Hamilton's law of varying action with shifted Legendre Polynomials, *Jl. of Comp. Phys*, 38, pp. 185—211, 1980
- [33] B. Vujanovic, The practical use of gauss' principle of constraint, *JAM*, No. 9, pp. 491—496, 1976
- [34] Г. К. Сулов, *Теоретическая механика*, Гостехиздат, 1949.
- [35] Н. Н. Бухгольц, 钱尚武, 钱敏译,《理论力学基本教程》, 高等教育出版社, 1957
- [36] Ф. Я. Гантмахер, 钟奉俄, 薛问西译,《分析力学讲义》, 人民教育出版社, 1963
- [37] А. И. Лурье. *Аналитическая механика*, ФМ, 1960
- [38] И. М. Беленький, *Введение в аналитическую Механику*, Высшая школа, 1964

- [39] В. С. Новоселов, *Вариационные методы в механике*, ИЛУ, 1966
- [40] Ю. И. Неймарк, Н. А. Фужаев, *Динамика Неголономных систем*, Наука, 1967
- [41] Ю. Г. Мартыненко, *Аналитическая динамика Электромеханических систем*, Московский Энергетический институт, 1984
- [42] Д. Р. Меркин, *Гирокоспические систем*, Гостехиздат, 1956
- [43] В. А. Зиновьев, А. П. Бессонов, 于东英译, «机组动力学基础» 科学出版社, 1976
- [44] И. В. Николенко, *Динамика управляемых Неголономных систем*, Высшая школа, 1985
- [45] Н. А. Кильчевский, Г. А. Кильчевский, Н. Е. Ткаченко, *Аналитическая механика континуальных систем*, Наукова Думка, 1979
- [46] Н. Г. Четаев, О принципе Гаусса, устойчивость Движения Работы по аналитической механике, *Изд. АН СССР*, стр. 323—326, 1962
- [47] В. В. Румянцев, О принципе Гамильтона для неголономных систем, *ПММ*, Т. 42, Выш. 3, 1978
- [48] В. С. Новоселов, Пример нелинейной неголономной связи, Не Относящейся к типу Н. Г. Четаева, *Вестник Ленинградского Университета*, No. 19, стр. 106—112, 1957
- [49] Г. Н. Князев, К вопросу О применимости динамических Уравнении Вольтерры для неголономных систем, *Механика, Сборник статей, Том*, 104, 1961
- [50] В. А. Ивович, Некоторые нелинейные задачи колебания стержней, *Проблемы прочности в Машиностроении*, Выпуск 5, 1959
- [51] И. В. Мещерский, *Сборник задач по теоретической Механике*, Высшая школа, 1986
- [52] В. А. Светлицкий, И. В. Стасенко, *Сборник задач По Теории колебаний*, Высшая школа, 1979
- [53] В. И. Феодосьев, О колебаниях и устойчивости трубы при притеканий через её жидкости, *Инж. сб.*, том X, 1951

索 引

A

- Appell 方程 516
- Appell 形式的 Jourdain 原理 516
- Appell 函数 519
- Aoocell-Четаев 定义 369, 373

B

- 变分法 383
- 变分原理 366
 - d'Alembert-Lagrange 原理 69
 - 碰撞条件下的 d'Alembert-Lagrange 原理 199
 - 积分变分原理 367
 - 微分变分原理 367, 374
 - Jourdain 原理 368
 - Maupertuis 最小作用量原理 367, 433
 - Gauss 原理 368
 - Mangeron 原理 368, 374
 - Helmholtz 变分原理 390, 391
 - Hamilton 原理 368, 383
 - Hamilton 定律 391
 - 变时间端点条件下的 Hamilton 原理 416
 - 广义 Helmholtz 原理 421
- 变质量系统 239
 - 变质量系统的 d'Alembert-Lagrange 原理 240
 - 变质量系统的 Hamilton 原理 457
 - 变质量完整系统的 Lagrange 方程 241
 - Boltzmann-Hamel 方程 495

D

- 代表点 30
- 带有天线的人造卫星的运动 26
- Donkin 定理 134, 137
- 动能 52
 - 刚体的动能 57
 - 等时变分 38, 39, 42

E

- Euler 方程 385
- Euler-Lagrange 方程 205

F

- 泛函 384
- 反推力 239
 - 广义反推力 241
- 非完整系统 14
 - 非完整系统 Hamilton 原理的 Hölder 形式 395, 544
 - 非完整系统 Hamilton 原理的 Сулов 形式 396, 544
- Frobenius 条件 12

G

- Galerkin 法 408, 413
- 广义反推力 241
- 广义动量 119, 201
- 广义动量守恒 119
- 广义碰撞冲量 200
- 广义能量 97
- 广义力 61
- 广义坐标 19

广义陀螺力 104, 109

H

Hamilton 力学 297

Hamilton 正则方程 298

保守系统的 Hamilton 正则方程 300

非保守系统的 Hamilton 正则方程 306

Hamilton 变量 299

Hamilton 函数 300, 308

Hamilton-Jacobi 方法 300, 308

Hamilton-Jacobi 方程 340, 343

Hamilton-Jacobi 定理 344

Hamilton 作用量 393

Hamilton 作用量的极值性质 405

Hamilton 特性函数 345

耗散函数 113

Лурье 耗散函数 116, 117

Rayleigh 耗散函数 115, 117

J

Jacobi-Poisson 定理 317

积分

能量积分 96

广义能量积分 97

Jacobi 积分 97, 108

循环积分 118

加速度能 516

机电系统 266

机电系统的 Lagrange-Maxwell 方程 266, 273

电路系统的广义回路 267

广义电容电位差 270

广义磁通量 271
广义感应电动势 271
广义驱动力 273
Jourdain 原理

K

可能位移 37, 39, 41
可能速度 369
可能加速度 370
可取函数 251, 385, 408
Kene 方法 529, 530
Kene 方程 532
Kepler 运动 312, 351

空间

位形空间 346, 400
状态空间 34, 229
相空间 299, 346, 400
 q 空间
 x 空间 30
 $\delta\dot{r}$ 空间 370
 $\delta\ddot{r}$ 空间 370
 $\delta^{(n)}r$ 空间 371

L

Lagrange 力学 82
第一类 Lagrange 方程 52
第二类 Lagrange 方程 82
Lagrange 函数 86
有势系统的 Lagrange 方程 85
碰撞问题的 Lagrange 方程 199
Lagrange 经典关系 84

Lagrange 括号 319

Lagrange 括号的正则不变性 329

Lagrange 形式的 Jourdain 定理 478

Legendre 变换 134, 137

力

有势力 86

耗散力 101, 113

Lorentz 力 93, 103

陀螺力 101, 102

广义陀螺力 104, 109

拟保守力 105

拟陀螺力 105

临界转速 169, 232

M

Maggi 方程 478

Mangeron 原理 368

Maupertuis 最小作用量原理 367

Meirovitch 方法 158

N

Newton-Euler 方程 216

凝固导数 240

凝固偏导数 240

Noether 定理 124

P

旁路 391

偏速度 531

Poincaré 相对积分不变量 328, 329

Poisson 括号 315

Poisson 括号的正则不变性 329

普遍的中心方程 389

Q

Чаплыгин 方程 398, 477, 481

Чаплыгин-Caratheodory 问题 469, 483

全变分 433

全积分 344

R

Ritz 法 408, 409

Riemann 空间 438

Routh 方程 136

Routh 方程(非完整系统) 396, 467

Routh 函数 137

Routh 能量积分 140

柔性部件 248

 柔性部件的力学模型 248

 柔性部件的动力学方程 251

 带有柔性部件的载体动力学方程 253

S

三标记号 207, 499

势能 63

 广义势 92

 普通势 92

 刚体在引力场中的势能 65

实位移 37, 38

生成函数(母函数) 299, 333, 339

双线性协变量 325

双线性协变量的正则不变性 327

T

陀螺摆 164

陀螺力 101

W

Whittaker方程 131, 133

微分-变分交换关系 378, 386

 Hölder 定义的交换关系 379

 Суслов 定义的交换关系 381

位形 2

位形空间 30

位形轨迹 30

X

系统

 保守系统 97, 143

 保守陀螺系统 157

 定常系统 15, 53

 非定常系统 15

 完整系统 14

 非完整系统 14

 有序系统 15

 非有序系统 15

 自治系统 35

 非自治系统 35

相轨迹 304

相空间 304

旋转轴的振动问题 169

线性弹性动力学的时域微分原理 441

线性弹性动力学的时域积分原理 444

虚功 46, 60

虚位移 37 138

δr 空间的虚位移 370

δr^* 空间的虚位移 370

δr^m 空间的虚位移 371

一阶非完整系统的虚位移 369

高阶非完整系统的虚位移 371

Y

圆盘滚动问题 539

圆球滚动问题 485, 501, 524

圆形限制三体问题 175

约束 2

定常约束 14, 39

非定常约束 15

固执约束 16

非固执约束 16

理想约束 49

完整约束 5

非完整约束 5

高阶非完整约束 14

Четаев 型约束 42

有序约束 15, 39

非有序约束 15

Pfaff 型约束 10

Z

最速降落曲线

自然系统 92, 98

自由度 44

自由正则变换 333

载体-被载系统运动微分方程 217

载体的运动微分方程 218



被载系统的相对运动微分方程 223

广义转动惯性力 225

广义科氏惯性力 226

相对平衡方程 227

直接解法 407, 408, 416, 420, 427

振动

保守系统的振动 143

保守陀螺系统的振动 157

固有频率 146

谱矩阵 152

正则坐标 153

正则振型矩阵 151

主振动 147

主振型 147

主坐标变换 152

正路 391

正则变换 324, 327

正则变换的判别定理 324

单价正则变换 327

正则摄动理论 357

摄动函数 357

受摄系统 357

摄动方程

准速度 23, 55

准坐标 23

准坐标的变分 44, 475

函数对准坐标的求导 476

状态空间 34

状态点 34

状态轨迹 34

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名= 工程系统分析力学

作者=

页数= 5 8 2

S S 号= 0

出版日期=